Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable : Jean-François Burnol

QUATRIÈME CHAPITRE

Table des matières

1 Formules de Cauchy (pour un disque)

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ et soit $r > 0$. On se donne une fonction f holomorphe sur le disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$. Nous connaissons déjà depuis le premier chapitre les formules suivantes (peut-être je les ai données pour $z_0 = 0$ seulement mais il suffit alors d'y remplacer $f(z)$ par $f(z_0+z)$) :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\, e^{it}) e^{-nit}\, dt$$

Ces formules découlent directement du fait que l'écriture

$$f(z_0 + r\, e^{it}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} r^m\, e^{mit} \ ,$$

peut être vue comme un développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique dérivable $t \mapsto f(z_0 + r\, e^{it})$: les coefficients sont donc donnés par les formules intégrales de Fourier. En fait ici nous avons une série absolument convergente puisque nous sommes à l'intérieur du disque ouvert de convergence et donc nous pouvons calculer $\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\, e^{it}) e^{-nit}\, dt$ en permutant la somme infinie et l'intégrale, puis on utilise le fait que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{mit} e^{-nit}\, dt$ vaut 1 pour $n = m$ et 0 sinon.

Prenons maintenant z avec $|z - z_0| < r$: $z = z_0 + se^{i\theta}$, $0 \leq s < r$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(z) = f(z_0 + s\, e^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} s^n\, e^{ni\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\, e^{it}) e^{-nit}\, dt \right) s^n\, e^{ni\theta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\, e^{it}) \left(\frac{s}{r}\right)^n e^{ni(\theta - t)}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f(z_0 + r\, e^{it}) \left(\frac{s}{r}\right)^n e^{ni(\theta - t)}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\, e^{it})}{1 - \frac{s}{r} e^{i(\theta - t)}}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\, e^{it})}{r\, e^{it} - s\, e^{i\theta}}\, r\, e^{it}\, dt \ , \end{aligned}$$

la permutation étant justifiée par la convergence normale (normale, c'est-à-dire absolument et indépendamment de $t \in [0, 2\pi]$; les autres, r, s, θ sont fixés ce ne sont pas des variables ici. Le point essentiel c'est que $0 \leq \frac{s}{r} < 1$). Utilisons maintenant les notations des intégrales le long de chemins. Notons $C_r(z_0)$ le cercle de rayon r centré en z_0 et parcouru dans le sens direct (on sait qu'une intégrale le long d'un chemin ne dépend pas de la paramétrisation mais dépend du sens de parcours : si on renverse le sens de parcours, on change l'intégrale en $-$ l'intégrale). Alors on obtient la **formule intégrale de Cauchy** (pour un disque) :

$$|z - z_0| < r \implies \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

On peut aussi écrire les intégrales pour $f^{(n)}(z_0)$ comme des intégrales le long de chemins :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw$$

Vous vérifierez que c'est bon !

On peut justifier cette formule d'une autre façon intéressante : à partir de la série entière $f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (w-z_0)^k$ on écrit

$$\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} = \sum_{0\le k<n} c_k (w-z_0)^{k-n-1} + \frac{c_n}{w-z_0} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (w-z_0)^{k-n-1}$$

Considérons maintenant la fonction

$$g(w) = \sum_{0\le k<n} c_k \frac{(w-z_0)^{k-n}}{k-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \frac{(w-z_0)^{k-n}}{k-n}$$

Les premiers termes sont une fraction rationnelle, et la série est une série entière qui a le même rayon de convergence que celle pour $f(z_0+h)$ (pourquoi ?). Elle est normalement convergente sur le disque fermé de centre z_0 et de rayon r. On peut donc la dériver terme à terme, et cela donne :

$$\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} = \frac{c_n}{w-z_0} + g'(w)$$

Or une chose fondamentale c'est que l'intégrale le long d'un lacet d'une dérivée donne toujours un résultat nul. Donc :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{c_n}{w-z_0}\, dw = c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Ici encore il faut insister sur le fait surprenant que le résultat ne dépend pas du rayon du cercle !

2 Formule de la moyenne et Principe du maximum

Un cas particulier des formules intégrales de Cauchy pour un disque est la **formule de la moyenne** : $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\, e^{it})\, dt$ lorsque f est holomorphe sur le disque fermé de centre z_0 et de rayon r. Les fonctions continues qui vérifient la formule de la moyenne sur les disques d'un ouvert U sont appelées **fonctions harmoniques** : les parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe sont harmoniques. Une fonction holomorphe est harmonique, mais une fonction harmonique n'est certainement pas en général holomorphe ($u = \mathrm{Re}(f)$ est harmonique mais comme elle ne prend que des valeurs réelles, elle ne peut être holomorphe que si elle (donc f aussi) est une constante, sur toute composante connexe de l'ouvert U). La définition précise que nous allons prendre pour la notion de fonction harmonique est la suivante : *f est continue et pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $\eta(z_0) > 0$ tel que le disque ouvert $|z - z_0| < \eta(z_0)$ est inclus dans Ω, et la formule de la moyenne $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,e^{it})\,dt$ vaut pour tout $r \in [0, \eta(z_0)[$.* Vous êtes invité(e) (après avoir étudié le Principe du Maximum) à lire l'annexe consacrée aux fonctions harmoniques.

Théorème 1 (Principe du Maximum) *Soit Ω un ouvert **borné**, et soit f une fonction continue sur $K = \overline{\Omega}$ (qui est donc compact), harmonique sur Ω. Notons $\partial\Omega = K \setminus \Omega$ le bord de Ω. Notons $M = \sup_K |f|$. On a $M < \infty$ car f est continue sur le compact K.*

1. *il existe un point z du bord $\partial\Omega$ avec $|f(z)| = M$.*
2. *supposons Ω **connexe**. Alors, sauf si f est constante sur Ω, on a l'inégalité stricte $|f(z)| < M$ pour tout $z \in \Omega$.*
3. *supposons que f est à valeurs réelles. Alors les points précédents valent avec $M^+ = \sup_K f$: on a aussi $M^+ = \sup_{\partial\Omega} f$ et si Ω est connexe, si il existe $z \in \Omega$ avec $f(z) = M^+$ alors f est constante. Idem avec $M^- = \inf_K f$.*

Remarque : les fonctions harmoniques vérifient une « unicité analytique » en un sens plus faible que les fonctions analytiques, à savoir que l'annulation sur un petit ouvert non vide implique l'annulation partout dans le grand ouvert connexe contenant le petit ouvert. L'exemple de la fonction harmonique $z \mapsto y$ qui est identiquement nulle sur l'axe réel sans être en fait la fonction nulle montre que l'unicité analytique au sens fort valable pour les fonctions holomorphes ne vaut pas pour les fonctions harmoniques.

En amphithéâtre j'ai donné une preuve du principe du maximum pour une fonction analytique (et Ω un disque). Ici je donne une preuve pour le cas général. Vous avez eu le temps de devenir des champion(ne)s de la Topologie, alors je ne prendrai pas de gants.

Le bord $\partial\Omega = K \setminus \Omega = K \cap (\mathbf{C} \setminus \Omega)$ est l'intersection d'un compact et d'un fermé, il est donc compact. Notons $N = \sup_{\partial\Omega} |f|$. On a $N \leq M$. Supposons $N < M$ et soit

$F = \{z \in K \mid |f(z)| = M\}$. L'ensemble (non vide!) F est fermé dans le compact K, il est donc compact. On peut donc prendre $z_0 \in F$ tel que $|z_0|$ soit maximal. On ne peut pas avoir $z_0 \in \partial\Omega$ car on a supposé $N < M$. Donc $z_0 \in \Omega$. Prenons $r > 0$ suffisamment petit de sorte que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r soit inclus dans Ω et que la formule de la moyenne vaille pour le cercle $|z - z_0| = r$. On a :

$$\begin{aligned} f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,e^{it})\,dt \implies \qquad & |f(z_0| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r\,e^{it})|\,dt \\ \implies\ & 0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|f(z_0 + r\,e^{it})| - |f(z_0)|)\,dt \end{aligned}$$

Maintenant lorsque l'on a une fonction continue $g(t)$ qui vérifie $g(t) \leq 0$ alors $\int_0^{2\pi} g(t)\,dt < 0$ sauf si g est identiquement nulle (pourquoi??). Donc c'est que pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $|f(z_0 + r\,e^{it})| = |f(z_0)|$. Donc tous les points du cercle centré en z_0 et de rayon r sont aussi dans l'ensemble F : mais parmi eux il y en a forcément un qui vérifie $|z| > |z_0|$. Donc on a obtenu une contradiction!

De cette façon on a prouvé que $N = M$: le maximum est atteint sur le bord. Supposons maintenant qu'il soit aussi atteint en un point intérieur z_0. Soit G l'ensemble de ces points de Ω en lesquels $|f|$ vaut M. Il est non vide par hypothèse. Il est fermé dans Ω car $|f|$ est une fonction continue. Je prouve qu'il est ouvert dans Ω : il suffit de reprendre exactement la méthode utilisée précédemment à partir de la formule de la moyenne pour voir que pour tout $r > 0$ suffisamment petit tous les points du cercle de rayon r centré en $z_0 \in G$ sont aussi dans G. Donc G contient un petit disque ouvert $D(z_0, r)$. Donc G est un ouvert. Maintenant, et seulement maintenant on invoque l'hypothèse que Ω est connexe. On en déduit que G qui n'est pas vide est égal à Ω tout entier. Donc $|f|$ est une constante $C = M$.

On n'a pas tout-à-fait terminé : on veut montrer que f elle-même est constante. On peut supposer $C > 0$, car si $C = 0$ alors f est identiquement nulle, donc constante. Prenons un $z_0 \in \Omega$ quelconque, et remplaçons f par la fonction $\frac{f}{f(z_0)}$ qui vérifie aussi la formule de la moyenne, de sorte que l'on peut supposer $f(z_0) = C = 1$. La fonction $\mathrm{Re}(f)$ hérite de f la propriété de la moyenne. Comme $|\mathrm{Re}(f)| \leq |f| = 1$, et $|\mathrm{Re}(f(z_0))| = 1$ la fonction $|\mathrm{Re}(f)|$ atteint son maximum en le point intérieur z_0. Donc $|\mathrm{Re}(f)|$ est constante. Donc $\mathrm{Re}(f)$ ne peut prendre comme valeur que -1 ou $+1$. Comme Ω est connexe, et que $\mathrm{Re}(f)$ est une fonction continue, elle est en fait constante, partout égale dans Ω à $+1$. On a ainsi à la fois $|f| = 1$ et $\mathrm{Re}(f) = 1$. Cela prouve que f est partout dans Ω égale à 1. Donc f est constante, ce qu'il fallait démontrer. Finalement lorsque f est à valeurs réelles, on traite le cas de M_+ en remplaçant f par $f + C$ avec $C > 0$ très grand. En effet $M_+ = \sup_K |f + C| - C$ pour $C \gg 1$. De même pour M_-, on considère $f - C$ avec $C \gg 1$ au lieu de f.

3 Théorème de Liouville

Théorème 2 *Soit f une fonction entière. Si elle est bornée elle est constante.*

Attention ! on peut construire (ce n'est pas évident) une fonction entière f qui est bornée sur chaque rayon $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < \infty$, θ fixé, mais qui n'est pas constante. Compte tenu du théorème de Liouville ci-dessus, bien que bornée sur chaque rayon elle ne l'est pas globalement. Donc la fonction qui à θ associe $\sup_{r>0} |f(re^{i\theta})| \in \mathbf{R}$ ne peut pas être une fonction continue de θ pour un tel f.

Pour la preuve du théorème de Liouville on peut par exemple considérer $g(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ qui est aussi une fonction entière et qui vérifie $|g(z)| \leq \frac{2M}{|z|}$ pour $z \neq 0$ et $M = \sup_{\mathbf{C}} |f|$. Soit $R > 0$ fixe et considérons les valeurs de $|g|$ sur le cercle de rayon $10^n R$. Elles sont majorées par $10^{-n} 2MR^{-1}$. Par le principe du maximum cette majoration vaut en particulier pour les valeurs de $|g|$ pour $|z| \leq R$. On fait tendre n vers l'infini et on obtient que g est identiquement nulle pour $|z| \leq R$. Mais R est arbitraire donc g est identiquement nulle (aussi justifiable par unicité analytique) donc f est constante égale à $f(0)$.

On peut aussi, comme je l'ai fait en amphithéâtre utiliser les formules intégrales de Cauchy pour $f^{(n)}(0)$ et les inégalités qui en découlent.

