Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
L MATH – S5 — Deuxième Session
305 – VARIABLES COMPLEXES

21 février 2006 – 8h–11h Pasteur C1

Ni documents ni calculatrices

Responsable : Jean-François Burnol

1 Exercice

Dans tout cet exercice C_R est le **cercle** centré en l'origine et de rayon R, parcouru dans le sens direct.

1.1 Déterminer les singularités et les résidus de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z-1)}$.

1.2 (suite) Déterminer en fonction de $R > 0$ la valeur de $\int_{C_R} f(z)\,dz$. Préciser les valeurs exclues de R.

1.3 Déterminer les singularités et les résidus de la fonction $g(z) = \frac{z+5}{(z-1)^2(z+3)}$.

1.4 (suite) Déterminer en fonction de $R > 0$ la valeur de $\int_{C_R} g(z)\,dz$.

1.5 Déterminer en fonction de $R > 0$ la valeur de $\int_{C_R} \frac{e^z+1}{(z+i\pi)^2}\,dz$.

2 Exercice

2.1 Soit $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{z^5-1}{z-1}$. Déterminer les racines de l'équation $P(z) = 0$. Soit w une racine de P. Montrer $P'(w) = 5\frac{w^4}{w-1}$ et $P'(w)^{-1} = \frac{1}{5}(w^2 - w)$. Vérifier l'identité $P(z) = (z^2 - z)(z^2 + 2z + 3) + 4z + 1$.

2.2 Soit w_1 et w_2 les deux racines de P qui sont dans le demi-plan supérieur. On note $A = \mathrm{Im}(w_1 + w_2)$. En utilisant les résultats de la question précédente prouver

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}\,dx = \frac{8\pi}{5}A$$

Les deux questions suivantes sont indépendantes des précédentes.

2.3 Soit $Q(z) = z^4 + 2z^2 + 1$. Montrer le développement limité $\frac{1}{Q(i+h)} = \frac{-1}{4h^2}(1 + ih + h\epsilon(h))$.

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{Q(x)}\,dx$ pour $k = 0$, $k = 1$, et $k = 2$.

2.4 Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,x}}{Q(x)}\,dx$.

TOURNEZ LA PAGE

3 Exercice

Les questions se suivent.

3.1 Quel est l'énoncé du Théorème de Rouché ?

3.2 Combien la fonction $f(z) = \frac{1}{5}z^{50} + z^{30} + \frac{1}{5}$ a-t-elle de zéros vérifiant $|z| \leq 1$? Montrer qu'ils sont tous simples. On les notera $w_1, \ldots, w_N$ et on pose

$$S = w_1^{11} + w_2^{11} + \cdots + w_N^{11}$$

3.3 Montrer (le cercle est parcouru dans le sens direct) :

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{10z^{50} + 30z^{30}}{\frac{1}{5}z^{50} + z^{30} + \frac{1}{5}} z^{10} dz$$

3.4 Déduire de la question précédente

$$S = -\frac{20}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-30}}{\frac{1}{5}z^{20} + 1 + \frac{1}{5}z^{-30}} z^{10}\, dz$$

Indication : écrire d'abord la fraction de la question précédente sous la forme $P + \frac{A}{B}$ avec $\deg(A) < \deg(B)$.

3.5 En déduire ensuite une preuve de

$$S = -\frac{20}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{|z|=1} (1 + \frac{1}{2}z^{-30}) \left(\frac{z^{20} + z^{-30}}{5} \right)^n z^{10}\, dz$$

3.6 On pose

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\frac{z^{20} + z^{-30}}{5} \right)^n z^{10}\, dz$$

$$v_n = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\frac{z^{20} + z^{-30}}{5} \right)^n z^{-20}\, dz$$

Expliquer pourquoi on a $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = 0$ et aussi $v_n = 0$. En déduire $S = 0$.

barême approximatif : 6+7+7