Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable : Jean-François Burnol

TROISIÈME CHAPITRE

Table des matières

1 Singularités isolées, Pôles

La fonction $\sin(z)$ a un zéro de multiplicité 1 en 0 : le premier terme non nul de sa série de Taylor en 0 est z. On peut donc considérer :

$$g(z) = \frac{\sin(z)}{z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

qui est aussi une fonction entière. Comme $g(0) \neq 0$ la fonction $\frac{1}{g}$ est holomorphe en zéro. Elle est même holomorphe sur le disque $D(0, \pi)$ puisque g ne s'annule pas dans ce disque. Il y a donc un développement de rayon de convergence au moins π :

$$|z| < \pi \implies \qquad \frac{1}{g(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} z^{2k}$$

On a utilisé le fait que g, donc aussi $1/g$, sont paires, donc seuls des exposants pairs apparaissent, et aussi que le premier terme est 1 puisque $1/g(0) = 1$. Il n'y a pas de formule pour les d_{2k} aussi simple à exprimer que pour les séries usuelles sin, cos, log, etc..., c'est pour cela que j'utilise la notation d_{2k}. Vous imaginerez sans peine que l'on peut les étudier de près, donner des valeurs approchées lorsque $k \to +\infty$, par exemple. Vous avez probablement, dès la première année, calculé les premiers comme exercice dans le cadre du cours sur les développements limités : en effet la série entière convergente $\frac{z}{\sin(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} z^{2k}$ donne pour $z = x$ réel des développements limités à tous les ordres que l'on peut aussi (unicité des coefficients) obtenir par les techniques de première année pour les développements limités. Le plus efficace en effet pour obtenir les trois ou quatre premiers coefficients sera ici de procéder à la « division suivant les puissances croissantes » de 1 par $1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 - \frac{1}{5040}z^6 + \dots$. Cela donne :

$$\frac{z}{\sin(z)} = 1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \frac{31}{15120}z^6 + \frac{127}{604800}z^8 + \frac{73}{3421440}z^{10} + \dots$$

Bon j'avoue, j'ai utilisé un logiciel de calcul formel pour trouver les coefficients, mais quelques secondes à la main ($-\frac{1}{120} + \frac{1}{36} = \frac{7}{360}$, et $\frac{1}{5040} - 2\frac{1}{6}\frac{1}{120} + (\frac{1}{6})^3 = \dots$) auraient suffi pour déterminer les termes jusqu'à l'ordre 4, voire 6, inclus. Même sans disposer de formule explicite pour les coefficients[1] nous avons déjà pu affirmer que le rayon de convergence de la série entière était au moins π. En fait il est même exactement π, car si il était

1. il semble qu'ils soient tous positifs ; est-ce exact ? pouvez-vous le prouver ?

strictement supérieur la limite $\lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} \frac{x}{\sin(x)}$ serait finie (égale à $1+\sum_{k=1}^\infty d_{2k}\pi^{2k}$), or elle vaut $+\infty$.

Sur cette base nous obtenons dans le disque épointé $D^*(0,\pi) = D(0,\pi)\setminus\{0\}$ une série entière pour la fonction $\frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z} = \left(\frac{z}{\sin(z)} - 1\right)\frac{1}{z} = \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \frac{127}{604800}z^7 + \dots$$

Le rayon de convergence est encore π car (exercice !) lorsque l'on a une série $\sum e_j z^j$ dont on ne conserve que les termes d'ordre $\geq J$ et que l'on divise par z^J (ce qui donne $\sum_{k=0}^\infty e_{J+k}z^k$) la nouvelle série a exactement le même rayon de convergence. À propos on constate ici que l'on n'a que des exposants impairs, ce qui est bien, puisque la fonction $k(z) = \frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z}$ est impaire.

Le point $z=0$ pour la fonction $k(z) = \frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z}$ est, a priori, une **singularité**. Mais comme nous venons de le voir, il s'agit d'une **fausse singularité** puisque qu'en posant $k(0)=0$ on voit que k, comme somme d'une série entière convergente, est analytique sur $D(0,\pi)$. Il y a un théorème utile sur les fausses singularités :

Théorème 1 (Riemann) *Soit k une fonction holomorphe sur un ouvert épointé $U\setminus\{a\}$. Si la fonction k est bornée dans un voisinage de a alors elle n'a en $z=a$ qu'une* fausse singularité *(ou « singularité effaceable ») : la limite $L=\lim_{z\to a} k(z)$ existe et en posant $k(a)=L$ la fonction k est holomorphe sur U (y-compris en a).*

Preuve : posons $g(z) = (z-a)^2 k(z)$ pour $z\neq a$ et $g(a)=0$. Il est clair que $\frac{g(z)-g(a)}{z-a} = (z-a)k(z) \to_{z\to a} 0$ puisque k est bornée dans un voisinage de a. Donc g est dérivable au sens complexe en $z=a$, avec d'ailleurs $g'(a)=0$. Bien sûr g est dérivable au sens complexe en tout $z\neq a$, donc g est holomorphe sur U, y-compris en a. Elle admet donc un développement en série $g(a+h) = c_0 + c_1h + c_2h^2 + \dots$ de rayon de convergence non nul. On a $c_0 = g(a) = 0$ et $c_1 = g'(a) = 0$. Donc pour h non nul suffisamment petit $h^2k(a+h) = c_2h^2 + c_3h^3 + \dots$, et ainsi $k(a+h) = c_2 + c_3h + c_4h^2 + \dots$. Il en résulte que $L = \lim_{h\to 0} k(a+h)$ existe (et vaut c_2) et aussi qu'en étendant la fonction k par la définition $k(a)=L$, on obtient une fonction qui est analytique en a. Ceci complète la preuve.

On dira qu'une fonction $f(z)$, analytique sur un ouvert épointé $U \setminus \{a\}$, présente en $z = a$ un **pôle simple** si l'on peut trouver $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq 0$, tel que $f(z) - \frac{\alpha}{z-a}$ a en $z = a$ une fausse singularité. Un seul α peut convenir puisque $\lim_{z\to a} \frac{1}{|z-a|} = \infty$. Plus généralement :

Définition 1 *On dira qu'une fonction f, analytique sur un ouvert épointé $U\setminus\{a\}$, présente en $z = a$ un* ***pôle d'ordre m*** *si l'on peut trouver $m \geq 1$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{C}$, $\alpha_m \neq 0$, tels que*

$$f(z) - \frac{\alpha_m}{(z-a)^m} - \cdots - \frac{\alpha_1}{z-a}$$

présente en $z = a$ une fausse singularité.

Je laisse en partie en exercice l'unicité de l'ordre m et des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{C}$. Pour l'ordre m l'unicité découlera du théorème suivant. La fraction rationnelle $\sum_{j=1}^{j=m} \frac{\alpha_j}{(z-a)^j}$ est dite **partie principale** ou **partie singulière** de la fonction f en $z = a$.

Théorème 2 *Pour qu'une fonction $f(z)$, analytique sur un ouvert épointé $U\setminus\{a\}$, présente en $z = a$ un pôle il est nécessaire et suffisant que $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$. L'ordre m de a comme pôle de f est égal à la multiplicité de a comme zéro de $\frac{1}{f}$.*

On remarquera que si $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$ il existe un disque épointé $D^*(a, r)$ sur lequel f ne s'annule pas. La fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ définie sur $D^*(a, r)$ a une fausse singularité en $z = a$, puisque $\lim_{z\to a} g(z) = 0$. Comme $g(a)$ doit être définie par $g(a) = \lim_{z\to a} g(z) = 0$ c'est que $g(a) = 0$. La fonction g ne s'annule dans le disque $D(a, r)$ qu'au point a, donc elle n'est pas identiquement nulle, et a a une certaine multiplicité m finie comme zéro de g c'est-à-dire, avec une certaine constante $c \neq 0$ et des coefficients $e_j \in \mathbf{C}$:

$$g(a + h) = c \cdot h^m \cdot (1 + e_1 h + e_2 h^2 + \dots)$$

La série entière

$$1 + f_1 h + f_2 h^2 + \cdots = \frac{1}{1 + e_1 h + e_2 h^2 + \dots}$$

aura elle aussi un rayon de convergence au moins égal à r. On écrit alors pour $0 < |h| < r$:

$$f(a + h) = \frac{1}{g(a + h)} = \frac{1}{c} \cdot h^{-m} \cdot \left(1 + f_1 h + f_2 h^2 + \dots\right)$$
$$= \frac{c^{-1}}{h^m} + \frac{c^{-1} f_1}{h^{m-1}} + \cdots + \frac{c^{-1} f_{m-1}}{h} + c^{-1} f_m + c^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} f_{m+k} h^k \,,$$

et cela montre que f possède en a un pôle d'ordre m au sens de la définition donnée plus haut.

Réciproquement si l'on peut trouver $m \geq 1$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{C}$, $\alpha_m \neq 0$, tels que

$$f(z) - \frac{\alpha_m}{(z-a)^m} - \dots - \frac{\alpha_1}{z-a}$$

présente en $z = a$ une fausse singularité alors c'est qu'il existe $R > 0$ et une série entière $\sum_{k \geq 0} a_k h^k$ telle que pour $0 < |h| < R$ on a :

$$f(a+h) = \frac{\alpha_m}{h^m} + \dots + \frac{\alpha_1}{h} + a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots$$

La fonction holomorphe $g(a+h) = \alpha_m + \alpha_{m-1} h + \dots + \alpha_1 h^{m-1} + a_0 h^m + a_1 h^{m+1} + \dots$ vérifie $\lim_{z \to a} g(z) = \alpha_m \neq 0$, donc, pour $|h|$ suffisamment petit on a $|g(a+h)| \geq \frac{1}{2}|\alpha_m|$ ce qui implique $|f(a+h)| \geq \frac{|\alpha_m|}{2|h|^m}$ et ainsi $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$. Le théorème est établi.

Un petit mot de terminologie : lorsqu'une fonction f est analytique sur un disque épointé $D^*(a,r) = D(a,r) \setminus \{a\}$ $(r > 0)$ on dit qu'elle présente en a une **singularité isolée**. Nous avons vu que si $|f|$ est bornée dans un voisinage de a, la singularité n'est qu'apparente, elle peut être effacée en définissant convenablement $f(a)$, et que lorsque $|f| \to \infty$ pour $z \to a$ on a une singularité polaire, avec un ordre $m \geq 1$ et une partie singulière $\frac{\alpha_m}{(z-a)^m} + \dots + \frac{\alpha_1}{z-a}$ uniquement déterminés. Il est alors aisé de donner un exemple d'une fonction avec une singularité isolée qui n'est pas un pôle : prenons $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$ et $a = 0$. Avec $z_n = \frac{1}{\pi n}$ on a $f(z_n) = 0$ et $z_n \to 0$. Donc la singularité ne peut pas être effacée puisque 0 serait un point d'accumulation de zéros, et donc f devrait être identiquement nulle. Ce n'est pas non plus une singularité polaire puisque $\lim |f| = \infty$ est impossible à cause des z_n. On dit que l'on a une **singularité essentielle**. Si la fonction $\exp(\frac{1}{z})$ présentait en $z = 0$ une fausse singularité ou un pôle il en irait de même pour $\sin(\frac{1}{z}) = (\exp(\frac{i}{z}) - \exp(-\frac{i}{z}))/2i$, donc la fonction $\exp(\frac{1}{z})$ est un autre exemple présentant en $z = 0$ une singularité essentielle.

Nous ajouterons quelques précisions en une autre occasion mais résumons déjà ce que nous avons appris : *une singularité isolée d'une fonction holomorphe f en $z = a$ peut être de trois types :*[2]

2. la considération de fonctions telles $\log(z)$ ou z^a $(a \notin \mathbf{Z})$ élargit le champ des singularités possibles, mais ces fonctions sont « multi-valuées », elles changent lorsqu'on les prolonge de proche en proche en faisant un tour complet de l'origine. L'origine $z = 0$ n'est donc pas une singularité isolée pour ces fonctions au sens de notre définition précédente.