Une autre méthode encore est la suivante : on pose $g(z) = f(\frac{1}{z})$. Comme g est bornée, par le théorème de Riemann elle a en 0 une fausse singularité. Elle est donc aussi une fonction entière que l'on peut représenter sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$. Donc $f(z)$ vaut, pour $z \neq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n}$. Si l'on restreint à $z = e^{it}$ par exemple on obtient une série de Fourier ne comportant que des e^{-int}, $n \geq 0$. Or la série de Fourier d'une fonction est unique et le développement en série entière de f donne une autre série, elle ne comportant que des e^{int}, $n \geq 0$. Donc tous les coefficients autre que celui pour $n = 0$ sont nuls. Donc f est constante.

On peut facilement généraliser l'énoncé et la preuve pour obtenir : *si il existe $N \in \mathbf{N}$ et une constante C tels que $|f(z)| \leq C|z|^N$ pour $|z| \geq 1$ alors f est en fait un polynôme de degré au plus N.* On peut aussi affaiblir l'hypothèse en supposant une majoration en $C|z|^N$ non pas pour $|f|$ mais seulement pour $|\mathrm{Re}(f)|$ (ou seulement pour $|\mathrm{Im}(f)|$). Il est encore vrai que f est alors un polynôme de degré N au plus, mais cela est (nettement) moins facile à prouver.

Je ne reproduis pas ici mais rappelle juste pour mémoire que l'on peut utiliser le théorème de Liouville pour établir en deux lignes le *théorème fondamental de l'algèbre* (tout polynôme à coefficients réels ou complexes possède une racine complexe, et donc par récurrence sur le degré se factorise entièrement sur $\mathbf{C}$).

4 Séries de Laurent et Résidus

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ et $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$. Supposons la fonction f holomorphe sur la couronne $\mathcal{A}_{r_1,r_2} = \{z \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Alors on peut exactement comme dans le premier chapitre définir pour chaque $n \in \mathbf{Z}$ le coefficient de Fourier $c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})e^{-nit}\,dt$, et prouver qu'il existe une constante c_n telle que $c_n(r) = c_n r^n$: la preuve est la même exactement. La différence c'est qu'ici on ne peut plus prouver que $c_n = 0$ pour $n < 0$. Le théorème de Dirichlet de la théorie des séries de Fourier nous donne :

$$z \in \mathcal{A}_{r_1,r_2} \implies \qquad f(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{n=+N} c_n(z - z_0)^n$$

En fait choisissons $r_1' < r_2'$ tels que $r_1 < r_1' < r_2' < r_2$. La fonction f est continue donc bornée sur le compact $\overline{\mathcal{A}_{r_1',r_2'}}$, soit $M < \infty$ le supremum de $|f|$ sur cette couronne compacte. On a $|c_n(r)| \leq M$, donc $|c_n| \leq Mr^{-n}$, pour r tel que $r_1' \leq r \leq r_2'$. En particulier nous voyons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ converge pour tout z avec $|z - z_0| < r_2'$. Comme $r_2' < r_2$ est arbitraire on en déduit que le rayon de convergence de cette série est au moins égal à r_2. On peut donc améliorer la présentation en écrivant :

$$z \in \mathcal{A}_{r_1,r_2} \implies \qquad f(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{n=-1} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

On en déduit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}h^n$ converge lorsque $r_1 < |h|^{-1} < r_2$, c'est-à-dire lorsque $r_2^{-1} < |h| < r_1^{-1}$. Son rayon de convergence est donc au moins égal à r_1^{-1}, et donc la série $\sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n$ converge pour tous les z avec $|z-z_0| > r_1$, normalement lorsque $|z-z_0| \geq r_1' > r_1$. Finalement on écrira :

$$z \in \mathcal{A}_{r_1,r_2} \implies \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

avec convergence normale sur toute sous-couronne compacte de la couronne ouverte $\mathcal{A}_{r_1,r_2}$.

Réciproquement supposons que l'on puisse trouver des coefficients $d_n \in \mathbf{C}$ pour $n \in \mathbf{Z}$ tels que

$$z \in \mathcal{A}_{r_1,r_2} \implies \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} d_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n$ est donc au moins égal à r_2, et en recopiant notre argument précédent celui de la série $\sum_{n=0}^{\infty} d_{-n}h^n$ est au moins égal à r_1^{-1}. Donc les séries convergent normalement sur toute couronne compacte dans $\mathcal{A}_{r_1,r_2}$, donc on peut calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})e^{-nit}\,dt$ en permutant intégrale et séries, et on obtient $d_n = c_n$.

Finalement, supposons que l'on puisse trouver une fonction holomorphe g pour $|z-z_0| > r_1$ et une fonction holomorphe k pour $|z-z_0| < r_2$ telles que $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$ et

$$z \in \mathcal{A}_{r_1,r_2} \implies \qquad f(z) = g(z) + k(z)$$

On peut développer k en une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n$ de $z-z_0$ et g comme une série entière $\sum_{-\infty}^{n=-1} d_n(z-z_0)^n$ de $(z-z_0)^{-1}$. On vient de voir qu'alors en fait $d_n = c_n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Donc de telles g et k existent et sont uniques. Récapitulons :

Théorème 3 *Soit f une fonction holomorphe sur une couronne ouverte $\mathcal{A}_{r_1,r_2} = \{z \mid r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ (avec $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$). Il existe des coefficients $c_n \in \mathbf{C}$ pour $n \in \mathbf{Z}$ uniques tels que*

$$z \in \mathcal{A}_{r_1,r_2} \implies \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

*La série doublement infinie $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ est appelée **série de Laurent**. Elle est normalement convergente sur toute sous-couronne compacte. Les coefficients c_n sont donnés par les formules (de Cauchy) :*

$$\forall r \in]r_1, r_2[\qquad c_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})e^{-nit}\,dt$$

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *est au moins* r_2 *et la série* $\sum_{-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n$ *converge en fait pour tout* z *avec* $|z-z_0| > r_1$*. Il existe une unique façon d'écrire* f *sous la forme* $g+k$ *avec* k *holomorphe sur le disque* $D(z_0, r_2)$ *et* g *holomorphe pour* $|z-z_0| > r_1$ *et* $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$*, cette unique façon consiste à prendre* $k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *et* $g(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n$*.*

Un cas particulièrement intéressant est obtenu lorsque $r_1 = 0$. C'est le cas d'une fonction holomorphe sur un disque épointé $D^*(z_0, r)$ (avec $r = r_2$), autrement dit d'une fonction holomorphe présentant en z_0 une singularité isolée. Alors, la partie $g(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n$ est appelée **partie principale** ou **partie singulière** de la série de Laurent de f en z_0. Elle a la propriété frappante de converger pour tout $z \in \mathbf{C}$, $z \neq z_0$, autrement dit la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}h^n = g(\frac{1}{h} + z_0)$ a un rayon de convergence infini (avec nos notations précédentes $r_1 = 0$ donc $r_1^{-1} = +\infty$).

On peut à ce stade reformuler la notion de pôle : si f présente en z_0 une singularité isolée, cette singularité est fausse ou est un pôle si et seulement si la partie singulière de la série de Laurent de f n'a qu'un nombre fini (ou nul) de termes non nuls. Une singularité essentielle est une singularité telle que la partie singulière de la série de Laurent a un nombre infini de coefficients non nuls.

Définition 1 *Soit* f *présentant en* z_0 *une singularité isolée. Le coefficient* c_{-1} *de sa série de Laurent en* z_0 *est appelé* ***résidu*** *de* f *en* z_0*, et est noté* $\mathrm{Rés}(f, z_0)$ *ou* $\mathrm{Rés}_f(z_0)$*, ou encore parfois* $\mathrm{Rés}_{z_0}(f)$*. On peut le calculer par la formule, valable pour* $r > 0$ *suffisamment petit de sorte que* f *est holomorphe sur* $D^*(z_0, r')$*,* $r' > r$ *:*

$$\mathrm{Rés}(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) r\, e^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} f(z)\, dz$$

Lorsque f *présente en* z_0 *un pôle simple on a :*

$$\mathrm{Rés}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$

Lorsque f *présente en* z_0 *un pôle d'ordre au plus* N *on a :*

$$\mathrm{Rés}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1} (z-z_0)^N f(z)$$

Les formules pour le résidu dans le cas d'un pôle sont laissées en exercice. Le résidu ne dépend que de la partie singulière g de f en z_0 et on peut donc aussi le calculer par la formule $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} g(z)\,dz$ (d'ailleurs comme $f - g$ a une fausse singularité en z_0 elle est holomorphe sur $D(z_0, r')$, donc admet une primitive sur ce disque ouvert donc $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)}(f(z) - g(z))\,dz = 0$).

Soit $g(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} c_n(z - z_0)^n$ la partie singulière. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}h^n$ a un rayon de convergence infini, donc aussi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_{-n}}{1-n}h^{n-1}$ donc $g_1(z) = \sum_{-\infty}^{n=-2} \frac{c_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ converge pour tout $z \neq z_0$, normalement donc uniformément pour $|z - z_0| > \epsilon > 0$. On peut donc dériver terme à terme et on obtient $g_1'(z) = \sum_{-\infty}^{n=-2} c_n(z - z_0)^n$. Ainsi on a la décomposition :

$$z \neq z_0 \implies \qquad g(z) = \frac{\text{Rés}(f, z_0)}{z - z_0} + g_1'(z)$$

Nous en déduisons le théorème suivant qui nous sera bientôt utile :

Théorème 4 *Soit f une fonction holomorphe présentant une singularité isolée en z_0. Soit g la partie singulière du développement en série de Laurent de f en z_0. C'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ (qui tend vers zéro pour $|z - z_0| \to \infty$). Soit γ un lacet quelconque dans $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$. On a :*

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \text{Rés}(f, z_0)\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz$$

En effet la dérivée $g_1'(z)$ donne une contribution nulle à l'intégrale le long du lacet γ. Dans le cas particulier d'un lacet égal à un cercle centré en z_0 et parcouru dans le sens direct on retrouve la formule $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} g(z)\,dz = \text{Rés}(f, z_0)$ (si l'on remplace g par f dans cette intégrale on ne peut l'utiliser que pour des r tels que f est holomorphe pour $0 < |z - z_0| \leq r$, tandis qu'avec g la formule vaut pour tout $r \in]0, \infty[$, puisque g est garantie holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$). On pourrait penser que pour $r \to +\infty$ l'intégrale devrait tendre vers zéro puisque g tend vers zéro, mais cela serait oublier que le dz, pour $z = z_0 + re^{i\theta}$, est $ire^{i\theta}d\theta$, et qu'il y a là-dedans un r qui tend vers l'infini.

5 Invariance par homotopie

Nous en arrivons maintenant aux théorèmes majeurs de ce cours d'Analyse Complexe. Soit U un ouvert dans $\mathbf{C}$ et soit γ_1 et γ_2 deux chemins dans U ayant les mêmes extrémités z_1 et z_2. Pour le moment nos chemins sont seulement supposés continus : lorsque nous les utiliserons pour des intégrales nous les supposerons en plus C^1 par morceaux (en fait le théorème principal de cette section a pour conséquence que lorsque f est une fonction holomorphe il est possible de définir raisonnablement $\int_\gamma f(z)\,dz$ pour tout chemin continu, en particulier sans hypothèse d'existence de tangentes, mais nous n'irons pas dans cette direction car elle n'est pas essentielle pour ce Cours). Nous allons définir une relation d'équivalence sur les chemins ayant des extrémités fixées, relation d'équivalence qui sera compatible aux reparamétrisations (continues) qui ne changent pas le sens de parcours. Donc, pour me simplifier la vie je donne une définition qui a l'avantage d'incorporer immédiatement cette compatibilité, évidemment c'est une arnaque puisque si je voulais ensuite vraiment montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence il me faudrait justifier un certain petit détail [1], et comme je suis fatigué, je veux m'épargner cette peine. Bref, je me comprends. Notre définition est donc la suivante : nous dirons que γ_1 et γ_2 sont **homotopes**, dans U, à extrémités z_1 et z_2 fixées, si on peut trouver un reparamétrage de γ_1 et un de γ_2 de sorte qu'ils soient en fait définis sur $[0,1]$ vers U, et si il existe alors une fonction continue $H : [0,1]\times[0,1] \to \mathbf{C}$ avec $H(t,0) = \gamma_1(t)$, $H(t,1) = \gamma_2(t)$ et pour tout $u \in [0,1]$ on a $H(0,u) = z_1$ et $H(1,u) = z_2$. Bon, voilà, j'affirme qu'il s'agit bien là d'une relation d'équivalence. J'affirme et je vous laisse prouver. Voici maintenant un théorème fantastique :

Théorème 5 (Cauchy-Gauss) *Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, z_1 et z_2 deux points de U, γ_1 et γ_2 deux chemins continus C^1 par morceaux dans U ayant tous deux z_1 comme point de départ et z_2 comme point d'arrivée, et qui de plus sont homotopes dans U avec les extrémités fixées en z_1 et z_2. Alors, pour toute fonction f holomorphe sur U on a*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Pour la preuve, si U était un ouvert étoilé, ou même seulement si l'homotopie H prenait ses valeurs dans un sous-ouvert $V \subset U$ étoilé, alors nous pourrions affirmer que f a une

1. je vous laisse identifier lequel.

primitive, et nous saurions alors que son intégrale le long d'un chemin ne dépend que des extrémités de ce chemin. On n'aurait même pas besoin de supposer γ_1 et γ_2 homotopes. Le problème c'est lorsqu'on ne peut pas trouver de tel ouvert V contenant $H([0,1]\times[0,1])$ et tel que f admette une primitive sur V (si f est la fonction $\frac{1}{z}$ et si γ_1 est le cercle unité parcouru dans le sens direct c'est le cas).

