Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable : Jean-François Burnol

Note : pour ce chapitre aussi on recommande fortement au lecteur de dessiner dans la marge les figures utiles à la compréhension du texte.

DEUXIÈME CHAPITRE

Table des matières

Dans le premier chapitre nous avons défini les notions d'**holomorphie** (une fonction définie sur un ouvert du plan complexe est holomorphe si elle est dérivable au sens complexe en tout point) et d'**analyticité** (une fonction est analytique si en tout point z_0 il existe un disque ouvert non vide $D(z_0, r)$ centré en ce point sur lequel la fonction est la somme d'une série entière en la variable $h = z - z_0$), et nous avons prouvé l'équivalence de ces deux notions. Donc à l'avenir j'emploierai l'un ou l'autre des deux termes, et si l'un semblera être employé plus souvent cela ne sera que l'effet du hasard.

Le premier chapitre a fait émerger de manière explicite ou implicite un nombre important de sujets d'approfondissement, et l'ordre dans lequel nous allons les explorer ici et plus tard, sur plusieurs chapitres encore, n'est pas un ordre a priori, d'autres agencements auraient pu tout aussi bien convenir. Mais on ne peut pas tout faire simultanément.

1 Le Logarithme complexe

Revenons au problème de construire un logarithme complexe. Notons provisoirement $\log(z)$ une fonction g holomorphe vérifiant $g'(z) = \frac{1}{z}$ et $g(1) = 0$. Pour commencer on prendra comme ouvert de définition le disque D de centre 1 et de rayon 1. On sait, par un théorème du chapitre précédent, que dans un disque toute fonction analytique admet une primitive. Donc une telle g définie sur D existe par ce théorème. Elle est donnée par la somme d'une série entière dans D :

$$g(1 + h) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots$$

et l'on veut donc :

$$c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + \dots = g'(1 + h) = \frac{1}{1 + h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \dots$$

ce qui équivant [1] à $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = +\frac{1}{3}$, etc. . .

Donc on retrouve la série bien connue :

$$\log(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \dots$$

1. par unicité des coefficients d'une série entière convergente.

dont le rayon de convergence est, en fait, exactement 1. Il est très intéressant d'examiner la question de la convergence de la série sur le cercle $|h| = 1$, nous y reviendrons dans un prochain chapitre. La représentation que nous avons obtenue :

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

est jolie, mais ne fonctionne que pour $|z-1| < 1$ (nous verrons qu'elle fonctionne aussi pour z avec $|z-1| = 1$, sauf $z = 0$) alors que nous savons qu'il existe une fonction logarithme $\log(t)$ pour $0 < t < \infty$.

Lorsque nous avons prouvé dans le chapitre précédent que dans un disque toute fonction analytique f admettait une primitive g nous avons défini g en intégrant f le long d'un segment horizontal et d'un segment vertical. Ce qui a marché dans un disque marche tout aussi bien dans un demi-plan tel que le demi-plan $U = \{z = x + iy \mid x > 0\}$. Supposons donné une fonction f holomorphe sur U et posons :

$$g(x+iy) = \int_1^x f(t)dt + i \int_0^y f(x+iu)du \tag{1}$$

Par construction on a $\frac{\partial g}{\partial y}(x+iy) = if(x+iy)$. De plus par le théorème de Cauchy-Goursat pour le rectangle de sommets 1, x, $x+iy$, $1+iy$, on a aussi :

$$g(x+iy) = i \int_0^y f(1+iu)du + \int_1^x f(t+iy)dy \ ,$$

et donc $\frac{\partial g}{\partial x}(x+iy) = f(x+iy)$. Mais en fait on peut se passer du théorème de Cauchy-Goursat puisque l'on sait (maintenant) que toute fonction holomorphe f admet des dérivées partielles continues, et il est donc licite d'écrire $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y f(x+iu)du = \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} f(x+iu)du$ (en vertu d'un théorème de deuxième année sur la dérivation des intégrales à un paramètre avec, ici, x comme paramètre ; voir l'annexe pour ce théorème, déjà utilisé d'ailleurs dans le premier chapitre). En utilisant les équations de Cauchy-Riemann pour f il vient alors $\int_0^y \frac{\partial}{\partial x} f(x+iu)du = \int_0^y -i\frac{\partial}{\partial u} f(x+iu)du = -i(f(x+iy) - f(x))$. Donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_1^x f(t)dt + i\int_0^y f(x+iu)du\right) = f(x) + f(x+iy) - f(x) = f(x+iy)$$

Ainsi la fonction g définie par l'équation (1) est telle que $\frac{\partial g}{\partial x}(x+iy) = f(x+iy)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x+iy) = if(x+iy)$. Elle admet donc des dérivées partielles continues en le couple (x, y) et ces dérivées partielles vérifient les équations de Cauchy-Riemann : donc g est holomorphe. De plus $g' = \frac{\partial}{\partial x} g = f$. Et aussi $g(1) = 0$. Donc g est une primitive holomorphe de f. C'est la seule s'annulant en 1.