1. *la fausse singularité : c'est le cas lorsque $|f|$ est bornée dans un voisinage de a (par le théorème de Riemann f peut alors être prolongée par continuité en a et est en fait alors holomorphe y-compris en a),*
2. *la singularité polaire ; c'est le cas lorsque $|f|$ tend vers $+\infty$ en a,*
3. *la singularité essentielle : $|f(z)|$ n'est pas borné mais ne tend pas non plus vers $+\infty$ lorsque z tend vers a.*

Comme exemple type de formation d'une fonction avec un pôle considérons le quotient $k(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ de deux fonctions holomorphes. Si a n'est pas un zéro de g alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe en a. Si a est un zéro de multiplicité m de g alors la situation dépend aussi de sa multiplicité n comme zéro de f :[3] on aura $k(z) \sim_{z\to a} \alpha(z-a)^{n-m}$ pour un certain $\alpha \neq 0$, donc si $n \geq m$ on a une fausse singularité (en fait un zéro d'ordre $n-m$), et si $n < m$ on a un pôle d'ordre $m-n$.

Signalons également que si f_1 et f_2 ont en a des pôles d'ordres n_1 et n_2 alors $f_1 f_2$ aura un pôle d'ordre $n_1 + n_2$. En ce qui concerne la somme $f_1 + f_2$ (ou toute autre combinaison linéaire à coefficients non nuls) si $n_1 \neq n_2$ elle aura un pôle d'ordre $\max(n_1, n_2)$, mais si $n_1 = n_2$ elle peut aussi n'avoir qu'une fausse singularité en a ou encore un pôle d'ordre inférieur à n_1.

Pour en terminer provisoirement, signalons le cas intéressant du quotient $\frac{f'}{f}$, aussi appelé « dérivée logarithmique » de f. Si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{f'}{f}$ est régulière[4] en a. Si $f(a) = 0$ et a est de multiplicité m comme zéro de f, alors a est de multiplicité $m-1$ comme zéro de f' et donc est un pôle simple de $\frac{f'}{f}$: *la dérivée logarithmique d'une fonction f holomorphe sur un ouvert U n'a dans U que des singularités isolées (ce sont les zéros de f) et ce sont des pôles simples.* Il est remarquable par ailleurs que si f présente un pôle d'ordre n en a alors f' a en a un pôle d'ordre $n+1$ (exercice !) donc dans ce cas aussi $\frac{f'}{f}$ a un pôle simple en $z = a$. Ainsi : *les points où f est régulière et non nulle sont des points réguliers de $\frac{f'}{f}$ tandis que les zéros et les pôles de f donnent des pôles simples de $\frac{f'}{f}$.* De plus je signale que si f a une singularité essentielle en a alors $\frac{f'}{f}$ peut avoir un pôle (exemple : $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$) ou une singularité essentielle (exemple : $f(z) = \exp(\exp(\frac{1}{z}))$) ou une singularité non-isolée (exemple : $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$). Par contre elle ne peut ni être régulière, ni avoir un pôle simple

3. rappelons que par convention $n = 0$ si $f(a) \neq 0$. Évidemment on a exclu le cas $f \equiv 0$.
4. l'expression « régulière en a » est synonyme de « holomorphe en a ».

en a. La démonstration en sera demandée dans une feuille de travail (bon, en réalité, disons que je laisse la démonstration aux gens très motivés).

Définition 2 *Soit U un ouvert. Une fonction f* ***méromorphe*** *sur U est la donnée d'un sous-ensemble $A \subset U$ qui n'a pas de point d'accumulation dans U*[5] *et d'une fonction f holomorphe sur $U \setminus A$ qui a un pôle en chaque élément de A.*

Autrement dit une fonction méromorphe sur un ouvert est une fonction holomorphe, sauf qu'elle a le droit d'avoir des singularités isolées qui doivent être des pôles. On démontre que toute fonction méromorphe est de la forme $\frac{f}{g}$ avec f et g holomorphes, mais ce n'est pas facile (corollaire de théorèmes de Weierstrass et/ou Mittag-Leffler).

2 De la Série Binomiale à la fonction Gamma (I)

Dans le reste de ce chapitre nous allons laisser un peu de côté la théorie générale des fonctions holomorphes. Revenons à la série de Newton :

$$(1+h)^a = 1 + ah + \frac{a(a-1)}{2}h^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}h^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}h^n$$

Avec le symbole de Pochhammer $(a)_n = \prod_{0\leq j<n}(a+j)$,[6] elle s'écrit

$$(1+h)^a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-a)_n}{n!}h^n$$

Nous étudierons donc, par commodité, plutôt :

$$(1-h)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!}h^n$$

Si $-a$ est un entier naturel, cette série est un polynôme. Sinon les coefficients sont tous non nuls et le rayon de convergence est 1. Nous posons la question : *pour quels h de module 1 la série est-elle convergente ? et quand est-elle absolument convergente ?*

5. vous demanderez à votre Professeur(e) de Topologie de vous demander de montrer que cela équivaut à demander que A soit fermé dans U et discret (chaque point de A est isolé dans A) ; et aussi que tout tel A est dénombrable (vide, fini, ou infini).
6. $(a)_0 = 1$, $(a)_1 = a$, $(a)_2 = a(a+1)$, etc. . . .

Notons $d_n = \frac{(a)_n}{n!}$. Pour répondre à ces questions nous avons besoin de comprendre le comportement de d_n lorsque $n \to \infty$. Comme d_n dépend de a on le notera aussi parfois $d_n(a)$. Nous allons étudier cette question pour a complexe quelconque. Dans les sections qui suivent nous allons établir le théorème suivant :

Théorème 3 *Pour tout a complexe la limite*

$$L(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{(a)_n/n!}{n^{a-1}} = \lim \frac{d_n(a)}{n^{a-1}}$$

existe. Cette limite est atteinte uniformément par rapport à a sur tout disque $D(0,R)$, $R < \infty$. La fonction limite est donc une fonction entière de $a \in \mathbf{C}$. Ses seuls zéros sont en $a = 0$, $a = -1$, $a = -2$, ... et ce sont des zéros simples.[7] *La fonction $\Gamma(a) = \frac{1}{L(a)}$ est donc une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, dont les pôles sont tous simples et sont situés aux entiers négatifs. La fonction Γ vérifie :*

$$\begin{aligned} &\forall a \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N}) \qquad \Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{a-1}}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \\ &\forall a \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N}) \qquad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$. Pour $x \to 0$ on a $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$.

La fonction Γ a été inventée par Euler[8], la notation par la lettre Gamma ayant été introduite un peu plus tard, je crois, par Legendre : Euler, lui, utilisait plutôt $\Pi(a) = \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ qui vérifie $\Pi(n) = n!$ et qui a ses pôles en -1, -2, -3, ... Ceux de la fonction Gamma sont en 0, -1, -2, ... La formule du théorème donnant Γ comme limite est dite « formule de Gauss » : évidemment elle était connue d'Euler. Je vous laisse en

7. un zéro « simple » est un zéro de multiplicité 1.

8. Leonhard Euler, 1707-1783. Sans doute le mathématicien le plus prolifique de tous les temps. On n'a pas fini d'éditer ses Œuvres complètes (72 volumes). L'académie de St-Petersbourg continuait à publier cinquante ans après sa mort les manuscrits qu'il avait dictés de son vivant. Devenu presque complètement aveugle à l'âge de 59 ans, il a produit dans les vingt années qui suivirent près de la moitié de son Œuvre, des assistants prenant des notes sous sa dictée. Il fut le premier à considérer sin et cos comme des fonctions, et pas seulement géométriquement comme des cordes d'un arc de cercle. A introduit la notation $f(x)$ pour une fonction f d'une variable x, la notation e pour... e, la notation Σ pour les sommations, la notation i pour $\sqrt{-1}$, a découvert le lien entre sin, cos, exp, a développé la théorie du logarithme complexe, a inventé les fonctions Gamma et Beta, la sommation d'Euler-MacLaurin, ..., pour ne citer que les choses les plus directement liées à notre cours élémentaire. Il fut le premier à représenter une fonction algébrique par une série de Fourier (70 ans avant Fourier). Continuateur et approfondisseur de Newton et Leibniz, dont il fit une sorte de synthèse, il a contribué de manière majeure à tous les domaines de la Physique et de la Mathématique de son temps.

exercice (facile) l'équivalence avec le produit infini [9] donné par Euler :

$$\Pi(a) = a\Gamma(a) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^a}{1+\frac{a}{k}}$$

Un autre produit infini (que nous n'étudierons pas dans ce chapitre) a été pris comme point de départ au dix-neuvième siècle par Weierstrass : évidemment la formule de Weierstrass [10] était bien connue d'Euler. Il se trouve, pour diverses raisons, que c'est la fonction méromorphe Γ que l'on utilise habituellement, et non pas son inverse L qui a pourtant l'avantage d'être une fonction entière. La raison la plus simple est sans doute à trouver dans les formules $\Gamma(n) = (n-1)!$, et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. De toute façon maintenant cette habitude est ancrée de manière indélébile chez les mathématiciens mais il y a parfois intérèt à ne pas oublier que $\frac{1}{\Gamma}$ est intéressante, aussi. Le bilan des courses depuis son invention au dix-huitième siècle par Euler est que cette fonction Gamma est (quasi)-aussi importante en Analyse que les fonctions exponentielle, logarithme, sinus et cosinus.

3 Formule des Compléments, Produit infini pour sinus, Nombres de Bernoulli

Avant d'aborder dans la prochaine section la démonstration nécessaire de l'équivalent asymptotique $\frac{(a)_n}{n!} \sim \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}$ et de l'holomorphie de la fonction Gamma, puis de revenir au problème de la convergence sur le cercle $|h| = 1$ de la série binomiale, je ne peux pas m'empêcher d'évoquer dès maintenant la superbe **formule des compléments** (évidemment, due à Euler) :

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

A posteriori, on n'a pas à être surpris : $f(a) = L(a)L(1-a) = 1/\Gamma(a)\Gamma(1-a)$ est une fonction entière dont les zéros sont les entiers $a \in \mathbf{Z}$, exactement comme $\sin(\pi a)$. De plus $f(a+1) = L(a+1)L(-a) = L(a)\frac{1}{a}L(-a) = -L(a)L(1-a) = -f(a)$, tout comme $\sin(\pi a)$. Enfin $f(x) \sim_{x\to 0} x$ (car $L(1) = 1$), exactement comme $\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$. Donc on n'est pas surpris que les deux choses soient identiques, mais bien sûr il faudra une preuve rigoureuse : nous ne la donnerons que dans un autre chapitre. En attendant nous pouvons exploiter la formule

9. pour le moment tout ce que nous avons à savoir sur la notion de produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} c_k$ c'est que sa définition est $\prod_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{K\to\infty} c_1c_2\dots c_K$ si cette limite existe.

10. $\Gamma(a)^{-1} = ae^{\gamma a}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{a}{n})e^{-a/n}$ avec $\gamma = \lim(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \log n) = 0.577\dots$.