Pour se ramener à la situation locale, je commence par remarquer que $K = H([0,1]\times[0,1])$ est un compact, comme image par une application continue d'un compact. Je prétends qu'il existe $r>0$ tel que $z\in K, w\notin U \implies |w-z|>r$. Sinon on aurait une suite (z_n) de K et une suite w_n de $\mathbf{C}\setminus U$ avec $|z_n-w_n|\to 0$. Comme K est compact, quitte à passer à une sous suite je peux supposer que $z=\lim z_n$ existe. J'ai alors aussi $|z-w_n|\to 0$. Mais c'est absurde car z est dans K donc dans l'ouvert U donc U contient un petit disque ouvert non vide centré en z, tandis que les w_n eux sont dans le complémentaire de U par hypothèse.

Donc on a notre $r>0$, et tout nombre complexe qui est à distance au plus r d'un point de K est en fait dans l'ouvert U. La fonction H est uniformément continue sur le compact $[0,1]\times[0,1]$ donc on peut trouver $N\geq 1$ de sorte que $|t-t'|\leq\frac{1}{N}$ et $|u-u'|\leq\frac{1}{N}$ impliquent $|H(t,u)-H(t',u')|<r$. Considérons les points $Q_{i,j}=(\frac{i}{N},\frac{j}{N})$ ($0\leq i\leq N$, $0\leq j\leq N$) du carré $[0,1]\times[0,1]$ et leurs images $P_{i,j}$ par H dans le plan complexe. Si l'on fixe un couple d'indice (i,j) ($0\leq i,j<N$) les quatre points $P_{i',j'}$ avec $i'\in\{i,i+1\}$, $j'\in\{j,j+1\}$ sont dans le disque ouvert de rayon $r>0$, centré en $P_{i,j}$, et ce disque ouvert est entièrement inclus dans l'ouvert U sur lequel la fonction f est holomorphe. La ligne brisée $L_{i,j}=[P_{i,j},P_{i,j+1},P_{i+1,j+1},P_{i+1,j},P_{i,j}]$ forme un lacet entièrement inclus dans le petit disque (tout disque est convexe). Sur ce disque la fonction holomorphe f admet une primitive, donc :

$$\int_{L_{i,j}} f(z)\,dz = 0$$

Faisons la somme de toutes ces identités pour $0\leq i<N$, $0\leq j<N$. Chaque intégrale est la somme de quatre intégrales sur quatre segments. Chaque segment, sauf les segments $[P_{0,j},P_{0,j+1}]$, $[P_{i,N},P_{i+1,N}]$, $[P_{N,j+1},P_{N,j}]$, $[P_{i+1,0},P_{i,0}]$ contribue deux fois mais avec des sens de parcours opposés. Donc la somme des N^2 intégrales portant sur les $4N^2$ segments est en fait une somme sur les $N+N+N+N=4N$ segments provenant du bord du carré $[0,1]\times[0,1]$. Parmi eux, notons qu'en fait les points $P_{0,j}$ coïncident tous avec z_1 et les points

$P_{N,j}$ avec z_2. Il ne reste plus que les segments $[P_{i,N}, P_{i+1,N}]$ et $[P_{i+1,0}, P_{i,0}]$. Pour les premiers nous les remplaçons par le chemin $\gamma_2(t)$ pour $\frac{i}{N} \le t \le \frac{i+1}{N}$ ce qui est licite puisque le segment comme ce morceau de chemin ont les mêmes extrémités et sont totalement inclus dans un disque sur lequel f est holomorphe. Pour les segments $[P_{i+1,0}, P_{i,0}]$ nous les remplaçons par le chemin γ_1 parcouru dans le sens contraire de $t = \frac{i+1}{N}$ à $t = \frac{i}{N}$. La somme de toutes nos intégrales sur les $4N^2$ segments est donc exactement égale à $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$. Par ailleurs nous savons cette somme égale à zéro. Le théorème d'invariance par homotopie de Cauchy-Gauss est démontré.

Remarque technique : bien que γ_1 et γ_2 soient supposés C^1 par morceaux, l'homotopie H elle est seulement supposée continue.

Note : la notion d'homotopie a été introduite formellement par Poincaré, plus de cinquante ans après les travaux de Cauchy. Plus implicitement elle est déjà très présente chez Riemann et aussi dans les travaux de Gauss sur l'électricité et le magnétisme.

Nous aurons aussi souvent besoin d'une variante : l'homotopie des lacets, plutôt que l'homotopie à extrémités fixes des chemins. On dira que deux lacets γ_1 et γ_2 à valeurs dans U, tous deux paramétrés par $[0,1]$, sont homotopes (dans U ! évidemment si on change U on change la notion d'homotopie, plus U est grand plus il est facile de devenir homotopes) si l'on peut trouver une application continue $H : [0,1]\times[0,1] \to U$ avec $H(t,0) = \gamma_1(t)$, $H(t,1) = \gamma_2(t)$, et $H(1,u) = H(0,u)$ pour tout $u \in [0,1]$ (autrement dit pour chaque u, $t \mapsto H(t,u)$ est un lacet à valeurs dans U).

Théorème 6 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, γ_1 et γ_2 deux lacets continus C^1 par morceaux dans U et qui de plus sont homotopes dans U au sens de l'homotopie des lacets. Alors, pour toute fonction f holomorphe sur U on a*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

En particulier on a

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

pour tout lacet dans U qui est homotopiquement trivial dans U.

On dit qu'un lacet est homotopiquement trivial si il est homotope à un lacet constant, autrement dit si on peut le déformer continûment tout en restant dans U et en faire un lacet constamment égal au même point de U. Supposons que γ_1 et γ_2 soient deux chemins allant de z_1 vers z_2. Paramétrons γ_1 et γ_2 par $[0, 1]$ et considérons le lacet γ_3 défini par les formules $\gamma_3(t) = \gamma_1(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $\gamma_3(t) = \gamma_2(2 - t)$ pour $1 \leq t \leq 2$. Alors γ_3 est un lacet que nous noterons $\gamma_1\gamma_2^{(-1)}$: d'abord γ_1 de z_1 à z_2 puis γ_2 dans le sens contraire de z_2 à z_1. Exercice pour les hyper-motivés : γ_3 est un lacet homotopiquement trivial dans U si et seulement si γ_1 et γ_2 sont homotopes à extrémités fixes dans U. Cela montre le lien entre les deux versions du théorème d'invariance par homotopie (car $\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$). En ce qui concerne la preuve de la version pour les lacets, elle est quasi-identique à celle pour les chemins à extrémités fixées, donc je vous laisse le soin de la rédiger.

J'en viens maintenant à un point assez subtil. Supposons que le lacet γ dans U ait la propriété

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

pour toute fonction holomorphe f sur l'ouvert U. Est-il exact que γ est homotopiquement trivial ? La réponse est « non, pas forcément ». On peut construire un exemple de la manière suivante : soit γ_1 le lacet partant de zéro et parcourant le cercle autour de $+1$ dans le sens direct, et soit γ_2 le lacet partant de zéro et parcourant le cercle autour de -1 dans le sens direct. Formons le lacet $\Gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{(-1)}\gamma_2^{(-1)}$, c'est-à-dire d'abord γ_1 puis γ_2 puis γ_1 dans le sens rétrograde puis γ_2 dans le sens rétrograde. Alors, pour toute fonction f holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbf{C} \setminus \{-1, +1\}$ on a :

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

Mais, on peut (bonne chance...) prouver que Γ n'est pas homotopiquement trivial dans U.

En fait Γ a une autre propriété : il est **homologiquement** trivial. Après mûre réflexion, j'ai décidé de ne pas me lancer dans la description (précise) de l'homologie. D'abord, vous m'en voulez déjà assez à cause de mes histoires d'homotopie, ensuite, le faire sérieusement en amphithéâtre, à ce stade, même en faisant des grands moulinets avec ses bras tout en criant très fort me paraît chose quasi-impossible, enfin, le rédiger ici vraiment complètement serait un peu longuet si on voulait le faire avec tous les détails. Je dirai simplement que pour discuter de l'homologie il faut, au lieu de lacets, plutôt parler de 1-chaînes qui sont des objets de dimension 1 (nous les avons déjà définies dans un chapitre précédent), introduire la notion de 2-chaînes qui sont des objets de dimension 2, expliquer que le bord d'une 2-chaîne est une 1-chaîne (qui a la propriété que son bord à elle est nul), et définir les 1-chaînes homologiquement triviales comme étant les bords des 2-chaînes. Voilà.

Il se trouve que, par chance, il y a une caractérisation simple des 1-chaînes Γ (ou des lacets) qui sont homologiquement triviales dans U : cela équivaut à ce que Γ soit un 1-cycle (c'est-à-dire de « bord nul »[2] ; par exemple Γ est un lacet) et $\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = 0$ pour tout z_0 du complémentaire de U dans $\mathbf{C}$. Autrement dit on a le théorème suivant :

Théorème 7 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{C}$ et Γ un 1-cycle dans U, par exemple un lacet. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Γ est homologiquement trivial,*
2. *pour tout $z_0 \notin U$ on a $\int_\Gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz = 0$,*
3. *pour toute fonction holomorphe f sur U on a $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$.*

Une démonstration, assez délicate, de $2 \implies 3$ est décrite dans une annexe ($3 \implies 2$ est trivial). Comme je l'ai déjà dit, après mûre réflexion, j'ai décidé de ne pas trop m'attarder sur les notions de topologie algébrique en jeu dans l'homologie. Sachez cependant que si je l'avais fait alors les éléments constitutifs de la la démonstration de $2 \implies 3$ en annexe pourraient être recyclés (sic) pour $1 \Leftrightarrow 2$, c'est-à-dire pour montrer qu'un cycle dans U ne tournant pas autour du complémentaire de U peut être réalisé comme le bord d'une 2-chaîne dans U, et réciproquement.[3] Dans certains livres d'analyse complexe on définit directement le fait d'être homologiquement trivial par le point 2, ici je n'ai pas voulu dissimuler que la véritable définition de « homologiquement trivial » est « être le bord de quelque chose », une définition donc qui n'a besoin de rien savoir de l'analyse complexe et des intégrales le long de chemins. **Mais dorénavant lorsque nous dirons que Γ est homologiquement trivial, nous voudrons dire qu'il vérifie la propriété 2. du théorème ci-dessus.**

2. une discussion plus détaillée des 1-cycles est proposée plus loin.
3. dans la section suivante on explique pourquoi la condition $\int_\Gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz = 0$ signifie « Gamma fait un nombre total de tours autour de z_0 égal à zéro ».