Utilisons maintenant ce qui précède dans le cas particulier $f(z) = \frac{1}{z}$. Cela donne explicitement :

$$\begin{aligned} g(x+iy) &= \int_1^x \frac{1}{t} dt + i \int_0^y \frac{1}{x+iu} du = \log(x) + i \int_0^y \frac{x - iu}{x^2+u^2} du \\ &= \log(x) + i \left[\operatorname{Arctg}(\frac{u}{x}) - i \frac{1}{2} \log(x^2+u^2) \right]_0^y \\ &= \log(x) + i \operatorname{Arctg}(\frac{y}{x}) + \frac{1}{2} (\log(x^2+y^2) - \log(x^2)) \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + i \operatorname{Arctg}(\frac{y}{x}) \end{aligned}$$

Pour $y = 0$ on retrouve $g(x) = \log(x)$ comme il se doit. Notre résultat est particulièrement simple si l'on remarque qu'il s'écrit sous la forme :

$$g(z) = \log(r) + i\theta$$

avec r et θ les coordonnées polaires de $z = x + iy$, $x > 0$, qui sont définies par $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. Cela ne détermine θ que modulo 2π et $\theta = \operatorname{Arctg}(\frac{y}{x})$ est celui qui vérifie $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Conséquence intéressante de $g(z) = \log(r) + i\theta$:

$$\exp(g(z)) = re^{i\theta} = x + iy = z$$

On aurait pu le dire à l'avance via le Théorème d'Unicité Analytique[2] appliqué aux fonctions $\exp(g(z))$ et z qu'on savait identiques au moins pour $z = x$, $0 < x < \infty$, donc partout identiques dans l'ouvert connexe U. Parmi toutes les solutions possibles à l'équation $\exp(w) = z$, notre $g(z)$ est précisée de manière unique comme étant la solution dont la partie imaginaire est dans $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, puisque les autres solutions ont leurs parties imaginaires qui en diffèrent par un multiple entier de 2π.

On dit que $g(z)$ est la **détermination principale** du logarithme. Dorénavant nous utiliserons la notation $\operatorname{Log}(z)$ pour désigner cette fonction précise. En fait nous allons dépasser le plan U pour définir $\operatorname{Log}(z)$ dans l'ouvert $\Omega = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$ par la formule :

$$\operatorname{Log}(z) = \log(r) + i\theta, \qquad -\pi < \theta < \pi \tag{2}$$

2. l'appellation standard est « principe du prolongement analytique ».

Pour voir que cette fonction $\mathrm{Log}(z)$ est bien holomorphe dans Ω et est la primitive (unique car Ω est connexe) de $\frac{1}{z}$ s'annulant en 1, on peut procéder ainsi : dans le demi-plan U, on sait déjà que c'est bon. Dans le demi-plan supérieur $z = x + iy$, $y > 0$, on remarque que notre fonction Log ainsi définie est telle que $\mathrm{Log}(z) = i\frac{\pi}{2} + \mathrm{Log}(\frac{z}{i}) = i\frac{\pi}{2} + g(\frac{z}{i})$, avec $\frac{z}{i} \in U$. Donc effectivement Log est holomorphe dans ce demi-plan et $\mathrm{Log}'(z) = g'(\frac{z}{i})\frac{1}{i} = \frac{1}{z}$. De même dans le demi-plan inférieur $\mathrm{Log}(z) = -i\frac{\pi}{2} + \mathrm{Log}(iz)$ et ici c'est iz qui est dans U.