$a\Gamma(a) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{k})^a}{1+\frac{a}{k}}$ pour exprimer de manière équivalente la formule des compléments :

$$a\Gamma(a)(-a)\Gamma(-a) = a\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi a}{\sin(\pi a)}$$

$$\text{et} \quad a\Gamma(a)(-a)\Gamma(-a) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^a}{1+\frac{a}{k}} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-a}}{1-\frac{a}{k}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{a^2}{k^2}}$$

La formule des compléments est donc équivalente (on remplace πa par z) à :

$$\frac{z}{\sin(z)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}}$$

ou encore au célèbre **produit infini de Euler :**

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad \sin(z) = z\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2})$$

Voyons comment Euler a rêvé cette extraordinaire formule : l'idée (fantastique !) est de traiter $\sin(z)$ comme un polynôme, mais un polynôme qui aurait un degré infini (puisqu'il a un nombre infini de racines). Pour un polynôme $P(z)$ de racines z_1, z_2, …, z_N, on a $P(z) = C(z-z_1)\cdots(z-z_N)$ avec une certaine constante non nulle C. Cela suggère :

$$\sin(z) = Cz\cdot(z-\pi)(z+\pi)\cdot(z-2\pi)(z+2\pi)\cdot(z-3\pi)(z+3\pi)\cdots$$

En divisant par z et en faisant $z=0$ on obtient une étrange formule

$$1 = C(-\pi^2)(-4\pi^2)(-9\pi^2)\cdots\ ,$$

qui n'a aucun sens puisque le produit est en valeur absolue de plus en plus grand. Néanmoins, divisons la formule précédente (tout aussi absurde) par ce produit divergent, il vient :

$$\sin(z) = z\cdot(1-\frac{z}{\pi})(1+\frac{z}{\pi})\cdot(1-\frac{z}{2\pi})(1+\frac{z}{2\pi})\cdots = z\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2})$$

Nous reviendrons plus tard sur la théorie générale des produits infinis, je ne veux pas trop m'attarder sur eux à ce stade. [11] Encore une remarque tout de même, reprenons la formule

11. si vous vous demandez si le résultat de factorisation de Euler marche pour toutes les fonctions entières, la réponse est oui et non. Non, car en général même si l'on peut former un produit infini comme Euler avec les zéros d'une fonction entière $f(z)$, toute fonction $\exp(g(z))f(z)$ a les mêmes zéros que f ; donc, pour en revenir à sin la connaissance de ses zéros permet a priori uniquement d'affirmer l'existence d'une formule du type $\sin(z) = e^{g(z)}z\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2})$, il faut d'autres arguments pour montrer ensuite que $g\equiv 0$. Oui car Hadamard a déterminé pour quelle classe de fonctions on peut factoriser comme Euler a fait avec la fonction sinus. Oui encore grâce à un théorème de Weierstrass qui s'applique à toutes les fonctions entières, en utilisant des facteurs plus compliqués que $(1-z/\rho)$, tels que par exemple $(1-z/\rho)\exp(z/\rho+z^2/2\rho^2)$, pour les zéros ρ de f (Hadamard utilise aussi ces facteurs, mais de manière plus restreinte que Weierstrass, donc lorsque la fonction autorise de procéder comme Hadamard, le produit infini donne plus d'informations).

sous la forme :

$$\frac{z}{\sin z} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}}$$

On a envie d'écrire, mais ici encore il faudrait une discussion des produits infinis :

$$\frac{z}{\sin z} = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2} + \frac{z^4}{k^4\pi^4} + \frac{z^6}{k^6\pi^6} + \dots) = 1 + \frac{z^2}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} + \frac{z^4}{\pi^4}(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^4} + \sum_{1\leq k<l}\frac{1}{k^2}\frac{1}{l^2}) + \dots$$

que l'on peut comparer à

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \dots .$$

Si tout pouvait être justifié, cela répondrait en tout cas à notre question sur la positivité des coefficients de la série pour $\frac{z}{\sin z}$! Mieux encore nous obtenons :

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Lorsqu'Euler a obtenu cette formule cela faisait une cinquantaine d'années que la question de sommer $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ était ouverte dans les cercles savants de l'époque. Lui-même y avait déjà travaillé plusieurs années ! Le lien ainsi découvert entre la somme $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ et le nombre π lié au cercle via l'étude de la fonction sinus est, encore aujourd'hui, un assez fascinant sujet de méditation. [12] Il y a d'autres méthodes, mais la plus belle reste celle que je viens d'esquisser. Si nous avons confiance en cette méthodologie, alors c'est qu'aussi :

$$\begin{aligned}\frac{7\pi^4}{360} &= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^4} + \sum_{1\leq k<l}\frac{1}{k^2}\frac{1}{l^2} = \frac{1}{2}\left(2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^4} + \sum_{1\leq k<l}\frac{1}{k^2}\frac{1}{l^2} + \sum_{1\leq l<k}\frac{1}{k^2}\frac{1}{l^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^4} + \sum_{k\geq 1, l\geq 1}\frac{1}{k^2}\frac{1}{l^2}\right) = \frac{1}{2}(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^4} + \frac{\pi^4}{36})\end{aligned}$$

et donc :

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^4} = \frac{14\pi^4}{360} - \frac{10\pi^4}{360} = \frac{\pi^4}{90}$$

On peut imaginer obtenir ainsi $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^6}$, $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^8}$, etc..., mais il est bien plus efficace pour cela de travailler avec, pour $|z|$ petit : [13]

$$\log\frac{z}{\sin(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} -\log(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\frac{z^{2j}}{k^{2j}\pi^{2j}} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2j}})\frac{z^{2j}}{\pi^{2j}}$$

12. fascination d'autant plus renforcée par d'autres très célèbres produits infinis de Euler : $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-2}}$, $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-3}}$, etc..., les produits portant sur les **nombres premiers** 2, 3, 5, 7, 11, ...
13. vous l'aurez compris, nous sommes dans la section où l'on remet à une autre occasion les justifications nécessaires.

$$\frac{d}{dz}\log\frac{z}{\sin(z)} = \frac{1}{z} - \frac{\cos z}{\sin z} = 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{2j}}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2j}})z^{2j-1}$$

Ainsi :

$$\frac{\cos z}{\frac{\sin z}{z}} = 1 - 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{2j}}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2j}})z^{2j}$$

et il suffit de procéder à la division suivant les puissances croissantes de $1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\dots$ par $1-\frac{1}{6}z^2+\frac{1}{120}z^4-\dots$ pour obtenir les valeurs de $\frac{1}{\pi^{2j}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2j}}$ qui sont donc des nombres rationnels. Mon logiciel de calcul formel me dit que :

$$\frac{z\cos(z)}{\sin(z)} = 1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 - \frac{2}{945}z^6 - \frac{1}{4725}z^8 - \frac{2}{93555}z^{10} - \dots ,$$

ce qui donne

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90},\ \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945},\ \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450},\ \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

Le suivant est un peu plus compliqué :

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$$

Toutes ces valeurs furent données par Euler vers 1735. Son résultat définitif, obtenu vers 1739 est le suivant :

Les **Nombres de Bernoulli** sont **définis** par le développement en série entière à l'origine :

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j\frac{t^j}{j!} ,$$

soit $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$, $B_{14} = \frac{7}{6}$, $B_{16} = -\frac{3617}{510}$, $B_{18} = \frac{43867}{798}$, $\dots$.[14] On les obtient en faisant la division suivant les puissances croissantes de 1 par $1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{24}t^3+\dots$, ou encore par les relations de récurrence traduisant l'identité $1 = (\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{(i+1)!})(\sum_{j=0}^{\infty}B_j\frac{t^j}{j!})$. Les nombres de Bernoulli d'indices impairs sont nuls, sauf B_1, car la fonction $\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}$ est paire.[15] On

14. les Bernoulli et Euler se sont arrachés les cheveux à essayer de comprendre ces nombres, au comportement à la fois erratique et prévisible. Les identités d'Euler plus bas et la formule de Stirling (annexe) permettent de voir en tout cas $|B_{2j}| \sim 2(2j)!(2\pi)^{-2j} \sim 4\sqrt{\pi j}(j/\pi e)^{2j}$. On a donc $|B_{2j+2}/B_{2j}| \sim (j/\pi)^2$.

15. dans la littérature classique le $j^{\text{ème}}$ nombre de Bernoulli est ce qui est noté ici $(-1)^{j-1}B_{2j}$. On s'est depuis accordé pour la convention utilisée ici. Les nombres de Bernoulli apparaissent dans le problème de trouver pour les sommes de puissances $1^j+2^j+\dots+n^j$ des formules analogues à $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$.

peut en effet écrire :

$$\frac{t}{2}\,\frac{e^{t/2}+e^{-t/2}}{e^{t/2}-e^{-t/2}} = \frac{t}{2}\frac{e^t+1}{e^t-1} = \frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2} \qquad (\text{donc}, \ = 1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}}{(2j)!}t^{2j})\ .$$

En remplaçant t par $2iz$ cela donne :

$$z\frac{\cos z}{\sin z} = 1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{B_{2j}\,2^{2j}}{(2j)!}z^{2j}$$

En comparant avec notre ancienne formule, nous obtenons les identités d'Euler :

$$\forall j\geq 1 \quad \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2j}} = \frac{2^{2j-1}(-1)^{j-1}B_{2j}}{(2j)!}\,\pi^{2j}$$

Euler a essayé en vain de trouver des formules aussi explicites pour les sommes $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2j+1}}$, mais ces quantités demeurent mystérieuses aujourd'hui encore. En 1978, Apéry a montré que $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3}$ était un nombre irrationnel. Plus récemment, en 2000, Rivoal a montré qu'il existait une infinité de j tels que $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2j+1}}$ est irrationnel. Mais (septembre 2005) on ne sait pas prouver aujourd'hui que $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^5}$ est un nombre irrationnel. On conjecture que les nombres $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2j+1}}$ sont tous transcendants, et ne sont liés entre eux par aucune relation polynomiale à coefficients rationnels (ou même avec des puissances de π). Mais (septembre 2005) on ne sait pas prouver aujourd'hui que $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3}$ est un nombre transcendant.

4 De la Série Binomiale à la fonction Gamma (II)

Il est temps de faire l'étude de $d_n = \frac{(a)_n}{n!}$. Nous supposerons (provisoirement) $a \notin (-\mathbf{N})$ car alors $\forall n\ d_n \neq 0$. On a (pour $n\geq 2$) :

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{n+a}{n+1} = \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{a-1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1+\frac{a-1}{n}(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\dots)$$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = 1+\frac{a-1}{n}-\frac{a-1}{n^2}+\dots$$

Cela suggère de comparer d_n à $e_n = n^{a-1}$. En effet :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = (1+\frac{1}{n})^{a-1} = 1+\frac{a-1}{n}+\frac{(a-1)(a-2)}{2n^2}+\dots$$

Donc en posant $u_n = \frac{d_n}{e_n} = \frac{(a)_n}{n!n^{a-1}}$ on a un développement :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\frac{a-1}{n}-\frac{a-1}{n^2}+\dots}{1+\frac{a-1}{n}+\frac{(a-1)(a-2)}{2n^2}+\dots} = 1-\frac{(a-1)a}{2n^2}+\dots$$

Comme nous allons le voir le fait d'avoir un premier terme en $\frac{1}{n^2}$ plutôt qu'en $\frac{1}{n}$ fait toute la différence car cela permet de prouver l'existence de la limite $L = \lim u_n$ et aussi de contrôler la taille de $\frac{u_n}{L}$ en l'écrivant sous la forme

$$\frac{u_n}{L} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \cdot \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} \cdots$$

Revenons d'abord à la formule exacte pour $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (qui vaut $\frac{d_{n+1}}{d_n}\frac{e_n}{e_{n+1}}$) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+1}\frac{n^{a-1}}{(n+1)^{a-1}} = (1+\frac{a}{n})(1+\frac{1}{n})^{-a}$$

Pour une raison qui va apparaître dans une seconde, imposons $n \geq 2|a|+2$. On a alors en tout cas $|\frac{a}{n}| \leq \frac{1}{2}$ (et aussi $|\frac{1}{n}| \leq \frac{1}{2}$ ...) et on peut écrire $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp(v_n)$ avec

$$v_n = \mathrm{Log}(1+\frac{a}{n}) - a\,\mathrm{Log}(1+\frac{1}{n})$$

Plutôt que d'utiliser la série de $\mathrm{Log}(1+h)$ il se trouve qu'il est plus simple de poser, pour $|\epsilon| \leq (2|a|+2)^{-1}$ (donc tel que $|\epsilon| \leq \frac{1}{2}$ et $|\epsilon||a| \leq \frac{1}{2}$) :

$$f(\epsilon) = \mathrm{Log}(1+a\epsilon) - a\,\mathrm{Log}(1+\epsilon) = \int_{[0,\epsilon]} \left(\frac{a}{1+aw} - \frac{a}{1+w}\right) dw = \int_{[0,\epsilon]} \frac{a(1-a)w}{(1+aw)(1+w)}\, dw$$

On en déduit (via $|1+aw| \geq \frac{1}{2}$, $|1+w| \geq \frac{1}{2}$) :

$$|f(\epsilon)| \leq |a(1-a)| 4 \int_0^{|\epsilon|} u du = 2|a(1-a)||\epsilon|^2$$

En conclusion :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (1+\frac{a}{n})(1+\frac{1}{n})^{-a} = e^{v_n} \qquad \text{avec, pour } n \geq 2|a|+2, \quad |v_n| \leq \frac{2|a(1-a)|}{n^2}$$

Tout étant mis en place, considérons maintenant $R > 0$, imposons à a de vérifier $|a| < R$, choisissons N le plus petit entier $\geq 2R+2$ et considérons pour chaque $n \geq N$ les fonctions holomorphes dans $D(0,R)$:

$$v_n(a) = \mathrm{Log}(1+\frac{a}{n}) - a\,\mathrm{Log}(1+\frac{1}{n})$$

On n'impose plus à a de ne pas être dans $-\mathbf{N}$. Grâce à notre majoration de $|v_n|$ nous savons que la série

$$R_N(a) = \sum_{n=N}^{\infty} v_n(a)$$

est normalement convergente. Elle définit donc une fonction holomorphe sur le disque $D(0,R)$. On en déduit [16] que la limite

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_m(a)}{u_N(a)} = \lim_{m\to\infty}\frac{u_{N+1}(a)}{u_N(a)}\cdots\frac{u_m(a)}{u_{m-1}(a)} = \lim_{m\to\infty} e^{v_N(a)+\cdots+v_{m-1}(a)} = e^{R_N(a)}$$

existe, et est une fonction holomorphe non-nulle sur $D(0,R)$. Cela donne l'existence, pour tout $a\in D(0,R)$, de

$$\lim_{m\to\infty} u_m(a) = u_N(a)e^{R_N(a)}$$

et le fait qu'il s'agit d'une fonction holomorphe sur $D(0,R)$ dont les zéros sont ceux de $u_N(a)$, c'est-à-dire les entiers négatifs dans $D(0,R)$, et que ce sont des zéros de multiplicité un. Autrement dit $\lim_{m\to\infty}\frac{(a)_m}{m!m^{a-1}} = u_N(a)e^{R_N(a)}$ existe. [17]

Comme $R>0$ est arbitraire nous avons prouvé l'existence pour tout a complexe de $L(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a)_n}{n!n^{a-1}}$, nous avons établi que L est une fonction entière dont les seuls zéros sont aux entiers négatifs ou nul et qu'ils sont simples.