6 Indices de lacets, variation de l'argument

Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ un chemin C^1 par morceaux. allant de z_1 à z_2 et soit z_0 un point par lequel ne passe pas γ. Posons :

$$F(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - z_0}\, du$$

de sorte que $F(a) = 0$ et $F(b) = \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$. La dérivée[4] de $(\gamma(t) - z_0)\exp(-F(t))$ vaut $\gamma'(t)\exp(-F(t)) + (\gamma(t) - z_0)(-\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0})\exp(-F(t))$ ce qui donne exactement 0. Donc $(\gamma(t) - z_0)\exp(-F(t))$ est constante. On a donc :

$$\forall t \in [a, b] \qquad e^{F(t)} = \frac{\gamma(t) - z_0}{z_1 - z_0}$$

Si l'on écrit en coordonnées polaires $z_1 - z_0 = r_1 e^{i\theta_1}$, $\gamma(t) - z_0 = r(t)e^{i\theta(t)}$, $z_2 - z_0 = r_2 e^{i\theta_2}$, on obtient :

$$\forall t \in [a, b] \qquad \mathrm{Re}(F(t)) = \log \frac{r(t)}{r_1} \qquad \text{et} \quad \mathrm{Im}(F(t)) \equiv \theta(t) - \theta_1 \mod 2\pi$$

Cela justifie en particulier le nom de **variation de l'argument** qui est donnée à $\mathrm{Im}(F(t))$: notez bien que $F(t)$ est une fonction continue de t, et donc en **définissant** $\theta(t)$ par $\theta_1 + \mathrm{Im}(F(t))$ on obtient une fonction **continue** de t donnant l'argument de $\gamma(t) - z_0$. Pour $t = b$ la valeur $\theta_1 + \mathrm{Im}(F(b))$ sera égale à θ_2 modulo 2π, mais comme c'est $\theta_1 + \mathrm{Im}(F(b))$ que l'on obtient en partant de θ_1 en $t = a$ et en imposant la continuité de l'argument jusqu'à $t = b$, il vaut mieux remplacer θ_2 par cette valeur. On est donc amené à la définition suivante :

Définition 2 *Soit γ un chemin C^1 par morceaux. allant de z_1 à z_2 et soit z_0 un point par lequel ne passe pas γ. La **variation de l'argument** de $z - z_0$ le long de γ est notée $\Delta_\gamma \arg(z - z_0)$ et est définie par la formule :*

$$\Delta_\gamma \arg(z - z_0) = \mathrm{Im}\left(\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}\right)$$

Prenons maintenant le cas particulier où $z_1 = z_2$, c'est-à-dire γ est un lacet. Alors avec les mêmes notations on a $e^{F(b)} = 1$ donc $F(b) \in 2\pi i\mathbf{Z}$. La variation de $\arg(z - z_0)$ le long du lacet γ est donc un multiple entier de 2π. Cet entier s'appelle « indice du lacet γ par rapport à z_0 » (ou parfois indice du point z_0 par rapport à γ).

4. comme d'habitude les t en nombre fini où on autorise à γ' d'avoir une discontinuité ne posent pas de problème essentiel.

Définition 3 *Soit γ un lacet C^1 par morceaux ne passant pas par z_0. L'indice du lacet γ par rapport à z_0 est un nombre entier relatif qui est noté* $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ *(ou* $\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma)$*, ou* $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$*, ou* $\mathrm{Ind}(z_0, \gamma)$ *etc...). Il est défini par la formule :*

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg(z - z_0)$$

On l'appelle aussi « nombre de tours fait par γ autour de z_0 ». Il est invariant par déformation continue de γ et/ou de z_0, ***tant que z_0 ne traverse pas le support de*** *γ.*

Je vous renvoie à la feuille de travail pour d'autres notions relatives à ces indices, en particulier une méthode simple de calcul. On peut définir l'indice ou la variation de l'argument purement topologiquement, sans avoir recours aux intégrales le long de chemins, donc en supposant seulement γ continu (les vétérans de l'année dernière vous renseigneront), mais je laisse tomber cela ici. En ce qui concerne l'invariance par déformation continue, c'est une conséquence immédiate du théorème d'invariance par homotopie pour les intégrales de fonctions holomorphes le long de chemins.

Soit Γ une 1-chaîne. Nous avons défini une 1-chaîne comme une somme formelle $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \cdots + c_k\gamma_k$ de chemins[5]. De même nous définissons une 0-chaîne comme une combinaison de points $a_1P_1 + \cdots + a_mP_m$. Le bord de γ est défini par la formule $P - Q$ avec P le point d'arrivée et Q le point de départ de γ[6]. Le bord de la 1-chaîne Γ est obtenu alors par linéarité. Si ce bord est nul on dit que Γ est un 1-cycle. On se convainc que Γ est un cycle si et seulement si on peut réécrire Γ sous la forme $d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \cdots + d_m\delta_m$ avec les δ_j des lacets. De plus si les c_i sont des nombres entiers, on peut re-écrire Γ sous cette forme avec les d_j aussi entiers.

Preuve : on peut supposer les c_j réels car si $\sum_j c_j\gamma_j$ est un cycle c'est aussi le cas de $\sum_j \mathrm{Re}(c_j)\gamma_j$. Jetons les γ_i avec $c_i = 0$, puis imposons $\forall i\ c_i > 0$ en renversant éventuellement le sens de parcours de γ_i. Soit P, P', P'', ..., les différents points de départ ou d'arrivée des γ_i dans un ordre quelconque. Comme Γ est un cycle, le point $Q_1 = P$ ne peut pas être que le point d'arrivée de chemins γ_i : il est le point de départ d'au moins l'un d'entre eux. Choisissons-en un et soit Q_2 son point d'arrivée. Ce point Q_2 est point de départ, etc..., d'où une suite Q_1, Q_2, Q_3, ...Comme il n'y a qu'un nombre fini de points, il arrive un moment où le nouveau Q est déjà dans la liste (pas forcément $= Q_1$). De cette manière on forme un lacet δ_1 en mettant à la file certains des chemins composant le cycle Γ. Parmi les c_j attachés à ces chemins composant le lacet il y en un qui est plus petit que les autres, notons

5. en fait : de classes d'équivalence pour la reparamétrisation, et avec la convention $-\gamma = \gamma^{(-1)}$. De plus si un chemin γ est obtenu en suivant d'abord γ_1 puis γ_2 alors en tant que chaîne on a la relation $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

6. $P - Q$ est une expression formelle sans aucun rapport avec la soustraction de nombres complexes

le d_1. Alors $\Gamma - d_1\delta_1$ est à nouveau un cycle, et il est composé de moins de chemins que Γ. Donc en itérant un nombre fini de fois on aboutit finalement à la forme voulue $\Gamma = d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \cdots + d_m\delta_m$. De plus si les c_j sont tous entiers, les d_i le seront tous aussi, car par construction les d_i sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des c_j.

On posera, lorsque Γ est un cycle :

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Si l'on a une écriture $\Gamma = d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \cdots + d_m\delta_m$ avec les δ_j des **lacets** alors :

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, z_0) = d_1\mathrm{Ind}(\delta_1, z_0) + \cdots + d_m\mathrm{Ind}(\delta_m, z_0)$$

L'indice d'un cycle appartient donc au $\mathbf{Z}$-module[7] engendré par les coefficients c_i de toute expression de Γ sous la forme $\sum_i c_i\gamma_i$ (puisque les d_j appartiennent à ce $\mathbf{Z}$-module et que les indices des lacets sont toujours des nombres entiers relatifs). En particulier, les 1-chaînes à coefficients entiers qui sont des cycles ont des indices entiers (positifs ou négatifs) par rapport à tout point z_0 (qui n'est pas dans le support de la chaîne).

7 Le théorème des résidus avec indices

Avec tout le travail accompli, les choses maintenant viennent très vite.

Théorème 8 (Théorème des résidus) *Soit U un ouvert, z_1, ..., z_N, un nombre fini de points (distincts) dans U et soit f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$. Soit Γ un **lacet homotopiquement trivial** dans U ou, plus généralement, un 1-**cycle homologiquement trivial** dans U, ne passant par aucun des points z_1, ..., z_N. On a alors la formule suivante :*

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{1\leq j\leq N} \mathrm{Ind}(\Gamma, z_j)\mathrm{Rés}(f, z_j)}$$

Remarque : cette formule montre bien l'invariance par déformation. Lorsque l'on déforme Γ les indices ne changent pas, et évidemment les résidus ne changent pas non plus, puisqu'ils ne dépendent que de la fonction f.

7. « $\mathbf{Z}$-module » = groupe commutatif (avec sa loi de groupe notée additivement) !

Remarque : presque tout le temps on utilise ce théorème lorsque les singularités sont des pôles, c'est-à-dire lorsque f est une fonction méromorphe sur U. Mais le théorème vaut aussi lorsqu'il y a des singularités essentielles.

Remarque : on peut autoriser un nombre infini de singularités, à condition que ce soit toutes des singularités isolées. On sait alors qu'elles ne peuvent (par définition) pas avoir de point d'accumulation dans U. On peut prouver alors que l'indice de Γ par rapport à une singularité est nul, sauf pour au plus un nombre fini d'entre elles : la formule est valable, et elle est une somme finie, en fait.

Preuve du théorème : soit $g_j(z)$ la partie singulière du développement en série de Laurent de f en z_j. On sait que g_j est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{z_j\}$. Considérons la fonction $F = f - g_1 - g_2 - \cdots - g_N$. Cette fonction a en les z_j des fausses singularités. Elle est donc holomorphe sur U. On sait d'après le Théorème d'invariance par homotopie de Cauchy-Gauss que $\int_\Gamma F(z)\,dz = 0$ lorsque Γ est un lacet homotopiquement trivial. On prouve en annexe que cela vaut aussi pour Γ un 1-cycle « homologiquement trivial », au sens de vérifier $\mathrm{Ind}(\Gamma, P) = 0$ pour tous les points P du complémentaire de U dans $\mathbf{C}$. Donc :

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{1\leq j\leq N} \int_\Gamma g_j(z)\,dz$$

Lorsque Γ est un lacet ne passant pas par z_j on a prouvé la formule :

$$\int_\Gamma g_j(z)\,dz = \mathrm{Rés}(f, z_j) \int_\Gamma \frac{1}{z - z_j}\,dz$$

Par linéarité cela vaut non seulement pour les lacets mais aussi pour les 1-cycles. De plus, l'indice est défini par la formule, pour les lacets comme pour les 1-cycles :

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z - z_j}\,dz$$

En combinant tous ces éléments on a la preuve du théorème des résidus avec indices.

8 Le théorème des résidus en version classique

La version classique est un cas particulier de notre théorème général, mais elle est plus difficile à prouver ! Comment cela peut-il être possible ? J'essaie d'expliquer.

Une **courbe de Jordan**, aussi appelée « courbe fermée simple », est l'image d'un **lacet continu** $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ **sans intersection**, c'est-à-dire, de sorte que pour $a \leq t < u < b$ on a $\gamma(t) \neq \gamma(u)$. Le **théorème de Jordan**[8] , qui n'est pas du tout facile à prouver, exprime quelque chose qui est intuitivement évident[9] : le complémentaire de $\gamma([a, b])$ dans $\mathbf{C}$ (c'est un ouvert bien sûr) a exactement deux composantes connexes. L'une n'est pas bornée, l'autre, notons-là Ω, est bornée. La courbe γ a l'indice nul par rapport aux points de la composante non-bornée (forcément car cet indice ne dépend pas du point P et si l'on fait tendre le point P vers l'infini, l'intégrale donnant l'indice tend vers zéro, ou plus simplement si P est suffisamment loin, le contour sera entièrement inclus dans un demi-plan ne contenant pas P, et donc on pourra déformer le contour en un point sans traverser P). La courbe de Jordan γ a soit l'indice $+1$ par rapport aux points de Ω, on dit alors qu'elle est parcourue dans le sens direct, soit l'indice -1, on dit alors qu'elle est parcourue dans le sens rétrograde. De plus γ est homotopiquement trivial par une homotopie qui prend ses valeurs dans $\overline{\Omega} = \Omega \cup \gamma([a, b])$.[10] Tout cela est franchement difficile lorsque l'on suppose la courbe seulement continue ; c'est nettement plus facile lorsqu'on la suppose C^1 par morceaux, mais une explication totalement détaillée n'est pas simple à rédiger.

Dans la littérature classique on trouve l'appellation « contour de Jordan » pour désigner une courbe de Jordan, C^1 par morceaux, parcourue dans le sens direct[11] (cela signifie que le domaine intérieur Ω est toujours sur la gauche des pieds d'un petit bonhomme qui parcourerait ce contour). À chaque fois que l'on a affaire à un contour concret, en général formé d'arcs de cercle, de segments, ou d'autres formes géométriques simples, le fait que ce contour ait les propriétés que je viens d'énoncer comme valables pour toutes les courbes

8. la première preuve complète en a été donnée par Veblen en 1905.

9. Enfin, qui est censé être intuitivement évident, mais lorsque l'on enseigne les mathématiques on se rend compte rapidement qu'il n'est pas toujours intuitivement évident de déterminer ce qui est intuitivement évident.

10. Cela fait appel à un renforcement du théorème de Jordan-Veblen qui fut démontré par Schönflies en 1906.

11. plus tard, nous verrons que souvent on utilise ces contours finis comme étapes intermédiaires pour évaluer une intégrale sur un contour infini, comme l'axe réel par exemple.

de Jordan ne fait aucun doute : si l'on devait vraiment par exemple donner une formule réalisant une homotopie du contour en un point (balayant le domaine intérieur), on sait que cela serait juste un peu fastidieux d'écrire les formules, mais on ne doute pas que l'on pourrait le faire. Ou alors on peut introduire une ligne courbe supplémentaire allant d'un point du contour à un autre, de sorte que notre contour initial devient la superposition de deux contours plus simples, la ligne courbe étant parcourue pour l'un dans un sens, pour l'autre dans le sens contraire, la valeur de $\int_\gamma f(z)\,dz$ pourra s'obtenir en additionnant les intégrales sur les deux contours plus petits, et on peut répéter jusqu'à se ramener à des contours étoilés par rapport à un point intérieur par exemple. Une fois que l'on a un contour étoilé, les questions d'homotopie ou d'indices sont triviales. Ou alors on se ramène à des contours qui, après avoir fait une rotation et une translation du système de coordonnées, entourent des domaines du type $a < x < b$, $0 < y < f(x)$, pour une fonction C^1 f. Pour de tels contours on peut montrer que l'intégrale d'une fonction holomorphe est nulle en la transformant en une intégrale double (c'est la technique de la formule de Green-Riemann ; je pense y revenir plus tard. En attendant demandez aux vétérans de l'année dernière.) Donc cela donne une technique de démonstration du théorème des résidus un peu différente de celle que nous avons suivie ici.

Ou encore on introduit un très fin quadrillage du plan et on essaye de remplacer le contour par un autre très proche ne comportant que des segments horizontaux et verticaux : en fait on peut démontrer le théorème de Jordan en raffinant ce genre de technique, et on peut aussi traiter des questions d'homologie que j'évoquais sans détails précédemment.

Encore une autre perspective est non plus de partir d'un contour, mais de partir d'un ouvert connexe Ω et d'imposer des conditions à son bord topologique $\partial\Omega$ pour pouvoir le considérer comme le support d'un lacet, le plus souvent en fait de plusieurs lacets, dont un entoure tous les autres, le long desquels on peut intégrer des fonctions. On aimera alors aussi que la formule de Stokes (théorème de Green-Riemann, formule de la divergence de Gauss, ou autre appellation) qui permet de transformer une intégrale curviligne en intégrale de surface soit valable.

Bref, tout cela pour dire qu'il y a en fait de multiples aspects, topologiques, algébriques, géométriques, analytiques, etc..., sous lesquels on peut sans cesse approfondir sa compréhension du théorème des résidus.[12] Nous nous contenterons donc modestement de :

Théorème 9 (Théorème des résidus, version classique A)
Soit γ un contour de Jordan, C^1 par morceaux, de domaine intérieur Ω. Soit f une fonction sur un ouvert U contenant γ et Ω, holomorphe sauf en un nombre fini de singularités isolées $z_1, \ldots, z_n$, toutes situées dans Ω (aucune sur le contour γ ; et si il y avait eu des singularités à l'extérieur du contour γ on s'en serait débarrassé en remplaçant U par un ouvert plus petit). Si γ est parcouru dans le ***sens direct*** *:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\,i \sum_{1\leq j\leq n} \mathrm{Rés}(f, z_j)$$

Si γ est parcouru dans le ***sens rétrograde*** *:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -2\pi\,i \sum_{1\leq j\leq n} \mathrm{Rés}(f, z_j)$$

Ce théorème est un cas particulier de notre théorème général : j'ai expliqué que le contour de Jordan est homotopiquement trivial par une homotopie qui reste dans $\overline{\Omega}$ (donc dans U[13]) ; et j'ai aussi précisé que le contour de Jordan, lorsqu'il est parcouru dans le sens direct a un indice $+1$ par rapport à tout point intérieur.

Théorème 10 (Théorème des résidus, version classique B)
Soit γ un contour de Jordan, C^1 par morceaux, parcouru dans le sens direct, de domaine intérieur V. Soit γ_1 un plus petit contour de Jordan, C^1 par morceaux, parcouru dans le sens direct, tracé dans V, de domaine intérieur V_1, puis γ_2 un autre, parcouru dans le sens direct, qui avec son domaine intérieur V_2 est intièrement inclus dans $V\setminus\overline{V_1}$, puis γ_3 qui avec son domaine intérieur V_3 est entièrement inclus dans $V\setminus\overline{V_1\cup V_2}$, etc.... Notons Ω l'ouvert $V\setminus\overline{\cup_{1\leq k\leq K} V_k}$. Soit f une fonction définie sur un ouvert U contenant $\overline{\Omega}$, holomorphe sauf en un nombre fini de singularités isolées $z_1, \ldots, z_n$, toutes situées dans Ω. Le Théorème

12. Et je n'ai même pas mentionné la question de l'intégration le long d'un contour d'une fonction multi-valuée ! par exemple si on a des choses du type z^α, à partir du moment où après avoir parcouru l'intégralité du contour on retombe sur la « même détermination » de $z \mapsto z^\alpha$, alors l'invariance par homotopie vaut et on peut souvent calculer l'intégrale en déformant le contour et en traversant des pôles qui donnent des résidus...

13. une homotopie débordant dans U nous suffirait et son existence serait beaucoup plus facile à prouver que celle d'une homotopie restant dans $\overline{\Omega}$.

des résidus s'exprime alors par la formule :

$$\int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{1\leq k\leq K}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi\,i \sum_{1\leq j\leq n} \text{Rés}(f, z_j)$$

Ce théorème est à nouveau un cas particulier de notre théorème général. Notons $\partial\Omega$ la chaîne $\gamma - \sum_{1\leq k\leq K}\gamma_k$, que nous pouvons appeler « bord orienté » de l'ouvert Ω. Comme c'est une combinaison de lacets, c'est un cycle. Pour voir si le cycle est homologiquement trivial nous prenons un point $P \in \mathbf{C}\setminus U$ et nous examinons $\text{Ind}(\partial\Omega, P)$. Soit P est à l'extérieur de γ et donc aussi de tous les autres et alors $\text{Ind}(\gamma, P)$ et tous les $\text{Ind}(\gamma_k, P)$ sont nuls. Soit P est dans un et un seul des ouverts V_k alors $\text{Ind}(\gamma, P) = +1 = \text{Ind}(\gamma_k, P)$ et tous les autres sont nuls. Dans tous les cas on a bien $\text{Ind}(\partial\Omega, P) = 0$ donc le cycle $\partial\Omega$ est homologiquement trivial dans l'ouvert U. Par ailleurs son indice par rapport à chacune des n singularités z_j de f est toujours 1 puisque c'est l'indice du bord extérieur γ tandis que les composantes $-\gamma_k$ du bord intérieur ont un indice nul. Nous obtenons la formule voulue :

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi\,i \sum_{1\leq j\leq n} \text{Rés}(f, z_j)$$

Je mentionne rapidement deux autres justifications dans un style plus classique : on observe tout d'abord par la technique de remplacer f par la fonction holomorphe $F = f - g_1 - \cdots - g_n$ qu'il suffit de justifier la nullité de $\int_{\partial\Omega} F(z)\,dz$ pour toute fonction holomorphe F sur $\overline{\Omega}$. Représentons nous l'ouvert V sous une forme allongée, les sous-ouverts V_1, ..., V_k étant grosso modo alignés de la gauche vers la droite. Alors, je trace une coupure allant du haut de γ vers un point du haut de γ_1, puis une autre sur sa droite allant du haut de γ vers un point du haut de γ_2, etc...et je fais de même avec des coupures partant du bas. On voit que l'on a ainsi une succession l'un à côté de l'autre de domaines de Jordan Ω_0, Ω_1, ..., Ω_K, les coupures introduites étant chacune parcourue dans un sens puis dans l'autre on a certainement $\int_{\partial\Omega} F(z)\,dz = \sum_{0\leq k\leq K}\int_{\partial\Omega_k} F(z)\,dz$. Et on sait déjà que $\int_{\partial\Omega_k} F(z)\,dz = 0$. D'où le résultat.

Notons d'ailleurs si l'on n'utilise pas l'astuce de remplacer f par $F = f - g_1 - \cdots - g_n$ qu'on peut à ce stade raisonner ainsi : partant d'un point P_0 fixé du bord γ introduire une coupure jusqu'au voisinage de z_1 faire un petit cercle dans le sens retrograde autour de lui, puis revenir par le chemin inverse jusqu'en P_0, puis partir vers z_2 sans jamais intersecter le lacet autour de z_1, tourner autour de z_2 dans le sens retrograde, revenir en P_0, etc…etc…, puis finalement parcourir γ dans le sens direct. L'intégrale de f le long de ce contour qui a la propriété que les singularités sont toutes à l'extérieur sera nulle. Mais cela veut dire exactement, compte tenu de ce que nous avons prouvé dans le paragraphe précédent que $\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz$ se calcule en faisant la somme des $\int_{|z-z_i|=\epsilon} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Rés}(f, z_i)$.

Autre technique : je pars d'un point sur la gauche de γ et je trace une coupure vers γ_1. Puis de la droite de γ_1 je trace une coupure vers un point de la gauche de γ_2, etc…etc…. Je ne rattache pas la droite du dernier contour γ_K au grand contour γ. Je prétends qu'en partant γ en suivant la coupure vers γ_1 pour parcourir les moitiés du haut des γ_k, dans le sens rétrograde, puis de la droite vers la gauche les moitiés du bas des γ_k pour finalement une fois de retour sur γ le parcourir dans le sens direct, je trace ainsi un lacet Γ qui a la propriété, puisque les coupures sont toutes parcourues dans un sens puis dans l'autre que $\int_\Gamma = \int_\gamma - \sum_{1\leq k\leq K}\int_{\gamma_k}$. Enfin j'affirme qu'il est intuitivement évident que ce lacet Γ est homotopiquement trivial dans l'ouvert U. Voilà, c'est la deuxième méthode.

La première méthode comme la deuxième méthode reposent sur l'intuition que l'on ne sacrifie en rien à la généralité en se contentant d'imaginer les sous-ouverts V_k sagement alignés de la gauche vers la droite à la queue-leu-leu. Ces méthodes sont absolument correctes dès que l'on a sous la main un contour explicite. Mais le problème c'est bien sûr de s'assurer que l'on n'aura jamais de surprise, que toujours, cela marche bien : je crois qu'il vaut mieux que nous laissions cela aux professionnels !

Conclusion : je vous ai donc donné une présentation des formes classiques du théorème des résidus. La formule avec les indices est belle [14], et d'ailleurs (pour un lacet homotopiquement trivial) en fait plus simple à prouver que les énoncés ci-dessus qui emploient des contours de Jordan, ou la notion de bord régulier d'un domaine. En général les versions classiques ci-dessus, sans indices, suffisent pour les applications. [15]

14. un autre petit avantage c'est que les singularités à l'extérieur des contours d'intégration peuvent y figurer, on n'a pas besoin de les exclure puisque ce sont les indices qui s'en chargent, car ils sont nuls.

15. il y a des exceptions notables, par exemple lorsque l'on veut représenter une fonction hypergéométrique de Gauss-Riemann par une intégrale le long d'un chemin ; la subtilité est alors liée d'une part à l'emploi de fonctions multi-valuées, d'autre part à l'emploi de contours d'intégration qui sont certes des lacets, mais qui ne sont pas des contours de Jordan.

9 Annexes

9.1 Formules de Cauchy

Théorème 11 *Soit γ un contour de Jordan (C^1 par morceaux), parcouru dans le sens direct, de domaine intérieur Ω. Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}$.*

$$\forall z \in \Omega \; \forall n \in \mathbf{N} \qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, dw$$

Au début de ce chapitre nous avons prouvé ces formules pour γ parcourant un cercle. Pour un contour plus général nous obtenons la formule pour $n = 0$ par le théorème des résidus :

$$\forall z \in \Omega \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \, dw$$

En effet la fonction $w \mapsto g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$ ne peut avoir de singularité qu'au point $w = z$, c'est au pire un pôle simple et le résidu vaut $\lim_{w \mapsto z}(w-z)g(w)$, ce qui donne $f(z)$. Pour obtenir les formules pour $n \geq 1$ qui donnent les dérivées $f^{(n)}(z)$ nous pouvons, par exemple :

1. appliquer la formule que nous venons de prouver à la fonction analytique $f^{(n)}$, puis intégrer n fois par parties pour remplacer $f^{(n)}(w)$ par $f(w)$ dans l'intégrale.
2. appliquer le théorème des résidus à $g_n(w) = \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$ qui a en z au pire un pôle d'ordre $N = n+1$. Le résidu vaut $\lim_{w \to z} \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{d}{dw}\right)^{N-1} (w-z)^N g_n(w)$ ce qui donne $\frac{1}{n!} f^{(n)}(z)$.
3. partir de la formule pour $f(z)$ et justifier la dérivation sous le signe somme, en invoquant la dérivation des intégrales à paramètres (Théorème 7 du Chapitre II).
4. remplacer z par $z+h$ avec h petit et développer en série puis justifier la permutation de la série et de l'intégrale, cela donnera d'un seul coup la série de Taylor de $f(z+h)$ par rapport à $h = 0$ et donc tous les $f^{(n)}(z)$.