En posant $\Gamma(a)=\frac{1}{L(a)}$ on a donc une fonction méromorphe dans le plan complexe dont les pôles sont simples et sont aux entiers négatifs ou nul. Pour $a\notin(-\mathbf{N})$ on a l'équivalent asymptotique :

$$\frac{a.(a+1).\cdots.(a+n-1)}{1.2.\cdots.n} = \frac{(a)_n}{n!} \sim_{n\to\infty} \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}$$

On peut être plus précis. Fixons a et prenons $n\geq 2(|a|+1)$. D'après ce qui précède :

$$\frac{\Gamma(a)(a)_n}{n!n^{a-1}} = \frac{u_n}{L(a)} = \lim_{m\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\cdots\frac{u_m}{u_{m+1}} = \lim_{m\to\infty} e^{-v_n(a)-\cdots-v_m(a)} = e^{-\sum_{k=n}^\infty v_k(a)}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$n\geq 2(|a|+1) \implies \qquad \frac{(a)_n}{n!} = \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{r_n(a)}$$

avec $r_n(a) = -\sum_{k=n}^\infty v_k(a)$, donc (on utilise $\sum_{k=n}^\infty\frac{1}{k^2}\leq\int_{n-1}^\infty\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{n-1}$) :

$$|r_n(a)| \leq \sum_{k=n}^\infty \frac{2|a(1-a)|}{k^2} \leq \frac{2|a(1-a)|}{n-1} \leq \frac{4|a||a-1|}{n}$$

Cela vaut la peine de récapituler tous nos efforts en un beau théorème :

16. note : $\frac{u_m(a)}{u_N(a)}$ est régulier aussi pour $a\in(-\mathbf{N})\cap D(0,R)$ si $m\geq N$.
17. la dépendance du terme de droite en N n'est qu'apparente puisque le terme de gauche ne fait pas intervenir N.

Théorème 4 *Le produit infini :*

$$L(a) = a \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{a}{k}) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-a}$$

converge pour tout nombre complexe $a \in \mathbf{C}$ et définit une fonction entière sur $\mathbf{C}$ dont les zéros sont simples et sont en $a = 0, -1, -2, \ldots$. La fonction méromorphe $\Gamma(a) = \frac{1}{L(a)}$ est appelée ***fonction Gamma d'Euler****. Elle est aussi donnée par la formule (dite « de Gauss ») :*

$$\forall a \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N}) \qquad \Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\; n^{a-1}}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} = \lim \frac{n! n^{a-1}}{(a)_n}$$

Plus précisément, on a pour tout $a \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ et pour tout entier $n \geq 2|a| + 2$:

$$\frac{(a)_n}{n!} = \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}\, e^{r_n} \qquad \text{avec } |r_n| \leq \frac{4|a||a-1|}{n}$$

En particulier les coefficients de la série de Newton

$$(1-h)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} h^n$$

ont le comportement asymptotique

$$\frac{(a)_n}{n!} \sim_{n\to\infty} \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)} \,.$$

Bon, peut-être dois-je encore justifier l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)\ ?$$

Il suffit d'utiliser la « formule de Gauss » pour voir que

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \lim \frac{n!\; n^a}{(a+1)\cdots(a+n)} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!\; n^{a-1}} = \lim \frac{an}{a+n} = a$$

Il est commode de remarquer que $\Gamma(a)a(a+1)\ldots(a+n-1) = \Gamma(a+1)(a+1)\ldots(a+n-1) = \Gamma(a+2)(a+2)\ldots(a+n-1) = \cdots = \Gamma(a+n)$:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

En utilisant $a = 1$ et $\Gamma(1) = 1$, on voit que $\Gamma(n+1) = n!$. Notre équivalent asymptotique peut aussi s'écrire sous la forme : $\Gamma(a+n) \sim_{n\to\infty} n! n^{a-1} = n^a (n-1)!$. Comme $\Gamma(n) = (n-1)!$, cela donne :

$$\Gamma(a+n) \sim_{n\to\infty} n^a \Gamma(n)$$

sans doute la forme la plus commode à mémoriser. Cette forme nous incite aussi à rechercher une formule asymptotique pour $\Gamma(n) = (n-1)!$. C'est la fameuse formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (\text{donc } \Gamma(n) \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n-\frac{1}{2}}\, e^{-n}\ )$$

Une démonstration de la formule de Stirling est proposée en annexe. Nous y reviendrons plus tard, en problèmes ou dans un autre chapitre, lorsque nous établirons la version complexe de la formule de Stirling, c'est-à-dire un équivalent asymptotique de $\Gamma(s)$ pour les grandes valeurs de $|s|$, non seulement pour s entier, ou même réel, mais complexe. Mais le faire ici dès maintenant serait trop ambitieux.

5 Convergence de la Série Binomiale

L'équivalent $\frac{(a)_n}{n!} \sim_{n\to\infty} \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}$ nous permet de répondre à la question (posée pour $a \notin (-\mathbf{N})$) de la convergence absolue de la série $\sum \frac{(a)_n}{n!} h^n$ pour $|h| = 1$, c'est-à-dire de la convergence de $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{(a)_n}{n!}\right|$. Deux séries à termes positifs équivalents convergent ou divergent ensemble, donc il s'agit d'examiner $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}\right|$, ou encore $\sum_{n\geq 0} n^{\mathrm{Re}(a)-1}$: il y a convergence pour $\mathrm{Re}(a) < 0$ et divergence pour $\mathrm{Re}(a) \geq 0$ ($a \neq 0$).

Dans le cas $\mathrm{Re}(a) < 0$ la série $\sum \frac{(a)_n}{n!} h^n$ est ainsi normalement convergente pour $|h| \leq 1$ et sa somme est donc une fonction continue de h sur ce disque fermé. Comme pour $|h| < 1$ on a la formule $(1-h)^{-a} = e^{-a\,\mathrm{Log}(1-h)}$, la formule reste valable par continuité pour $|h| = 1$. Pour $h = 1$, il faut regarder d'un peu plus près ce que cela donne : pour déterminer $\sum \frac{(a)_n}{n!}$ nous prenons la limite pour $h \to 1$, $|h| < 1$, de $e^{-a\,\mathrm{Log}(1-h)}$. Nous contentant de $0 < h < 1$, h réel donc, nous écrivons[18] $|(1-h)^{-a}| = (1-h)^{-\mathrm{Re}(a)}$ qui a pour limite 0 lorsque $h \to 1, 0 < h < 1$, car $-\mathrm{Re}(a) > 0$. Nous obtenons donc (et c'est valable aussi pour $a = -1, -2, -3, \dots$) :

$$\mathrm{Re}(a) < 0 \implies \qquad 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} = 1 + a + \frac{a(a+1)}{2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{6} + \dots$$

Ce résultat est notable car il montre que les séries du type $\sum_n c_n P_n(z)$ avec P_n un polynôme de degré n[19] peuvent se comporter très différemment des séries de monômes $\sum_n c_n z^n$: ici la

18. attention au module $|z^w|$ d'une puissance complexe d'un nombre complexe : ce n'est certainement pas $|z|^{|w|}$ en général et ce n'est $|z|^{\mathrm{Re}(w)}$ que lorsque z est réel positif.
19. ici donc, $P_n(z) = z(z+1)\dots(z+n-1)$.

série donne identiquement 0 alors que les coefficients ne sont pas nuls. De plus son domaine de convergence absolue est un demi-plan (union un point) et non pas un disque.

Nous allons voir que pour $\mathrm{Re}(a) \geq 0$ non seulement la série ne converge pas absolument, elle ne converge pas du tout (sauf pour $a = 0$) :

Théorème 5 *Soit $a \in \mathbf{C}$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!}$ est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(a) < 0$ et aussi pour $a = 0$: sa somme vaut 0 pour $\mathrm{Re}(a) < 0$ et 1 pour $a = 0$. Pour les autres valeurs de a non seulement la série n'est pas absolument convergente, elle n'est pas convergente du tout.*

Le cas $\mathrm{Re}(a) < 0$ étant déjà traité et celui $a = 0$ étant trivial, il reste à examiner la situation pour $\mathrm{Re}(a) \geq 0$, $a \neq 0$. Il faut montrer que la série n'est pas convergente. Nous allons utiliser pour cela :

Théorème 6 (Abel) *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ une série convergente. On a :*

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ 0<z<1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ est au moins 1 puisque $\lim c_n = 0$ puisque $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge par hypothèse. Le théorème n'a d'intérêt que lorsque le rayon de convergence est exactement 1 (si il est > 1 il suffit d'invoquer la continuité dans le disque ouvert de convergence de la somme d'une série entière, qui résulte de la convergence normale dans tout sous-disque fermé borné de ce disque ouvert). Alors, Abel nous dit que la valeur de la somme pour $z = 1$ est la limite des valeurs lorsque z tend vers 1 par valeurs réelles inférieures. La démonstration du théorème d'Abel (avec un énoncé plus complet) est proposée en annexe. On peut remplacer 1 par n'importe quel nombre complexe w de module 1 à condition de faire tendre z vers w le long du rayon allant de 0 à w (il suffit d'appliquer le théorème avec les coefficients $c_n w^n$ au lieu des c_n ; l'hypothèse évidemment n'est plus la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mais celle de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$).

Nous appliquons ce théorème d'Abel à la série binomiale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} h^n$ qui vaut, pour $|h| < 1$, $(1-h)^{-a}$. Supposons $\mathrm{Re}(a) > 0$. Pour $0 < h < 1$ nous avons $|(1-h)^{-a}| =$

$(1-h)^{-\mathrm{Re}(a)}$ qui tend vers $+\infty$ pour $h \to 1$, donc par le théorème d'Abel la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!}$ ne peut pas être convergente.[20]

Il reste la situation avec $\mathrm{Re}(a) = 0$, $a \neq 0$. Écrivons $a = it$, avec $t \neq 0$. Alors, pour $0 < h < 1$, $(1-h)^{-a} = (1-h)^{-it}$ n'a pas de limite lorsque $h \to 1$ car en fait tous les nombres complexes de module 1 sont valeurs d'adhérence des $(1-h)^{-it}$ pour $h \to 1$. Par exemple en prenant $1 - h_n = e^{-2\pi n/t}$ les $(1-h_n)^{-it}$ valent tous 1 tandis que pour $1 - h'_n = e^{-2\pi(n+\frac{1}{2})/t}$ les $(1-h'_n)^{-it}$ valent tous -1. Le théorème 5 est établi.

Ayant ainsi réglé le cas $h = 1$, il reste les autres valeurs de h avec $|h| = 1$.

Théorème 7 *Soit $a \in \mathbf{C}$ et $|h| = 1$, $h \neq 1$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} h^n$ est :*

1. *absolument convergente pour* $\mathrm{Re}(a) < 0$, *et* $a = 0$,
2. *convergente mais pas absolument convergente pour* $0 \leq \mathrm{Re}(a) < 1$ $(a \neq 0)$,
3. *divergente pour* $\mathrm{Re}(a) \geq 1$.

Lorsqu'elle converge sa somme vaut $(1-h)^{-a} = e^{-a \,\mathrm{Log}(1-h)}$.

Nous avons déjà traité le cas $\mathrm{Re}(a) < 0$ et le cas $a = 0$ est trivial. Nous savons aussi déjà que la série n'est pas absolument convergente pour $0 \leq \mathrm{Re}(a)$ $(a \neq 0)$, car son terme général est équivalent en valeur absolue à $\frac{1}{|\Gamma(a)|} n^{\mathrm{Re}(a)-1}$. Il ne tend donc pas vers zéro pour $1 \leq \mathrm{Re}(a)$, et la série est nécessairement divergente pour ces valeurs de a. Il reste à montrer que la série est convergente pour $0 \leq \mathrm{Re}(a) < 1$. Que la valeur de sa somme soit $(1-h)^{-a} = e^{-a \,\mathrm{Log}(1-h)}$ sera alors assuré par le théorème d'Abel en prenant la limite pour $h' \to h$, $h' = th$, $0 < t < 1$, $t \to 1$.

Supposons donc $0 \leq \mathrm{Re}(a) < 1$ (et $a \neq 0$). Posons $d_n = \frac{(a)_n}{n!}$, $w_n = h^n$. Les sommes partielles $w_0 + w_1 + \cdots + w_N$ sont bornées, car

$$|w_0 + w_1 + \cdots + w_N| = |1 + h + \cdots + h^N| = \left|\frac{1 - h^{N+1}}{1-h}\right| \leq \frac{2}{|1-h|} \,.$$

Par ailleurs

$$d_{n+1} - d_n = (\frac{n+a}{n+1} - 1) d_n = \frac{(a-1) d_n}{n+1} \,.$$

20. lorsque a est réel, $a > 0$, la série est à termes positifs et on sait déjà qu'elle n'est pas (absolument) convergente. Mais pour a complexe, non réel, je ne vois pas d'argument qui soit beaucoup plus simple que celui utilisé ici. J'en vois bien d'autres, mais pas de nettement plus simples.

On sait que $|d_n|$ est à une constante multiplicative près équivalent à $n^{\mathrm{Re}(a)-1}$. Comme $\mathrm{Re}(a) < 1$ on a donc $\lim d_n = 0$, et aussi $|d_n - d_{n+1}|$ est équivalent à une constante multiplicative près à $n^{\mathrm{Re}(a)-2}$ pour $n \to \infty$ donc la série de terme général $d_n - d_{n+1}$ est absolument convergente. Par le critère d'Abel-Dirichlet la série $\sum_{n=0}^{\infty} d_n w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} h^n$ est donc une série convergente. La démonstration du critère d'Abel-Dirichlet est donnée en annexe.

6 Les intégrales Euleriennes

Reprenons la formule :

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{a-1}}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} = \lim_{N\to\infty} N^a \frac{N!}{a(a+1)\cdots(a+N)}$$

Considérons la décomposition en élément simples :

$$\frac{1}{a(a+1)\cdots(a+N)} = \frac{c_0}{a} + \frac{c_1}{a+1} + \cdots + \frac{c_N}{a+N}$$

Il est aisé de voir (en multipliant par $a+j$ puis en posant $a = -j$) que $c_0 = \frac{1}{N!}$, $c_1 = \frac{-1}{(N-1)!}$, $c_2 = \frac{+1}{2!(N-2)!}$, …, $c_j = \frac{(-1)^j}{j!(N-j)!}$, …, $c_N = \frac{(-1)^N}{N!}$, donc $c_j = (-1)^j \binom{N}{j} \frac{1}{N!}$ pour $0 \le j \le N$. Supposons dorénavant $\mathrm{Re}(a) > 0$, et utilisons les intégrales

$$\frac{1}{a} = \int_0^1 t^{a-1}\, dt, \quad \frac{1}{a+j} = \int_0^1 t^{a-1}\, t^j\, dt$$

On obtient :

$$\frac{1}{a(a+1)\cdots(a+N)} = \frac{1}{N!}\int_0^1 t^{a-1} \sum_{0\le j\le N} \binom{N}{j} (-t)^j\, dt = \frac{1}{N!}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^N\, dt$$

$$\text{donc :} \qquad \mathrm{Re}(a) > 0 \implies \quad \frac{N!}{a(a+1)\cdots(a+N)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^N\, dt\ ,$$

$$\text{et :} \qquad \mathrm{Re}(a) > 0 \implies \quad \Gamma(a) = \lim_{N\to\infty} N^a \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^N\, dt$$

Nous pourrions de suite étudier cette limite, mais avant cela introduisons l'intégrale suivante, symétrique en a et b : [21]

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$$

21. $B(a,b) = B(b,a)$ par le changement de variable $t \to 1-t$.

Cette intégrale est dite **première intégrale Eulerienne**, elle est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(a) > 0$, $\mathrm{Re}(b) > 0$. Montrons qu'elle est pour b fixé une fonction holomorphe de a. Pour cela nous pouvons définir $B_n(a,b) = \int_{1/n}^{1-1/n} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$. Pour $a \in \mathbf{C}$ et $\frac{1}{n} \leq t \leq 1-\frac{1}{n}$ la fonction $g(t,a) = t^{a-1}(1-t)^{b-1} = \exp((a-1)\log(t))(1-t)^{b-1}$ est continue en le couple (t,a) et aussi pour chaque t fixé holomorphe en a. Donc, par un théorème du chapitre précédent sur les intégrales à paramètre complexe, $B_n(a,b)$ est une fonction entière de a. Soit $\epsilon > 0$. Pour $\mathrm{Re}(a) > \epsilon$ on a $|B(a,b)-B_n(a,b)| \leq (\int_0^{1/n} + \int_{1-1/n}^1) t^{\epsilon-1}(1-t)^{\mathrm{Re}(b)-1}dt$ qui tend vers 0 pour $n \to \infty$ et est indépendant de a. Donc il y a convergence uniforme et par le théorème sur les limites uniformes de fonctions holomorphes, la fonction limite $B(a,b)$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}(a) > \epsilon$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire $B(a,b)$ est holomorphe en a pour $\mathrm{Re}(a) > 0$. De même pour tout a fixé dans ce demi-plan $B(a,b)$ est une fonction holomorphe de b vérifiant $\mathrm{Re}(b) > 0$. La fonction B s'appelle **fonction Bêta d'Euler**.

Compte tenu de la façon dont nous avons été amené à elle, on ne sera pas surpris d'apprendre que la fonction Bêta est intimement liée à la fonction Gamma. L'une des égalités que nous avons obtenues s'écrit en effet :

$$B(a, N+1) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^N\,dt = \frac{N!}{(a)_{N+1}} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(N+1)}{\Gamma(a+N+1)}$$

On s'attend donc à ce que : [22]

$$\mathrm{Re}(a) > 0, \mathrm{Re}(b) > 0 \implies \qquad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

De plus on a obtenu :

$$\mathrm{Re}(a) > 0 \implies \qquad \Gamma(a) = \lim_{N\to\infty} N^a \int_0^1 (1-t)^N t^{a-1}\,dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N (1-\frac{v}{N})^N v^{a-1}\,dv\ ,$$

et si l'on pouvait passer à la limite $N \to \infty$ en utilisant $\forall v\ \lim_{N\to\infty}(1-\frac{v}{N})^N = e^{-v}$ on obtiendrait :

$$\mathrm{Re}(a) > 0 \implies \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-v} v^{a-1}\,dv$$

Cette formule intégrale pour $\Gamma(a)$, $\mathrm{Re}(a) > 0$, est dite **deuxième intégrale Eulerienne**. Elle est parfois prise comme point de départ pour la construction de Γ.

Justifions le passage à la limite. Pour cela il est très utile de remarquer, pour $0 \leq v < N$:

$$(1-\frac{v}{N})^N = e^{N\log(1-\frac{v}{N})} = \exp\Big(-v - \sum_{j\geq 2} \frac{v^j}{j\,N^{j-1}}\Big)$$

22. cette formule nous donne d'ailleurs un prolongement méromorphe de $B(a,b)$ comme fonction de $a \in \mathbf{C}$, pour chaque b fixé ($b \notin (-\mathbf{N})$), et réciproquement.

Cela permet bien sûr de voir, comme nous le savons bien, que $\lim_{N\to\infty}(1-\frac{v}{N})^N = e^{-v}$, et donne aussi l'inégalité utile

$$0 \le v \le N \implies \qquad 0 \le (1-\frac{v}{N})^N \le e^{-v}\ ,$$

et le fait que la suite $N \to (1-\frac{v}{N})^N$ est croissante ($N > v$), encore que nous ne ferons pas usage de cette dernière observation. Plutôt, nous remarquons :

$$0 \le v \le X < N \implies \qquad (1-\frac{v}{N})^N \ge e^{-v}\exp\Big(-\sum_{j\ge 2}\frac{X^j}{j\,N^{j-1}}\Big) = e^{-v}\cdot e^X(1-\frac{X}{N})^N$$

$$\text{donc :}\qquad 0 \le v \le X < N \implies \qquad e^{-v} \ge (1-\frac{v}{N})^N \ge e^{-v}\cdot e^X(1-\frac{X}{N})^N$$

$$0 \le e^{-v} - (1-\frac{v}{N})^N \le e^{-v}\cdot\Big(1-e^X(1-\frac{X}{N})^N\Big) \le 1-e^X(1-\frac{X}{N})^N$$

La convergence de $(1-\frac{v}{N})^N$ vers e^{-v} est donc uniforme sur tout intervalle $[0,X]$ fixé. On peut donc en tout cas affirmer :

$$\forall X>0 \quad \lim_{N\to\infty}\int_0^X (1-\frac{v}{N})^N v^{a-1}\,dv = \int_0^X e^{-v}v^{a-1}\,dv$$

Écrivons, pour X fixé, et $N > X$:

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^N (1-\frac{v}{N})^N v^{a-1}\,dv - \int_0^\infty e^{-v}v^{a-1}\,dv\Big| \\
&\le \Big|\int_0^X (1-\frac{v}{N})^N v^{a-1}\,dv - \int_0^X e^{-v}v^{a-1}\,dv\Big| + \int_X^N (1-\frac{v}{N})^N v^{\mathrm{Re}(a)-1}\,dv \\
&\qquad\qquad + \int_X^\infty e^{-v}v^{\mathrm{Re}(a)-1}\,dv \\
&\le \Big|\int_0^X (1-\frac{v}{N})^N v^{a-1}\,dv - \int_0^X e^{-v}v^{a-1}\,dv\Big| + 2\int_X^\infty e^{-v}v^{\mathrm{Re}(a)-1}\,dv
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Nous commençons par choisir $X > 0$ suffisamment grand de sorte que $2\int_X^\infty e^{-v}v^{\mathrm{Re}(a)-1}\,dv \le \frac{\epsilon}{2}$, puis nous prenons $N_0 > X$ de sorte que

$$\Big|\int_0^X (1-\frac{v}{N})^N v^{a-1}\,dv - \int_0^X e^{-v}v^{a-1}\,dv\Big| \le \frac{\epsilon}{2}$$

pour $N \ge N_0$. Alors, pour $N \ge N_0$ on a $\Big|\int_0^N (1-\frac{v}{N})^N v^{a-1}\,dv - \int_0^\infty e^{-v}v^{a-1}\,dv\Big| \le \epsilon$. Cela prouve $\int_0^N (1-\frac{v}{N})^N v^{a-1}\,dv \to \int_0^\infty e^{-v}v^{a-1}\,dv$ et donc la formule :

$$\mathrm{Re}(a) > 0 \implies \qquad \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-v}v^{a-1}\,dv\ .$$

Revenons-en aux propriétés de $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$. On observe $B(a,b) = B(b,a)$ par le changement de variable $t \to 1-t$. En écrivant $1 = t + (1-t)$ on obtient

$$B(a,b) = B(a+1,b) + B(a,b+1)$$

De plus on trouve en intégrant par parties (justifier !) :

$$B(a+1,b) = -\int_0^1 t^a(\frac{(1-t)^b}{b})'\,dt = +\frac{a}{b}B(a,b+1)$$

Donc $B(a,b) = \frac{a+b}{b}B(a,b+1)$ puis, en itérant, pour tout $N \in \mathbf{N}$:

$$B(a,b) = \frac{a+b}{b}\cdot B(a,b+1) = \frac{a+b}{b}\cdot\frac{a+b+1}{b+1}\cdot B(a,b+2) = \cdots = \frac{(a+b)_N}{(b)_N}\,B(a,b+N)$$