Lorsque l'on autorise f à avoir un nombre fini de singularités en z_1, …, z_m, une formule de Cauchy plus générale s'applique :

$$\forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_N\} \qquad f(z) = \sum_{1 \leq n \leq N} g_n(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

On a noté $g_j(z)$ la partie principale de f en la singularité z_j. Cette formule plus générale fait l'objet d'un exercice dans la feuille de travail IV.

Une fonction analytique est déterminée par ses singularités[16] *et par ses valeurs au bord.* Retenez ce principe général. À ce propos il est important d'ajouter (ici, supposons pour simplifier qu'il n'y a pas les singularités) que f est déterminée dans Ω non seulement par la connaissance de $f(w)$ pour $w \in \partial\Omega$ mais déjà, à une constante imaginaire pure près par la connaissance de $\mathrm{Re}(f(w))$ sur le bord. Je le démontre rapidement : la fonction à valeurs réelles $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ vérifie la formule de la moyenne, donc elle obéit au principe du maximum. Si $|u|$ est nulle sur le bord, le maximum de $|u|$ sur $\partial\Omega$ donc sur $\overline{\Omega}$ est nul, c'est-à-dire u est identiquement nulle sur Ω. On a montré dans un exercice que cela implique que f est constante (imaginaire pure, donc) : en effet $v = \mathrm{Im}(f)$ a, par les équations de Cauchy-Riemann, des dérivées partielles identiquement nulles, elle est donc constante car Ω est connexe. Si deux fonctions analytiques f_1 et f_2 sont telles que $\mathrm{Re}(f_1) = \mathrm{Re}(f_2)$ sur le bord, alors la différence $f_1 - f_2$ a une partie réelle nulle sur le bord et on peut lui appliquer ce qui précède. Ainsi $f_1 - f_2$ est une constante (imaginaire pure). L'étudiant(e) alerte se sera immédiatement dit, dans ces conditions, existe-t-il donc une formule intégrale pour reconstuire f à partir, non plus de f sur le bord, mais de $\mathrm{Re}(f)$ sur le bord ? Très bonne question, je vous félicite. La réponse est que oui, il existe de telles formules intégrales, mais leur forme dépend de Ω, contrairement à la formule de Cauchy qui utilise le noyau $\frac{1}{w-z}$ qui lui marche pour tous les domaines Ω. Si Ω est un disque, les formules utilisent ce que l'on appelle le « noyau de Poisson ».[17] Si l'on sait transformer Ω en un disque par un isomorphisme analytique on peut donc transporter les formules valables pour le disque vers Ω. Si l'on se représente Ω comme une membrane de tambour, tendue et délimitée par son contour γ alors l'étude des sons qui peuvent être émis par ce tambour est à peu près la même chose que de résoudre ce problème de donner des formules faisant ce que fait Poisson pour le disque. Je ne développerai pas plus avant cela ici. Comme cela j'aurai créé en vous un état de tension et d'angoisse insupportables et cela vous décidera peut-être à chercher à en savoir plus.

16. donc ici, le mot « singularité » fait référence non seulement à z_j mais à la partie principale g_j. Lorsque la singularité est polaire, cela veut donc dire une information exprimée en un nombre fini de nombres complexes : la position z_j de la singularité et les coefficients de g_j.

17. on parlera du noyau de Poisson dans la section sur les fonctions harmoniques.

9.2 Théorème de convergence uniforme de Weierstrass

Soit $(f_n)_{n=0,1,\ldots}$ une suite de fonctions (quelconques) sur un ouvert Ω (non vide). Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout compact $K \subset \Omega$ la suite (f_n) converge uniformément sur K,
2. pour tout disque fermé $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$ la suite (f_n) converge uniformément sur ce disque,
3. pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ est inclus dans Ω et la suite (f_n) converge uniformément sur ce disque.
4. pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un compact $K_{z_0} \subset \Omega$ qui est un voisinage de z_0 et sur lequel la suite (f_n) converge uniformément.

Preuve : $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4$ est immédiat. Montrons $4 \implies 1$. À tout z_0 du compact K associons un compact K_{z_0} dont l'existence est donnée par 4 et un disque ouvert $U_{z_0} = D(z_0, \eta_{z_0})$ inclus dans K_{z_0} et centré en z_0. Du recouvrement ouvert par les U_{z_0} du compact K nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini, associé à des points w_1, $\ldots$, w_N. Alors K est inclus dans l'union finie $K_{w_1} \cup \cdots \cup K_{w_N}$ $(\subset \Omega)$. Lorsque des fonctions convergent uniformément sur des ensembles A et B elles convergent uniformément sur $A \cup B$ (exercice). Donc par récurrence cela marche aussi pour un nombre fini d'ensembles (d'ailleurs toute preuve pour deux se généralise immédiatement directement pour une preuve pour N ensembles).

J'appellerai « convergence quasi-uniforme » la propriété équivalente à chacune des ses assertions. Il doit y avoir une terminologie officielle. Mais pour vous, l'officiel, c'est moi. Donc on utilisera cette terminologie.

Théorème 12 (de Weierstrass) *Soit (f_n) une suite de fonctions analytiques qui converge quasi-uniformément sur un ouvert Ω. La fonction limite f est une fonction analytique. De plus la suite des fonctions dérivées (f_n') converge quasi-uniformément sur Ω vers la fonction dérivée f' (et, par récurrence, idem pour les dérivées supérieures).*

Le fait que la fonction limite f soit analytique a été établi dans un chapitre précédent (la propriété d'être analytique est locale donc quitte à remplacer Ω par des ouverts plus petits on peut supposer la convergence uniforme sur Ω). Soit $z_0 \in \Omega$ et soit $r_0 > 0$ tel que $\overline{D(z_0, r_0)} \subset \Omega$. Prenons $\eta_0 = \frac{r_0}{2}$ et montrons que $f'_n \rightrightarrows f'$ sur $\overline{D(z_0, \eta_0)}$. Grâce aux formules de Cauchy pour les disques, c'est immédiat. Soit en effet γ le cercle de centre z_0 et de rayon r_0 parcouru dans le sens direct.

$$\forall z \in \overline{D(z_0, \eta_0)} \quad f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\, dw \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw$$

donc $$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\sup_{|w-z_0|=r_0} |f_n(w) - f(w)|}{\eta_0^2} |dw| = \frac{2}{\eta_0} \sup_{|w-z_0|=r_0} |f_n(w) - f(w)|$$

On a minoré : $|w - z| = |w - z_0 - (z - z_0)| \geq |w - z_0| - |z - z_0| \geq r_0 - \frac{1}{2}r_0 = \frac{1}{2}r_0$. La convergence uniforme de f_n vers f sur le compact $|w - z_0| = r_0$ implique donc $\lim_{n\to\infty} \sup_{|z-z_0|\leq\frac{1}{2}r_0} |f'_n(z) - f'(z)| = 0$, c'est-à-dire $f'_n \rightrightarrows f'$ sur $\overline{D(z_0, \eta_0)}$. Donc (f'_n) converge quasi-uniformément vers f' sur Ω.

Avant de passer à autre chose, je devrais peut-être dire que Weierstrass n'a jamais énoncé le théorème sous cette forme. Je pense que le vrai théorème de Weierstrass est quelque chose du genre : *soit $R > 0$ et soit $a_j^{(n)}$ des nombres complexes tels qu'il existe une constante M tel que $\forall n \geq 0, \forall j \geq 0,\ |a_j^{(n)}| \leq MR^{-j}$, de sorte que chacune des séries $\sum_{j=0}^\infty a_j^{(n)} z^j$ a un rayon de convergence au moins R. On suppose que pour tout j la limite $a_j = \lim_{n\to\infty} a_j^{(n)}$ existe. Alors la série $\sum_{j=0}^\infty a_j z^j$ a un rayon de convergence au moins R et*

$$\textit{Pour } |z| < R : \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^\infty a_j^{(n)} z^j = \sum_{j=0}^\infty a_j z^j \qquad (= \sum_{j=0}^\infty \lim_{n\to\infty} a_j^{(n)} z^j)$$

$$\forall N \geq 1 \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=N}^\infty a_j^{(n)} j(j-1)\cdots(j-N+1) z^{j-N} = \sum_{j=N}^\infty a_j j(j-1)\cdots(j-N+1) z^{j-N}$$

Je crois que cela s'appelle le « M-test » de Weierstrass. Vous remarquerez que la majoration $\forall n \geq 0, \forall j \geq 0,\ |a_j^{(n)}| \leq MR^{-j}$ ne vaut plus pour les coefficients $ja_j^{(n)}$ des séries dérivées, mais marche à nouveau en remplaçant R par n'importe quel $0 < R' < R$ avec une nouvelle constante M'. Il suffit pour cela de s'assurer que $\forall j \geq 1$ $j \leq (R/R')^j M'/M$, donc de prendre $M' = M \sup_{j\geq 1} j(R'/R)^j$ qui est bien $< \infty$ car $\lim_{j\to\infty} j(R'/R)^j = 0$. De cette façon une fois $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^\infty a_j^{(n)} z^j = \sum_{j=0}^\infty a_j z^j$ justifié on a automatiquement le résultat pour les séries dérivées successives.

Je vous laisse la preuve du M-test en exercice.

9.3 Fonctions harmoniques

Théorème 13 *Soit Ω un ouvert. Soit g une fonction continue, à valeurs réelles ou complexes sur Ω. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tout z_0 et tout r_0 tel que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r_0 est entièrement inclus dans Ω, $g(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + r_0 e^{it})\,dt$ (formule de la moyenne),*
2. *pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $r_0 > 0$ tel que la formule de la moyenne vaut pour les disques de centre z_0 et de rayons inférieurs ou égaux à r_0,*
3. *la fonction g est de classe C^2 et vérifie l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$,*
4. *la fonction g est de classe C^∞ et vérifie l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$,*
5. *les fonctions $\mathrm{Re}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ peuvent localement s'écrire comme des parties réelles de fonctions analytiques.*

Lorsque l'une des ses propriétés est vérifiée on dit que g est une fonction harmonique.

Attention en ce qui concerne le point 5 : il n'existe pour une fonction harmonique absolument aucune connexion entre $\mathrm{Re}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$. Donc si l'on peut écrire $\mathrm{Re}(g) = \mathrm{Re}(f)$ avec f analytique il faudra une autre fonction analytique sans aucun rapport avec f pour faire la même chose avec $\mathrm{Im}(g)$ (et aussi il est a priori faux que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$).

Par ailleurs dans un Cours mené par un Professeur plus compétent et disposant de plus que onze semaines de deux heures, on vous aurait parlé d'ouverts simplement connexes et on vous aurait expliqué que si Ω est simplement connexe alors pour toute fonction harmonique réelle g on peut trouver, non seulement localement mais globalement sur Ω tout entier, une fonction analytique f avec $g = \mathrm{Re}(f)$.

En ce qui concerne le Théorème je supposerai d'emblée que g est à valeurs réelles, car la validité des assertions pour g est équivalente à la validité des mêmes assertions à la fois pour $\mathrm{Re}(g)$ et pour $\mathrm{Im}(g)$.