Déterminons l'asymptotique pour a et b fixés de

$$B(a,b+N) = \int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^N\,(1-t)^{b-1}\,dt$$

lorsque $N \to \infty$. Ce sont les t proches de 0 qui contribuent le plus à l'intégrale lorsque $N \gg 1$, donc on peut prévoir que le comportement asymptotique (principal) ne dépendra pas du tout de b, et sera donc le même que pour $b = 1$, à savoir $B(a,b+N) \sim N^{-a}\int_0^\infty e^{-v}v^{a-1}\,dv$. Le changement de variable $v = Nt$ donne :

$$B(a,b+N) = N^{-a}\int_0^N (1-\frac{v}{N})^N(1-\frac{v}{N})^{b-1}v^{a-1}\,dv$$

Pour $b = 1$ nous retombons sur le cas déjà traité. Nous devons aménager notre preuve à cause du terme additionnel $(1-\frac{v}{N})^{b-1}$, qui tend vers 1 lorsque $N \to \infty$ (sauf pour $v = N$, et en plus si $0 < \mathrm{Re}(b) < 1$ ce terme est même divergent en $v = N$). Pour simplifier nous nous limiterons à $\mathrm{Re}(b) \geq 1$. En fait comme $B(a,b+N) = \frac{a+b+N}{b+N}B(a,b+1+N)$, le cas général $\mathrm{Re}(b) > 0$ s'y ramène. L'avantage de $\mathrm{Re}(b) \geq 1$ c'est que l'on dispose de la majoration

$$|(1-\frac{v}{N})^{b-1}| = (1-\frac{v}{N})^{\mathrm{Re}(b)-1} \leq 1$$

qui jouera un rôle analogue à la majoration $(1-\frac{v}{N})^N \leq e^{-v}$ dans la preuve donnée dans le cas $b = 1$. Il nous suffit donc pour rédiger cette preuve (je vous laisse le faire, bon exercice pour vous), de disposer de la convergence uniforme de $(1-\frac{v}{N})^{b-1}$ vers sa limite 1, lorsque $N \to \infty$, pour v restreint à un intervalle $[0,X]$ fixé. Pour obtenir cela de manière simple, posons $\eta = \frac{v}{N}$, $0 \leq \eta < 1$, et écrivons :

$$(1-\frac{v}{N})^{b-1} = \frac{1}{1-\eta}(1-\eta)^b = \frac{1}{1-\eta}\Big(1 - b\int_0^\eta (1-u)^{b-1}\,du\Big)$$
$$(1-\frac{v}{N})^{b-1} - 1 = \frac{1}{1-\eta}\Big(\eta - b\int_0^\eta (1-u)^{b-1}\,du\Big)$$
$$\Big|(1-\frac{v}{N})^{b-1} - 1\Big| \leq \frac{1}{1-\eta}(\eta + |b|\eta) = (|b|+1)\frac{\eta}{1-\eta} = (|b|+1)\frac{v}{N-v}\ ,$$

qui est majoré par $(|b|+1)X/(N-X)$ pour $N > X \geq v$ et donc on a bien la convergence uniforme de $(1-\frac{v}{N})^{b-1}$ vers 1 sur l'intervalle $[0, X]$.[23]

En conclusion :

$$B(a, b+N) \sim_{N\to\infty} N^{-a}\int_0^\infty e^{-v}v^{a-1}\,dv$$
$$B(a,b) = \frac{(a+b)_N}{(b)_N}\ B(a,b+N) \sim_{N\to\infty} \frac{N!N^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)}\frac{\Gamma(b)}{N!N^{b-1}}\ N^{-a}\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

La formule prévue :

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

est ainsi établie. On peut aussi l'obtenir en manipulant l'intégrale double

$$\iint_{0<u,v<\infty} e^{-u-v}u^{a-1}v^{b-1}\,dudv = \Gamma(a)\Gamma(b)$$

mais pour cela il faudrait que je sois sûr que vous ayez vu dans votre cursus la justification des changements de variables dans des intégrales doubles sur des régions infinies, et j'en doute, puisque le contexte véritablement naturel pour cela est l'intégrale de Lebesgue.

7 Preuve de la Formule des Compléments

Voyons ce que cela donne du point de vue de la formule des compléments pour $\Gamma(a)\Gamma(1-a)$. On supposera $0 < \mathrm{Re}(a) < 1$ et on aura alors :

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = B(a, 1-a) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-a}\,dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^a \frac{1}{t}\,dt$$

23. supposons que $f_n \rightrightarrows f$ sur l'intervalle I, que $\forall n \forall t \in I\ |f_n(t)| \leq \Lambda$, et que G est une fcnction continue sur le disque fermé $|z| \leq \Lambda$. Alors c'est un exercice standard et facile de montrer $G(f_n) \rightrightarrows_I G(f)$, en utilisant la continuité uniforme de G. Il suffira donc ici de prendre $f_n(t) = \frac{t}{N}$, $f(t) = 0$, $G(z) = (1-z)^{b-1}$, $\Lambda = \frac{X}{N} < 1$, et cela marche pour $b \in \mathbf{C}$ quelconque. Cependant j'ai préféré une preuve avec des majorations explicites. Si on se limitait à $b \in \mathbf{R}$ on pourrait simplifier plus encore.

On fait le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$, $t = \frac{u}{u+1}$, $dt = \frac{du}{(u+1)^2}$:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^\infty u^a \frac{u+1}{u} \frac{du}{(u+1)^2} = \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u}\, du = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx$$

Si nous trouvons un moyen d'établir que l'une de ces intégrales vaut $\frac{\pi}{\sin(\pi a)}$, alors la Formule des Compléments sera établie. En tout cas pour $0 < \mathrm{Re}(a) < 1$, mais en fait pour tout $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$, par unicité analytique.

Cette précision nous donne l'idée suivante : on n'a pas besoin de tous les a, mais peut-être uniquement de certains a_k formant une suite avec un point d'accumulation. Supposons en particulier que

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

soit prouvé pour $a_k = \frac{1}{k}$, $k = 2, 3, \ldots$Alors les deux fonctions entières $(\Gamma(a)\Gamma(1-a))^{-1}$ et $\frac{1}{\pi}\sin(\pi a)$ auront les mêmes valeurs en les points $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, qui convergent vers l'origine. Par unicité analytique, c'est qu'elles sont identiques pour **tous les nombres complexes** a.[24]

Considérons donc pour k entier, $k \geq 2$:

$$J_k = \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{k}-1}}{1+u}\, du = k \int_0^\infty \frac{dv}{1+v^k}$$

Considérons la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{1+v^k}$:

$$\frac{1}{1+v^k} = \sum_{0\leq j<k} \frac{\alpha_j}{v-\beta_j}$$

avec $\beta_j = e^{i\,\pi\frac{1}{k}} e^{i\,2\pi\frac{j}{k}}$, $\alpha_j = \frac{1}{k(\beta_j)^{k-1}} = \frac{-\beta_j}{k}$. Comme pour $0 < v < \infty$ il n'est jamais le cas que $v - \beta_j$ est dans $]-\infty, 0]$, on peut utiliser $\mathrm{Log}(v-\beta_j)$ comme primitive. On a alors :

$$\int_0^\infty \frac{dv}{1+v^k} = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{dv}{1+v^k} = \lim_{X\to+\infty} \sum_{0\leq j<k} \frac{-\beta_j}{k}\Big(\mathrm{Log}(X-\beta_j) - \mathrm{Log}(-\beta_j)\Big)$$

Pour $X > 0$, $X \to \infty$ on a (justifier !) $\mathrm{Log}(X-\beta_j) = \log(X) + \mathrm{Log}(1-\frac{\beta_j}{X}) = \log(X) + o(1)$, le symbole $o(1)$ représentant une quantité qui tend vers 0 lorsque $X \to \infty$. Comme la limite ci-dessus existe c'est que la somme des termes donnant un multiple de $\log(X)$ vaut **exactement** zéro (c'est-à-dire $\sum_{0\leq j<k} \beta_j = 0$). Mais alors, on peut affirmer :

$$k \int_0^\infty \frac{dv}{1+v^k} = k \sum_{0\leq j<k} \frac{-\beta_j}{k}(-\mathrm{Log}(-\beta_j)) = \sum_{0\leq j<k} \beta_j \,\mathrm{Log}(-\beta_j)$$

24. époustouflant non ?

Je vous conseille de placer les β_j et les $-\beta_j$ sur le cercle unité et de voir ce qui se passe. Vous constaterez que

$$\mathrm{Log}(-\beta_j) = -(\pi - \pi\frac{1}{k})\,i + 2\pi\,i\,\frac{j}{k}$$

Comme nous avons déjà fait la remarque que $\sum_{0\leq j<k} \beta_j = 0$ cela donne alors :

$$k\int_0^\infty \frac{dv}{1+v^k} = 2\pi\,i\,\frac{1}{k}\sum_{0\leq j<k} j\,\beta_j$$

Pour déterminer la somme $S = \sum_{0\leq j<k} j\,\beta_j$, multiplions-la par $\omega = e^{i\,2\pi\frac{1}{k}}$ et utilisons $\omega\beta_j = \beta_{j+1}$, avec la convention cependant que $\beta_k = \beta_0$. Donc

$$\omega S = \sum_{0\leq j<k} j\,\beta_{j+1} = \sum_{0\leq j<k} (j+1)\,\beta_{j+1} = S + k\beta_0$$

$$S = \frac{k\beta_0}{\omega - 1} = \frac{k\,e^{i\,\pi\frac{1}{k}}}{e^{i\,2\pi\frac{1}{k}} - 1} = \frac{k}{2i\sin(\frac{\pi}{k})}$$

Finalement :

$$k\int_0^\infty \frac{dv}{1+v^k} = 2\pi\,i\,\frac{1}{k}\frac{k}{2i\sin(\frac{\pi}{k})} = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{k})}$$

De cette manière la formule

$$J_k = \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{k}-1}}{1+u}\,du = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{k})}$$

est établie pour tout k entier, $k \geq 2$, et donc comme nous l'avons déjà expliqué précédemment, grâce au théorème d'unicité analytique :

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u}\,du = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

pour tout nombre complexe a avec $0 < \mathrm{Re}(a) < 1$, et aussi :

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

pour tout complexe $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$, et finalement :

$$\sin(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2})$$

pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$. Les identités d'Euler reliant les sommes $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2j}$ aux nombres de Bernoulli en résultent.

Le produit infini pour sin peut être établi par d'autres méthodes, dont certaines bien plus rapides, mais dans l'ensemble, je pense que notre petit voyage valait le coup par les autres fruits recueillis.

8 La série hypergéométrique et un Théorème de Gauss

Revenons à

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$$

Remplaçons b par $b+c$ avec $\mathrm{Re}(c) > 0$. Nous savons que la série binomiale :

$$(1-t)^c = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k}{k!} t^k$$

est normalement convergente pour $|t| \leq 1$ lorsque $\mathrm{Re}(-c) < 0$. On peut donc affirmer :

$$B(a,b+c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k}{k!} \int_0^1 t^{a+k-1}(1-t)^{b-1}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k}{k!} B(a+k,b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k}{k!} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+k)}$$

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b+c)}{\Gamma(a+b+c)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k}{k!} \frac{\Gamma(a)(a)_k\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)(a+b)_k}$$

$$\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b+c)}{\Gamma(a+b+c)\Gamma(b)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k(a)_k}{k!(a+b)_k}$$

Posons $\alpha = a$, $\beta = -c$, $\gamma = a+b$, donc $a+b=\gamma$, $b+c = \gamma-\alpha-\beta$, $a+b+c = \gamma-\beta$, $b = \gamma-\alpha$. Nous obtenons la **Formule de Gauss** :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k\, k!} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

Nous l'avons prouvée pour $\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b), \mathrm{Re}(c) > 0$, c'est-à-dire pour $\mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\alpha) > 0 > \mathrm{Re}(\beta)$. Mais examinons sa convergence absolue : on a (avec $\alpha, \beta, \gamma \notin (-\mathbf{N})$) :

$$\left| \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k\, k!} \right| \sim_{k\to\infty} k^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)-1} \left| \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right|$$

Il y a donc convergence absolue de la série si et seulement si $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0$ ou $\alpha \in (-\mathbf{N})$ ou $\beta \in (-\mathbf{N})$. Plus précisément, en utilisant la majoration du Théorème 4, nous avons, en supposant $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| < X$, $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > \epsilon > 0$, et $k \geq 2X+2$:

$$\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k\, k!} = k^{\alpha+\beta-\gamma-1} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{u_k(\alpha,\beta,\gamma)} \qquad \text{avec} \quad |u_k(\alpha,\beta,\gamma)| \leq \frac{12X(X+1)}{k} \leq 6X$$

On aura $|e^{u_k}| = e^{\mathrm{Re}(u_k)} \leq e^{|u_k|} \leq e^{6X}$ donc, avec $v_k = \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{\Gamma(\gamma)(\gamma)_k\, k!}$:[25]

$$k \geq 2X+2 \implies |v_k| \leq \frac{C^2\, e^{6X}}{k^{1+\epsilon}} \qquad (\text{avec } C = \sup_{|z|\leq X} |\Gamma(z)|^{-1})$$

25. dans v_k, on divise par $\Gamma(\gamma)$ pour qu'il n'y ait plus de pôles en $0, -1, \ldots$. On aurait aussi pu simplement exclure les disques $|\gamma+n| \leq \epsilon$, $0 \leq n \leq X$. On fait cela pour pouvoir parler de convergence normale.