On a certainement $5 \implies 4 \implies 3$. Montrons $3 \implies 5$: posons $u = \frac{\partial g}{\partial x}$ et $v = -\frac{\partial g}{\partial y}$. Les fonctions u et v sont de classes C^1. On a $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = +\frac{\partial v}{\partial y}$. Et aussi on a $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Donc u et v vérifient les équations de Cauchy-Riemann et la fonction $f = u + iv$ est analytique (à ce stade nous voyons déjà que g est automatiquement de classe C^∞). Localement (disons sur un disque D quelconque dans Ω) on peut trouver une primitive analytique $F = U + iV$ de $f = u + iv$ donc $f = F' = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y}$. Ainsi $\frac{\partial U}{\partial x} = u = \frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y} = -v = \frac{\partial g}{\partial y}$. Donc la fonction $g - U$ a ses deux dérivées partielles nulles, elle est une constante C sur le disque D. Donc sur ce disque $g = C + \mathrm{Re}(G) = \mathrm{Re}(C + G)$. Donc 5 est prouvé, et même pour tout disque D inclus dans l'ouvert Ω : on a établi que l'équation de Laplace était la condition nécessaire et suffisante pour être la partie réelle d'une fonction analytique, sur tout disque $D \subset \Omega$.

On a déjà vu dans ce chapitre que les fonctions analytiques, et donc aussi leurs parties réelles, vérifient la formule de la moyenne. Donc 5 $\implies$ 1. Montrons maintenant 1 $\implies$ 3. Pour cela nous faisons dans un premier temps l'hypothèse supplémentaire que g est de classe C^2. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto f(t) = g(z_0 + te^{i\theta})$. Tout d'abord, on évalue :

$$f'(t) = \cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial x}(z_0 + te^{i\theta}) + \sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial y}(z_0 + te^{i\theta})$$

$$f''(t) = \left(\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)(z_0 + te^{i\theta})$$

$$g(z_0 + re^{i\theta}) = g(z_0) + r\cdot(\cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial y})(z_0) +$$

$$\int_0^r (r-t)\left(\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)(z_0 + te^{i\theta})dt$$

On intègre par rapport à θ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta})d\theta = g(z_0) + \ \textit{zéro} \ +$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{0\le t\le r, 0\le\theta\le 2\pi}(r-t)\left(\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)(z_0 + te^{i\theta})\,d\theta\,dt$$

Notons J l'intégrale double, et I la même intégrale à la différence près qu'au lieu d'évaluer les doubles dérivées en $z_0 + te^{i\theta}$ on les évalue au point fixe z_0. On peut calculer I exactement puisque $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}$, etc... :

$$I = \int_0^r (r-t)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)(z_0)\,dt = +\frac{1}{4}\Delta(g)(z_0)r^2$$

On a de plus $|J - I| \le \frac{1}{2\pi}\iint_{0\le t\le r, 0\le\theta\le 2\pi}(r-t)M(r)\,d\theta\,dt = \frac{1}{2}M(r)r^2$ avec $M(r) = \sup_{|z-z_0|\le r}(|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z) - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z_0)| + |\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(z) - \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(z_0)| + |\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(z) - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(z_0)|)$. Donc :

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta})d\theta - g(z_0) - \frac{1}{4}\Delta(g)(z_0)r^2\right| \le \frac{1}{2}M(r)r^2$$

et comme $\lim_{r\to 0} M(r) = 0$ on a, pour toute fonction g de classe C^2 :

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta})d\theta - g(z_0)\right) = \frac{1}{4}\Delta(g)(z_0)$$

Vérifions les constantes, en testant avec $z_0 = 0$ et $g(z) = x^2 + y^2 = r^2$. Alors $\Delta(g)$ est constant et égal à 4. De plus $g(z_0+re^{i\theta}) = r^2$, $g(z_0) = 0$, ça marche : $1 = \frac{1}{4}4$. Cette formule montre immédiatement que si la fonction g de classe C^2 vérifie la formule de la moyenne (même seulement pour des cercles de rayon inférieur à $r(z_0)$ dépendant de z_0) alors $\Delta(g)$ est identiquement nul : g vérifie l'équation de Laplace.

Nous avons donc prouvé $1 \implies 3$ et même $2 \implies 3$ mais en faisant l'hypothèse supplémentaire à l'avance que g est de classe C^2. Je donne maintenant une méthode (qui utilise sans le dire la notion de régularisation par convolution) qui donne $1 \implies 3$, sous l'hypothèse g continue. Malheureusement cela ne permet pas sans modifications de faire $2 \implies 3$ sous la seule hypothèse g continue.

Soit k une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}$, identiquement nulle pour $x \geq 1$ et aussi pour $x \leq \frac{1}{2}$. On suppose de plus $\int_{1/2}^1 k(x)x dx = \frac{1}{2\pi}$, et l'on considère la fonction $K(z) = k(|z|)$. La fonction K est de classe C^2, nulle pour $|z| \geq 1$, vérifie $\iint_{\mathbf{C}} K(z)\, rdrd\theta = 1$. Soit $\epsilon > 0$ et soit $K_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon^2}K(\frac{z}{\epsilon})$ qui est aussi de classe C^2, est nulle pour $|z| \geq \epsilon$, ne dépend que de $|z|$ et vérifie aussi $\iint_{\mathbf{C}} K_\epsilon(z)\, rdrd\theta = 1$. Enfin considérons la fonction $g_\epsilon(z) = \iint_{\mathbf{C}} K_\epsilon(x+iy)g(z-x-iy)dxdy$. L'intégrale est en fait prise sur le compact $x^2 + y^2 \leq \epsilon$. Elle n'est pas définie pour tout $z \in \Omega$. On doit d'abord remplacer Ω par, disons, un disque D de rayon R, tel que le disque de rayon $R + \epsilon$ est inclus dans Ω. Le changement de variable $x + iy \mapsto x' + iy' = z - x - iy$ montre que l'on peut aussi écrire $g_\epsilon(z) = \iint_{\mathbf{C}} K_\epsilon(z - x' - iy')g(x' + iy')dx'dy'$. Dans cette intégrale, qui est en fait sur un compact, la variable z est un paramètre, et elle n'apparaît que dans la fonction K_ϵ qui est de classe C^2. Donc g_ϵ est une fonction de classe C^2 de z. Mais revenons à l'expression $g_\epsilon(z) = \iint_{\mathbf{C}} K_\epsilon(x + iy)g(z - x - iy)dxdy$, et passons en coordonnées polaires $x + iy = re^{i\theta}$ on obtient $g_\epsilon(z) = \iint_{0\leq r\leq\epsilon, 0\leq\theta\leq 2\pi} K_\epsilon(re^{i\theta})g(z - re^{i\theta})rdrd\theta = \int_0^\epsilon K_\epsilon(r)\left(\int_0^{2\pi} g(z - re^{i\theta})\, d\theta\right) r\, dr = \int_0^\epsilon K_\epsilon(r)2\pi g(z)r\, dr = g(z)$. La fonction g_ϵ est donc la même que g ! (sauf que son domaine de définition est plus petit, mais lorsque $\epsilon \to 0$ on finit par pouvoir englober tout z de Ω). Donc en fait la fonction continue g est de classe C^2 lorsqu'elle vérifie la formule de la moyenne, et par ce que nous avons établi auparavant, elle vérifie l'équation de Laplace ! [18]

Comme je l'ai déjà indiqué, il ne semble pas possible avec cette méthode de traiter l'implication 2 $\implies$ 3. J'explique donc une méthode complètement différente qui permet de s'en sortir. [19] On prend z_0 et $R > 0$ tel que le disque fermé de centre z_0 et de rayon R est inclus dans Ω. On utilise le noyau de Poisson [20] pour construire à partir de la fonction continue g sur le bord $|z - z_0| = R$ une fonction G elle aussi continue sur le disque fermé $|z - z_0| \leq R$, égale à g sur le bord, et égale sur le disque ouvert (par construction) à la partie réelle d'une certaine fonction analytique F. Bon je craque, voici la formule : [21]

$$\begin{aligned} |z - z_0| < R : \quad & G(z) = \mathrm{Re}(F(z)) \qquad F(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + h}{Re^{it} - h} g(z_0 + Re^{it})\,dt \\ |z - z_0| = R : \quad & G(z) = g(z) \end{aligned}$$

Cela demande un certain travail de montrer que G a toutes les propriétés indiquées (la plus subtile étant la continuité de G sur le disque fermé $|z - z_0| \leq R$). Maintenant la fonction $G - g$ est continue sur le disque fermé et elle vérifie la formule de la moyenne (au sens local de l'assertion 2.) dans l'intérieur, donc elle obéit au principe du maximum. Mais comme elle est nulle sur le bord, elle est donc identiquement nulle à l'intérieur. Donc en fait $g = G$, g est infiniment différentiable et aussi elle vérifie l'équation de Laplace sur le disque ouvert $|z - z_0| < R$. Ainsi 2 $\implies$ 3 est établi, et avec cela toutes les équivalences du Théorème caractérisant les fonctions harmoniques.

9.4 Sur les cycles homologiquement triviaux

Soit U un ouvert, $\delta_1, \ldots, \delta_m$ des lacets (C^1 par morceaux) tracés dans U, $c_1, \ldots, c_m$ des nombres complexes et Γ le 1-cycle $c_1\delta_1 + \cdots + c_m\delta_m$. Pour tout point P non situé sur l'union des supports des lacets δ_j on peut définir l'indice $\mathrm{Ind}(\Gamma, P)$ de Γ par rapport à P. Le but de cette annexe est de décrire une preuve de l'équivalence 2 $\Leftrightarrow$ 3 du Théorème 7, c'est-à-dire :

18. si on avait pris la fonction k donc les fonctions K_ϵ de classe C^∞ on aurait pu conclure dès ce stade que g est de classe C^∞. Mais cela est superflu puisque nous avons déjà préalablement montré 3 $\implies$ 5.

19. et le pire, c'est que cela rend complètement superflus nos jolis calculs précédents avec le Laplacien…

20. je ne donne pas l'impression d'être très décidé à taper à l'ordinateur ce que c'est que ce noyau de Poisson. Voir tout de même la ligne ci-dessous.

21. exercice : $\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{it}+re^{i\alpha}}{Re^{it}-re^{i\alpha}}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty}(r/R)^{|j|}e^{j\,i(\alpha-t)} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\alpha-t)+r^2}$.

Théorème 14 *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ *pour toute fonction holomorphe* f *sur* U *est que* $\mathrm{Ind}(\Gamma, P) = 0$ *pour tout point* P *du complémentaire de* U*.*

On a $\mathrm{Ind}(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0}$ et $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ est une fonction holomorphe sur U lorsque $z_0 \notin U$. Cela règle le cas d'une implication et il faut montrer l'autre, à savoir : si $\mathrm{Ind}(\Gamma, P) = 0$ pour tout point P du complémentaire de U alors $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ pour toute fonction holomorphe f sur U. Tout d'abord une première réduction : a priori les coefficients c_j du cycle Γ ont le droit d'être complexes $c_j = a_j + ib_j$. Notons $\mathrm{Re}(\Gamma)$ et $\mathrm{Im}(\Gamma)$ les 1-chaînes $\sum_j a_j\delta_j$ et $\sum b_j\delta_j$. Ce sont aussi des cycles (pourquoi) et il est aussi vrai qu'ils ont des indices nuls par rapport à chaque point P du complémentaire de U (pourquoi). Si l'on sait que l'intégrale sur eux de $f(z)dz$ donne zéro on l'a aussi pour Γ (pourquoi). Bref, on peut d'emblée supposer que les c_j sont des nombres **réels**.

Pour commencer notons $[a_j, b_j]$ l'intervalle paramétrant δ_j. Lorsque $t_1 < t_2$ sont donnés dans cet intervalle, on peut considérer, d'une part l'arc I de δ_j allant de $\delta_j(t_1)$ à $\delta_j(t_2)$, d'autre part la corde II allant en ligne droite de $\delta_j(t_1)$ à $\delta_j(t_2)$, paramétrée linéairement par $[t_1, t_2]$, nous noterons cela δ_j^* et en troisième part l'homotopie qui déforme I en II via $H(t, u) = (1-u)\delta_j(t) + u\delta_j^*(t)$, $0 \leq u \leq 1$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Si t_1 et t_2 sont suffisamment proches alors l'homotopie a lieu dans U. Par le théorème de Cauchy-Gauss, le cycle Γ^* obtenu en remplaçant δ_j par δ_j^* vérifie $\int_{\Gamma^*} f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz$ pour toute fonction holomorphe sur U, et en particulier il est toujours vrai pour Γ^* qu'il a un indice nul par rapport à tout $P \notin U$.[22]

Comme les supports des δ_j sont compacts, il existe $\eta > 0$ tel que tout point du plan complexe à distance au plus η d'un point quelconque du support de Γ est dans U. Par l'uniforme continuité de la fonction continue δ_j on peut subdiviser $[a_j, b_j]$ en un nombre fini de sous-intervalles $[t_1, t_2]$ tels que l'arc allant de $\delta_j(t_1)$ à $\delta_j(t_2)$ est entièrement inclus dans le disque fermé de centre $\delta_j(t_1)$ et de rayon η. Ce disque est convexe, donc l'homotopie considérée plus haut reste dans ce disque. Ainsi en un nombre fini d'étapes on transforme les lacets δ_j en des lignes brisées, linéairement paramétrées, par des homotopies dans U.