Ceci montre que $\sum_{k\geq 2X+2} v_k(\alpha,\beta,\gamma)$ est **normalement**, donc uniformément, convergente. Sa somme est donc holomorphe en chacune des variables pour $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| < X$ et $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > \epsilon > 0$. Donc, puisque $X < \infty$ et $\epsilon > 0$ sont arbitraires $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k\ k!}$ est holomorphe en α, β, méromorphe en γ, sous la seule condition $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0$. La formule de Gauss a été établie pour le sous-domaine $\mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\alpha) > 0 > \mathrm{Re}(\beta)$: par Unicité Analytique (il y a un petit raisonnement à faire puisque nous avons trois variables, d'abord on fixe γ et α puis seulement α puis aucune) elle vaut sous la seule contrainte $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0$.

Examinons plus précisément encore la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k\ k!}$, en excluant les cas $\gamma \in (-\mathbf{N})$, bien sûr, et aussi $\alpha \in (-\mathbf{N})$ ou $\beta \in (-\mathbf{N})$ qui donnent chacun des sommes finies. Pour que la série converge il est nécessaire que son terme général tende vers 0. Donc, il faut que $\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 1$. Nous savons qu'il y a convergence absolue pour $\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 0$ il faut donc examiner le cas $0 \leq \mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 1$. Par notre Théorème 4 précis on a, comme je vous invite à le vérifier :

$$\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k\ k!} = k^{\alpha+\beta-\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\cdot(1+u_k(\alpha,\beta,\gamma))$$

avec une suite u_k qui vérifie une majoration du type $|u_k| \leq \frac{C}{k}$ avec C une constante qui dépend de α, β, γ. Posons

$$\delta = \alpha+\beta-\gamma$$

Pour $\mathrm{Re}(\delta) < 1$, la série de terme général $k^{\delta-1}u_k(\alpha,\beta,\gamma)$ est (absolument) convergente, donc la convergence de la série de Gauss est équivalente à celle de la série de terme général $k^{\delta-1}$. Supposons $0 \leq \mathrm{Re}(\delta) < 1$ et excluons (provisoirement) le cas $\delta = 0$. Directement par le Théorème 4 :

$$\frac{(\delta)_k}{k!} = k^{\delta-1}\frac{1}{\Gamma(\delta)}\cdot(1+v_k(\delta))$$

avec une majoration $|v_k| \leq \frac{D(\delta)}{k}$. La convergence de la série de terme général $k^{\delta-1}$ pour nos δ est donc à son tour équivalente à celle de la série binomiale qui a pour terme général $\frac{(\delta)_k}{k!}$. Nous avons démontré que celle-ci converge si et seulement si $\mathrm{Re}(\delta) < 0$ ou $\delta = 0$. Cela est antagoniste de notre hypothèse $0 \leq \mathrm{Re}(\delta) < 1$ et $\delta \neq 0$. Donc la seule possibilité qui subsiste est $\delta = 0$ ($\alpha+\beta-\gamma = 0$). Mais la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ diverge. Conclusion :

Théorème 8 (Gauss, 1812) *Soit $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{C}$, avec $\gamma \notin (-\mathbf{N})$. La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k\ k!}$ converge si et seulement si :*

1. *soit* $\alpha \in (-\mathbf{N})$, *(la série est alors une somme finie),*
2. *soit* $\beta \in (-\mathbf{N})$, *(la série est alors une somme finie),*
3. *soit* $\mathrm{Re}(\alpha+\beta) < \mathrm{Re}(\gamma)$ *(la série est alors aussi absolument convergente).*

De plus dans tous les cas de convergence on a la formule exacte :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k \, k!} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

Nous n'avons prouvé la formule exacte que sous la condition

$$\mathrm{Re}(\alpha+\beta) < \mathrm{Re}(\gamma)$$

Considérons maintenant un entier négatif $a = -n$. La série de Gauss est alors une somme finie, avec $n+1$ termes, puisque $(a)_k = 0$ pour $k > n$. Elle est une fonction entière de β et une fonction méromorphe de γ avec des pôles pour $\gamma = 0,\ -1,\ \ldots,\ 1-n$. Pour β fixé quelconque, nous savons que la formule est valable pour $\mathrm{Re}(\gamma)$ suffisamment grand, par unicité analytique elle est donc valable pour tout γ. La formule est donc valable pour tout β et tout γ et donne l'identité :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k \, k!} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+n-\beta)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n}$$

Dans toute sa splendeur :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1.2.\cdots.k} \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)} \\ = \frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)\cdots(\gamma-\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\end{aligned}$$

Et notre formule finale est, après simplification :

Théorème 9 *Pour tout* $\beta, \gamma \in \mathbf{C}$ *et tout* $n \in \mathbf{N}$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\prod_{0 \le j < k}(\beta+j) \, \prod_{k \le j < n}(\gamma+j)}{k! \, (n-k)!} = \frac{\prod_{0 \le j < n}(\gamma-\beta+j)}{n!}$$

Cette identité était semble-t-il à peu près connue du mathématicien chinois Chu au treizième siécle. Elle a été redécouverte de nombreuses fois, et est apparemment connue aujourd'hui sous l'appellation **identité de Chu-Vandermonde**. La façon la plus simple de la prouver est la suivante : soit $\delta = -(\gamma + n - 1)$, il s'agit de calculer :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(\beta)_k}{k!}\,(-1)^{n-k}\frac{(\delta)_{n-k}}{(n-k)!}\,,$$

qui est $(-1)^n$ fois le terme en z^n dans la série produit

$$(1-z)^{-\beta}\cdot(1-z)^{-\delta} = (1-z)^{-\beta-\delta}$$

c'est-à-dire

$$(-1)^n\,\frac{(\beta+\delta)_n}{n!} = (-1)^n\frac{(\beta-\gamma-(n-1))_n}{n!} = \frac{(\gamma-\beta)_n}{n!}$$

Bref, les identités de Chu-Vandermonde sont juste une façon de s'amuser avec les identités $(1-z)^a(1-z)^b = (1-z)^{a+b}$.

Dans le Théorème de Gauss lorsque $\alpha-\gamma \in \mathbf{N}$ il faut comprendre que la formule signifie que la somme de la série donne 0 à cause du pôle de $\Gamma(\gamma-\alpha)$. Par exemple pour $\alpha = \gamma$ il faut comprendre :

$$\mathrm{Re}(\beta) < 0 \implies \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta)_k}{k!} = 0$$

Cela nous le savions déjà ! Pour $\alpha-\gamma = 1$ cela donne :

$$\mathrm{Re}(\beta) < -1 \implies \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma+k}{\gamma}\frac{(\beta)_k}{k!} = 0$$

Compte tenu de la formule précédente cela équivaut à $\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(\beta)_k}{k!} = 0$, mais en fait $k\frac{(\beta)_k}{k!}$ pour $k \geq 1$ vaut $\frac{(\beta+1)_{k-1}}{(k-1)!}$, donc on n'a rien de nouveau ici : les cas $\alpha-\gamma \in \mathbf{N}$ sont tous équivalents à $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta)_k}{k!} = 0$.

La fonction hypergéométrique de Gauss est définie, pour $|z| < 1$ par la formule :

$$F(\alpha,\beta,\gamma\,;\,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k\;k!}z^k$$

On exclut les $\gamma \in (-\mathbf{N})$ et la série est en fait polynomiale en z lorsque α, ou β est dans $-\mathbf{N}$. Ces cas étant exclus il est facile de voir que le rayon de convergence est 1. Le théorème précédent nous dit quand la série converge pour $z = 1$ et Gauss a déterminé plus généralement quand elle converge pour $|z| = 1$, $z \neq 1$: vous pourrez vous essayer à reprendre notre preuve dans le cas $z = 1$ et à l'adapter au cas $|z| = 1$, $z \neq 1$, je vous laisse re-découvrir le résultat de Gauss.

La fonction hypergéométrique de Gauss est très importante en Analyse Mathématique, et l'étude qui en fut faite par Riemann en 1857 influence encore les Mathématiques d'aujourd'hui, même dans des domaines très éloignés a priori de l'analyse complexe, comme la géométrie algébrique, la théorie des nombres. J'aimerais en dire plus, mais ce sont là des sujets pour un cours de deuxième niveau d'Analyse complexe, c'est sans doute trop délicat pour un cours de premier niveau. Avant de quitter ce sujet je signale tout de même l'**équation différentielle hypergéométrique** qui est vérifiée par la fonction F :

$$z(1-z)F'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)F' - \alpha\beta F = 0$$

Je signale aussi la **fonction hypergéométrique confluente** :

$$G(\alpha, \gamma\,;\, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}$$

La fonction G donnée par cette série est une fonction entière de z. Elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$zG'' + (\gamma - z)G' - \alpha G = 0$$

Si on prend $\alpha = \gamma$ on a simplement bien sûr $G(\alpha, \alpha\,;\, z) = \exp(z)$. Mais d'autres fonctions usuelles moins simples sont aussi des cas particuliers. Pour ne citer que certaines des plus simples :

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = x\; G(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\,;\, x)$$

$$\int_0^x e^{-v} v^{a-1}\, dv = \frac{x^a}{a}\; G(a, a+1\,;\, x)$$

9 Annexes

9.1 Formule de Stirling

La formule de Stirling donne un équivalent asymptotique de $n!$ lorsque $n \to \infty$:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Plus précisément on va montrer, pour $n \geq 1$:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta_n} \quad , \quad 0 < \theta_n < \frac{1}{8n}$$

L'ordre de grandeur plus exact de θ_n est en réalité $\frac{1}{12n}$, mais nous ne chercherons pas à obtenir ce résultat.

En fait cette formule va apparaître comme conséquence d'une idée générale de comparer des sommes $f(1)+\cdots+f(n)$ aux intégrales $\int_1^n f(t)\,dt$, ici pour la fonction $f(t) = \log(t)$ de sorte que $f(1)+\cdots+f(n) = \log(n!)$. L'approximation par un trapèze de $\int_a^b g(t)\,dt$ est $(b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2}$. Plus précisément, supposons g de classe C^2 et intégrons par parties, d'une première manière :

$$\int_0^1 (t-\frac{1}{2})g'(t)\,dt = \Big[(t-\frac{1}{2})g(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 g(t)\,dt = \frac{g(0)+g(1)}{2} - \int_0^1 g(t)\,dt\ ,$$

puis d'une seconde :

$$\int_0^1 (t-\frac{1}{2})g'(t)\,dt = \Big[\frac{1}{2}(t^2-t)g'(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(t^2-t)g''(t)\,dt = +\frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t)g''(t)\,dt\ ,$$

donc en comparant les deux formules :

$$\frac{g(0)+g(1)}{2} = \int_0^1 g(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t)g''(t)\,dt$$

Nous utilisons cela pour $g(t) = \log(t+k)$, avec $1 \leq k < n$, et nous faisons la somme (note : bien sûr $\log 1 = 0$) :

$$\frac{1}{2}\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) + \frac{1}{2}\log(n) = \int_1^n \log(t)\,dt - \frac{1}{2}\sum_{1\leq k<n}\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+k)^2}\,dt$$

Posons, pour $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{1}{2}\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) + \frac{1}{2}\log(n) - \int_1^n \log(t)\,dt = -\frac{1}{2}\sum_{1\leq k<n}\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+k)^2}\,dt$$

et aussi, pour $k \geq 1$, $v_k = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+k)^2}\,dt$. On a, compte tenu de $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$:

$$0 < v_k < \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{1}{(t+k)^2}\,dt = \frac{1}{8}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{8k(k+1)}$$

La série $\sum_{k=1}^\infty v_k$ est donc convergente. Soit S sa somme. On a en tout cas $0 < S < \frac{1}{8}\sum_{k=1}^\infty(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{8}$. On peut écrire :

$$u_n = -S + \sum_{k=n}^\infty v_k$$

Donc :

$$-S < u_n < -S + \frac{1}{8}\sum_{k=n}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = -S + \frac{1}{8n}$$

Par ailleurs $\int_1^n \log(t)\,dt = [t\log(t) - t]_1^n = n\log(n) - n + 1$, donc

$$u_n = \log(n!) - (n + \frac{1}{2})\log(n) + n - 1\ ,$$

et par conséquent, pour $n \geq 2$:

$$(n + \frac{1}{2})\log(n) - n + 1 - S < \log(n!) < (n + \frac{1}{2})\log(n) - n + 1 - S + \frac{1}{8n}$$

La formule est aussi valable pour $n = 1$ car $0 < S < \frac{1}{8}$. Finalement, soit

$$\theta_n = \log(n!) - (n + \frac{1}{2})\log(n) + n - 1 + S$$

de sorte que

$$n! = e^{1-S}\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n\ e^{\theta_n}$$

avec

$$0 < \theta_n < \frac{1}{8n}$$

La formule de Stirling est donc établie, non seulement comme identité asymptotique mais avec une inégalité précise, valable dès $n = 1, 2, \ldots$. Mais il nous manque encore la mystérieuse constante $C = e^{1-S}$. Pour la déterminer nous pouvons tirer partie de l'une des formes que nous avons donnée au produit infini de Wallis (dans la feuille de travail II) :

$$\binom{2n}{n} \sim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

On a : $(2n)! \sim C\sqrt{2n}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}$ et $n! \sim C\sqrt{n}n^n e^{-n}$ donc

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{1}{C}\sqrt{\frac{2}{n}}2^{2n}$$

La comparaison donne : $C = \sqrt{2\pi}$ (donc $S = 1 - \frac{1}{2}\log(2\pi)$) et l'équivalent de Stirling est bien $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

9.2 Théorème d'Abel

Le théorème d'Abel est important dans la théorie des séries :

Théorème 10 (Abel) *Soit* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *une série convergente. On a :*

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ 0<z<1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

J'avais prévu d'établir la version plus complète suivante :

Théorème 11 *Soit* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *une série convergente. Soit* $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$*. On a :*

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1\\ |\operatorname{Arg}(1-z)|\le\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

La raison pour le secteur angulaire dépendant de θ c'est qu'il peut être faux que $\lim_{z\to 1, |z|<1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, parce que la convergence peut devenir de moins en moins rapide lorsque $\theta \to \frac{\pi}{2}$. Bon, mais là j'ai un petit coup de fatigue alors je me contenterai de rédiger une preuve pour la première version et je vous laisse la compléter pour la version plus complète.

Avant cela, je donne un énoncé intéressant, en fait je crois celui pour lequel Abel avait initialement démontré son théorème : *si les trois séries* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *avec* $c_n = \sum_{0\le j\le n} a_j b_{n-j}$ *convergent alors* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. En effet pour $|z| < 1$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, en utilisant le théorème sur les séries doubles absolument convergentes (formule de Cauchy pour le produit de deux séries entières ; on observera que le rayon de convergence de chacune des trois séries est au moins 1 puisque leurs coefficients tendent vers 0, puisque les séries associées sont supposées convergentes pour $z = 1$). On passe ensuite à la limite $z \to 1$ grâce au théorème d'Abel.

Venons-en à la preuve d'icelui. Posons $\Sigma_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$, $\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$, ..., $\Sigma_n = \sum_{k=n}^{\infty} c_k$. On a $c_n = \Sigma_n - \Sigma_{n+1}$, et aussi $\lim_{n\to\infty} \Sigma_n = 0$ car $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k - \sum_{k=0}^{n-1} c_k$. En particulier la suite $(\Sigma_n)_{n\ge 0}$ est bornée.

$$\begin{aligned} & c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \\ &= (\Sigma_0 - \Sigma_1) + (\Sigma_1 - \Sigma_2) z + (\Sigma_2 - \Sigma_3) z^2 + \cdots + (\Sigma_n - \Sigma_{n+1}) z^n \\ &= \Sigma_0 + \Sigma_1 (z-1) + \Sigma_2 (z^2 - z) + \cdots + \Sigma_n (z^n - z^{n-1}) - \Sigma_{n+1} z^n \end{aligned}$$

Donc, pour $|z| < 1$, puisque $\lim \Sigma_{n+1} = 0$, on a :[26]

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \Sigma_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \Sigma_j (z^j - z^{j-1})$$

Posons $M_n = \sup_{j\geq n} |\Sigma_j|$. On a $\lim M_n = 0$.

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \Sigma_0\right| \\
&\leq |1-z| \sum_{j=1}^{N} |\Sigma_j||z|^{j-1} + |1-z| \sum_{j=N+1}^{\infty} |\Sigma_j||z|^{j-1} \\
&\leq |1-z| \sum_{j=1}^{N} |\Sigma_j| + |1-z| \frac{M_{N+1}|z|^N}{1-|z|} \\
&\leq |1-z|\, N M_1 + M_{N+1} \frac{|1-z|}{1-|z|}
\end{aligned}$$

Supposons maintenant $0 < z < 1$. On a alors, pour tout $N \geq 1$:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k\right| \leq (1-z) N M_1 + M_{N+1}$$

Comme $M_N \to 0$, on choisit N avec $M_{N+1} \leq \epsilon$. On a alors pour $0 < 1 - z < \frac{\epsilon}{N(M_1+1)}$: $|\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$, d'où le résultat.

On peut rédiger un peu différemment : considérons, pour $0 \leq z \leq 1$:

$$F_N(z) = \sum_{j=1}^{N} \Sigma_j (z^j - z^{j-1})$$

et $F(z) = \lim F_N(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \Sigma_j (z^j - z^{j-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \Sigma_0$. On a

$$|F(z) - F_N(z)| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |\Sigma_j| (z^{j-1} - z^j) \leq M_{N+1}\, z^N \leq M_{N+1}$$

Il y a donc convergence uniforme des fonctions (continues) F_N sur l'intervalle $[0,1]$ vers la fonction limite F. Donc la fonction F est une fonction continue. En particulier, elle est continue (à gauche) en 1. Comme évidemment $F(1) = 0$ cela veut dire : $\lim_{z\to 1} F(z) = 0$. Or, justement, notre identité nous dit que $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k$.

26. pour $|z| < 1$ on est dans le disque de convergence de la série de gauche qui converge absolument. Et c'est aussi le cas pour celle de droite puisque les Σ_j sont bornés. Pour $|z| = 1$ le résultat est valable, au sens où si l'une des deux séries converge alors l'autre aussi et l'identité vaut. Il est possible cependant qu'elles soient (toutes deux, donc) divergentes lorsque $|z| = 1$, $z \neq 1$.

9.3 Critère d'Abel-Dirichlet

Le critère suivant est souvent utilisé lorsque l'on travaille avec des séries :

Théorème 12 (Abel-Dirichlet) *Soient d_n, w_n, $n \in \mathbf{N}$ des nombres complexes. Si :*

1. *la suite $(d_n)_{n=0,1,\dots}$ tend vers 0,*
2. *la série de terme général $d_n - d_{n+1}$ est absolument convergente,*
3. *la série de terme général w_n a des sommes partielles bornées,*

alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} d_n w_n$ est convergente.

Preuve : on pose $S_0 = w_0$, $S_1 = w_0 + w_1$, $S_2 = w_0 + w_1 + w_2$, …, $S_n = \sum_{0 \le j \le n} w_j$. Alors :

$$\begin{aligned} & d_0 w_0 + d_1 w_1 + \cdots + d_n w_n \\ = & \, d_0 S_0 + d_1(S_1 - S_0) + \cdots + d_n(S_n - S_{n-1}) \\ = & \, (d_0 - d_1)S_0 + (d_1 - d_2)S_1 + \cdots + (d_{n-1} - d_n)S_{n-1} + d_n S_n \end{aligned}$$

La série $\sum_{j=0}^{\infty}(d_j - d_{j+1})S_j$ est absolument convergente puisque les S_j sont bornés par hypothèse et que $\sum_{j=0}^{\infty} |d_j - d_{j+1}| < \infty$ par hypothèse. De plus $\lim d_n S_n = 0$ puisque $\lim d_n = 0$ et que S_n est borné. D'où la conclusion et la formule : [27]

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \, w_n = \sum_{j=0}^{\infty} (d_j - d_{j+1}) S_j$$

Cette formule est une sorte de « sommation par parties », analogue à l'intégration par parties pour les intégrales avec des fonctions. D'une manière générale cette technique s'appelle la **sommation d'Abel**. [28] Dans la section précédente on a aussi utilisé une sommation d'Abel, un peu différente puisqu'au lieu d'utiliser les sommes $\sum_{0 \le j \le n}$ on a utilisé les sommes infinies $\sum_{n \le j < \infty}$.

27. attention, la série de droite est absolument convergente, mais rien ne dit que c'est aussi le cas pour celle de gauche.
28. donc « sommation d'Abel pour les sommes » = « intégration par parties pour les intégrales ».

On utilise souvent le cas particulier avec (d_n) une suite réelle, décroissante, de limite nulle. Alors la série de terme général $d_n - d_{n+1}$ est automatiquement absolument convergente.

Par ailleurs la condition que les sommes partielles des w_n sont bornées est réalisée lorsque la série $\sum w_n$ converge. On a donc l'énoncé suivant (théorème de Dirichlet) : *si la série $\sum w_n$ a des sommes partielles bornées (en particulier si elle converge) et si (d_n) est une suite décroissante tendant vers 0 alors la série $\sum d_n w_n$ converge.*

Donnons un exemple d'utilisation conjointe du critère d'Abel-Dirichlet et du théorème d'Abel : la série $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} h^n$ est convergente pour $|h| \leq 1$, $h \neq 1$, puisque $\frac{1}{n}$ est une suite décroissante de limite nulle et que les sommes partielles $1+h+\cdots+h^n = \frac{1-h^{n+1}}{1-h}$ sont bornées pour $|h| \leq 1$, $h \neq 1$. Sa somme vaut $+\mathrm{Log}(1-h)$ pour $|h| < 1$, donc, par le Théorème d'Abel, aussi pour $|h| = 1$ ($h \neq 1$). Pour $-h = e^{i\phi}$, $-\pi < \phi < \pi$ on a $1 - h = 2\cos(\frac{\phi}{2})e^{i\phi/2}$ donc $\mathrm{Log}(1-h) = \log(2\cos(\frac{\phi}{2})) + i\frac{\phi}{2}$ donc, pour $-\pi < \phi < \pi$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(n\phi)}{n} = \log(2\cos(\frac{\phi}{2}))$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(n\phi)}{n} = \frac{\phi}{2}$$

Ici, la théorie des fonctions holomorphes (Logarithme complexe) rejoint celles des séries de Fourier. Ces formules étaient connues d'Euler. Remarquez que dans la deuxième formule si je fais $\phi = \pi$ j'obtiens $0 = \frac{\pi}{2}$. Cela pourrait être vaguement alarmant (je ne sais pas pour vous, mais moi j'avoue que cela ne me laisserait pas indifférent) mais en fait nous n'avons prouvé la formule que pour $-\pi < \phi < \pi$, donc, ok. Et si $\phi > \pi$? et bien le terme de gauche est 2π-périodique, donc à droite il faudra écrire $\frac{\phi - 2\pi k}{2}$ avec k le plus grand entier tel que $(2k-1)\pi < \phi < (2k+1)\pi$. Le graphe de cette fonction est donc « en dents de scie », avec des discontinuités aux multiples impairs de π. Il est intéressant qu'une somme infinie de fonctions aussi lisses que $\sin(n\phi)$ puisse donner une fonction avec des discontinuités. Fourier alla plus loin au début du dix-neuvième siècle en affirmant que « toute » fonction 2π-périodique est la somme d'une série de $\sin(n\phi)$ et $\cos(n\phi)$. On sait maintenant qu'il avait essentiellement raison.