22. on a autorisé dans le cycle $c_1\delta_1 + \cdots + c_m\delta_m$ des coefficients réels donc le mot « indice » ne se limite pas exclusivement à des valeurs entières.

Pour chaque sommet d'une telle ligne brisée, prenons un point très proche dont les coordonnées réelles et imaginaires sont des nombres rationnels. Nous pouvons réaliser une homotopie dans U en laissant immobile le sommet d'avant et le somme d'après et en faisant glisser le sommet considéré, vers le point très proche à coordonnées rationnelles. En un nombre fini d'étapes nous avons transformé ainsi les δ_j en des lignes brisées dont les sommets ont des coordonnées rationnelles. Maintenant pour chaque segment je le subdivise en N segments de même longueur, puis je remplace chaque petit segment par un déplacement horizontal puis un déplacement vertical. Si N est très grand, la nouvelle ligne brisée, qui est entièrement constituée de segments soit horizontaux soit verticaux, aux sommets à coordonnées rationnelles, est obtenue à partir de l'ancienne par un nombre fini d'homotopies qui restent dans U et ne changent donc pas les valeurs des intégrales des fonctions holomorphes, en particulier les indices par rapport aux points du complémentaire de U.

Finalement soit Q le plus petit commun multiple de tous les dénominateurs des coordonnées horizontales et verticales de tous les sommets ainsi construits. Multiplions par Q toute la situation, ouvert U, cycle Γ. Les sommets sont alors à coordonnées entières. Enfin subdivisons encore les segments si nécessaire pour nous ramener à la situation suivante : le cycle Γ est composé de segments horizontaux et verticaux reliant chacun des points à coordonnées entières $n_1 + in_2$ à soit $n_1 \pm 1 + in_2$ (segment horizontal vers le plus proche voisin à droite ou à gauche) ou à $n_1 + in_2 \pm i$ (segment vertical vers le plus proche voisin soit en haut soit en bas). Imaginons le quadrillage du plan complexe donné par toutes les droites verticales d'abscisses entières, et toutes les droites horizontales d'ordonnées entières. Les points d'intersections de toutes ces droites forment un réseau. On dit que deux tels points P et Q sont plus proches voisins si au plus une de leurs coordonnées diffère par plus ou moins un. Un **lien** est un segment **orienté** allant soit d'un sommet P à son voisin à l'Est, soit d'un sommet P à son voisin au Nord.

Revenons à notre cycle Γ. Il parcourt chaque lien L un certain nombre de fois dans son sens naturel et un certain nombre de fois dans le sens contraire. Notons n_L le nombre total algébrique de tels parcours. Seuls un nombre fini de liens ont n_L non nul. [23] On peut donc écrire $\Gamma = \sum_L n_L \cdot L$.

23. attention comme on autorise initialement des coefficients réels c_j dans le cycle, les n_L sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des c_j, ce ne sont pas forcément malgré la notation des nombres entiers.

À tout carré du quadrillage C j'associe le nombre n_C de la manière suivante : $n_C = \mathrm{Ind}(\Gamma, P)$ avec P un point quelconque de l'intérieur du carré C. **Par hypothèse, si l'intérieur du carré C contient un point hors de U alors $n_C = 0$.** Supposons même seulement que le bord du carré C a un point Q hors de U. Alors tout point Q' de l'intérieur très proche de Q peut être déformé continûment vers Q tout en évitant le support de Γ. L'indice $\mathrm{Ind}(\Gamma, Q)$ est nul donc aussi $\mathrm{Ind}(\Gamma, Q')$ donc $n_C = 0$. **Donc tout carré fermé C qui contient ne serait-ce qu'un point hors de U vérifie $n_C = 0$.** Il n'y aura qu'un nombre fini de carrés C avec $n_C \neq 0$ (car tout point suffisamment éloigné du support de Γ a un indice nul). Soit Δ la somme formelle finie $\sum n_C \cdot C$, où l'on ne retient que les carrés avec $n_C \neq 0$: les C que l'on retient sont donc **tous entièrement inclus dans U**. Soit $\Gamma' = \partial\Delta$ le cycle égal au « bord » de Δ : c'est-à-dire, à chaque lien orienté L du type Sud-Nord j'associe $n_L = n_{C_1} - n_{C_2}$ avec C_1 le carré à sa gauche et C_2 le carré à sa droite, et à chaque lien orienté L du type Ouest-Est, j'associe $n_L = n_{C_1} - n_{C_2}$ avec C_1 le carré du haut et C_2 le carré du bas. On peut aussi écrire, avec des notations auto-explicatives $\Gamma' = \sum_C n_C \partial C$.

Je prétends que Γ', c'est exactement la même chose que Γ. En effet, considérons par exemple un lien L du type Sud-Nord avec le carré C_1 à sa gauche et le carré C_2 à sa droite. Prenons un point P_1 dans (l'intérieur de) C_1 extrêmement proche du milieu du lien L et un point P_2 dans C_2 extrêmement proche du milieu du lien L. Lorsque nous calculons $n_{C_1} = \mathrm{Ind}(\Gamma, P_1)$, la contribution du lien L est approximativement égale à $\frac{1}{2} n_L$:[24] en effet vu de P_1 lorsque l'on parcourt une fois L suivant son orientation la variation de l'argument $\arg(z - P_1)$ est de presque $+\pi$, on divise par 2π cela donne $+\frac{1}{2}$. De même lorsque nous calculons $n_{C_2} = \mathrm{Ind}(\Gamma, P_2)$, la contribution du lien L est approximativement égale à $-\frac{1}{2} n_L$: vu de P_2 la variation de l'argument lorsque l'on fait L une fois est de presque $-\pi$. La contribution des autres liens formant Γ pour le calcul soit de l'indice par rapport à P_1 soit par rapport à P_2 est quasi-identique pour P_1 et pour P_2. En faisant tendre P_1 et P_2 vers le milieu du lien L ce qui ne change rien aux indices, on conclut finalement que $n_{C_1} - n_{C_2} = +\frac{1}{2} n_L - (-\frac{1}{2} n_L) = +n_L$. On raisonne de même avec les liens du type Ouest-Est.

En conclusion on a $\Gamma = \Gamma' = \sum_C n_C \partial C$. **On peut maintenant terminer la preuve et votre Professeur va pouvoir enfin aller regarder les dessins animés du matin**

24. si l'on n'avait pas initialement fait la réduction à des c_j réels, cette affirmation serait fausse. Pourquoi ?

à la télévision : si f est une fonction holomorphe quelconque sur U on a $\int_\Gamma f(z)dz = \sum_C n_C \int_{\partial C} f(z)dz$ et par le théorème de Cauchy-Goursat $\int_{\partial C} f(z)dz = 0$ pour tout carré fermé sur lequel f est holomorphe.

La preuve exhibe le cycle d'origine Γ, à des homotopies près dans U, comme le bord d'une 2-chaîne dans U. Comme chaque modification par homotopie est en particulier une modification par le bord de quelque chose, essentiellement on peut dire que l'on a prouvé que Γ est lui-même le bord de quelque chose inclus dans U. Bref, modulo quelques détails on a, pour ainsi dire prouvé que Γ était bien « homologiquement trivial » (dans U) au sens de la topologie algébrique. Donc en fait non seulement on a établi $2 \Rightarrow 3$ du théorème 7 mais aussi $2 \Rightarrow 1$.

À propos, toute copie d'examen reproduisant la phrase « j'ai donc, modulo quelques détails et pour ainsi dire, résolu la question » se verra sanctionnée impitoyablement...

9.5 Ouverts simplement connexes et Théorèmes de Riemann

Sans aucune démonstration, je décris dans cette annexe plusieurs très beaux théorèmes de Riemann (1826-1866).

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe (non vide). On dit que Ω est **simplement connexe** si tout lacet tracé sur Ω est homotopiquement trivial dans Ω.

Théorème 15 *Soit Ω ouvert connexe borné. Alors Ω est simplement connexe si et seulement si son complémentaire F a la propriété suivante : deux points P et Q dans F étant donnés, et $\epsilon > 0$ quelconque étant donné, on peut trouver un nombre fini de points de F, $P_0 = P$, P_1, ..., $P_N = Q$, tels que la distance de P_j à P_{j+1} est au plus ϵ pour chaque j.*

Théorème 16 *Soit Ω ouvert connexe non borné. Si $F = \mathbf{C} \setminus \Omega$ est borné, alors le seul cas pour lequel Ω est simplement connexe, c'est $\Omega = \mathbf{C}$, $F = \emptyset$. Si F n'est pas borné, alors Ω est simplement connexe si et seulement si pour tout point de P de F, tout $\epsilon > 0$, tout $C < \infty$ on peut trouver des points dans F, $P_0 = P$, P_1, ..., P_N, tels que la distance de P_j à P_{j+1} est au plus ϵ pour chaque j, et la distance de l'origine à P_N est au moins C.*

Plus généralement, Riemann dit que Ω est m-connexe si son complémentaire a $m+1$ composantes connexes : il est plus difficile de décrire la notion de composante connexe pour les fermés F que pour les ouverts Ω, les énoncés ci-dessus vous donnent une idée, et en fait il faudrait prendre le complémentaire non pas dans $\mathbf{C}$ mais dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ (sphère de Riemann) pour un énoncé unifié.

Théorème 17 *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe simplement connexe. Toute intégrale le long d'un lacet d'une fonction holomorphe est nulle. Toute fonction holomorphe possède une primitive globalement définie. Toute fonction holomorphe partout non nulle est l'exponentielle d'une fonction holomorphe. Toute fonction harmonique réelle est la partie réelle d'une fonction holomorphe globalement définie.*

On en arrive maintenant au théorème le plus extraordinaire de cette section (ce n'est qu'au début du vingtième siècle qu'une preuve complète a été obtenue) :

Théorème 18 *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe simplement connexe. Alors, soit $\Omega = \mathbf{C}$, soit il existe une bijection analytique $\phi : \Omega \to D(0,1)$ de Ω sur le disque unité ouvert.*

À ce stade, nous avons en amphi discuté des bijections analytiques, mais pas vraiment encore dans ce polycopié. Si un jour je rédige un Cinquième chapitre, correspondant au dernier mois du cours en amphi, j'en parlerai. Je vous rappelle que nous avons vu par exemple que le demi-plan supérieur $\mathrm{Im}(z) > 0$ est en bijection analytique avec $D(0,1)$ par $z \mapsto w = \frac{z-i}{z+i}$, et que la bande $|\mathrm{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ est en bijection analytique avec le demi-plan supérieur via $z \mapsto w = \sin(z)$. L'ouvert $\mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$ est en bijection analytique avec le demi-plan $\mathrm{Re}(w) > 0$ via $z \mapsto w = \sqrt{z}$, et ce dernier est en bijection analytique avec $D(0,1)$ via $w \mapsto \zeta = \frac{w-1}{w+1}$.

Par contre, par le théorème de Liouville il ne peut y avoir aucune application analytique ϕ autre que constante de $\mathbf{C}$ vers $D(0,1)$: en effet ϕ comme fonction entière bornée doit être constante.

Lorsque que l'on prend des ouverts qui ne sont plus simplement connexes comme les anneaux $0 < r_1 < |z| < r_2$, alors les classes d'équivalence pour l'isomorphisme analytique sont plus nombreuses (pour les anneaux la classe est déterminée par le quotient $\frac{r_2}{r_1} \in]1, \infty[$.)

À côté du plan complexe $\mathbf{C}$ et du disque unité $D(0,1)$ il existe encore une troisième entité analytique simplement connexe : il s'agit de la « sphère de Riemann » $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, qui contrairement à cette écriture est un espace topologique compact (il vaut mieux imaginer ∞ comme le pôle Nord d'une sphère et identifier les autres points de la sphère à $\mathbf{C}$ en plaçant $\mathbf{C}$ comme plan équatorial et en projetant les points de la sphère sur le plan via l'intersection avec la droite les reliant au pôle Nord).

Toute entité analytique connexe, simplement connexe, et compacte, est analytiquement équivalente à la sphère de Riemann et cela constitue un autre théorème majeur de l'Analyse mathématique.