Nous pouvons aussi nous assurer de l'existence d'une telle primitive g pour toute fonction holomorphe f sur Ω (pas seulement pour $f(z) = \frac{1}{z}$) par le raisonnement suivant : au lieu de construire g en intégrant f le long du segment horizontal $[1, x]$ puis du segment vertical $[x, x + iy]$, comme nous avons fait sur U, nous construisons g en intégrant f d'abord le long de la verticale $[1, 1 + iy]$ puis le long de l'horizontale allant de $1 + iy$ à $x + iy$. Vous noterez que le théorème de Cauchy-Goursat ne peut plus être invoqué pour justifier ensuite l'existence et le calcul des deux dérivées partielles de g [3] mais que cela n'est pas grave car notre argument de dérivation sous le signe somme (licite puisque nous savons que f a des dérivées partielles continues) s'applique. Donc le cas concret que nous avons ici avec $f(z) = \frac{1}{z}$ cela donne la formule :

$$\mathrm{Log}(x + iy) = i\int_0^y \frac{1}{1 + iu}du + \int_1^x \frac{1}{t + iy}dt \tag{3}$$

Cette formule est valable pour tout $x + iy \in \Omega$. Voyons ce que cela donne, si l'on fait le calcul (avec nos bonnes vieilles fonctions Arctg et $\log(x)$, $x > 0$) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}(x + iy) &= \int_0^y \frac{i + u}{1 + u^2}du + \int_1^x \frac{t - iy}{t^2 + y^2}dt \\
&= \left[i\,\mathrm{Arctg}(u) + \frac{1}{2}\log(1 + u^2)\right]_0^y + \left[\frac{1}{2}\log(t^2 + y^2) - i\,\mathrm{Arctg}(\frac{t}{y})\right]_1^x \\
&= i\,\mathrm{Arctg}(y) + \frac{1}{2}\log(1 + y^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) - i\,\mathrm{Arctg}(\frac{x}{y}) - \frac{1}{2}\log(1 + y^2) + i\,\mathrm{Arctg}(\frac{1}{y}) \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i\left(\mathrm{Arctg}(y) - \mathrm{Arctg}(\frac{x}{y}) + \mathrm{Arctg}(\frac{1}{y})\right)
\end{aligned}$$

3. mais si ! certes le rectangle de sommets 1, x, $x + iy$, $1 + iy$ n'est plus une option si $x < 0$ mais on peut utiliser d'autres rectangles. Réfléchissez-y.

Le résultat semble extrêmement bizarre ! Il est correct pourtant. Il faut préciser que pour mener à bien ce calcul on a dû supposer $y \neq 0$. Supposons $y > 0$. Alors $\mathrm{Arctg}(y) + \mathrm{Arctg}(\frac{1}{y})$ vaut exactement (pourquoi ?) $\frac{\pi}{2}$ et la formule signifie donc :

$$\mathrm{Log}(x+iy) = \log(r) + i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}(\frac{x}{y})) \ ,$$

ce qui est correct car en fait pour $y > 0$ on a :

$$\mathrm{Log}(x+iy) = \log(r) + i\theta, \qquad 0 < \theta < \pi \ ,$$

et $\mathrm{tg}(\theta - \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}{\cos(\theta-\frac{\pi}{2})} = \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -\frac{x}{y}$, donc effectivement, puisque $-\frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$, on a $\theta - \frac{\pi}{2} = \mathrm{Arctg}(-\frac{x}{y}) = -\mathrm{Arctg}(\frac{x}{y})$ et $\theta = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}(\frac{x}{y})$. Je vous laisse vérifier que la formule marche aussi pour $y < 0$.

Néanmoins le résultat est décevant car nous voudrions une formule explicite valable partout dans Ω, que y soit positif, nul ou négatif. La formule intégrale (3) est partout valable sur Ω mais elle n'est pas explicite. Pour obtenir une formule valable et explicite, nous pouvons faire un raisonnement géométrique. Supposons $y > 0$, considérons les points $A = (r, 0)$, $O = (0, 0)$, et $B = (x, y)$. Le triangle AOB est isocèle, et donc si l'on note α l'angle (non orienté) au sommet A on a $2\alpha + \theta = \pi$. Donc $\frac{1}{2}\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et $\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\theta) = \mathrm{ctg}(\alpha) = \frac{r-x}{y} = \frac{r^2-x^2}{(r+x)y} = \frac{y}{r+x}$, d'où :

$$\theta = 2\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

En faisant attention aux signes, on constate que cela vaut aussi pour $y < 0$ (et pour $y = 0$ évidemment). Finalement, une formule partout valable dans Ω est :

$$\mathrm{Log}(x+iy) = \log(r) + i\theta = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\,2\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \tag{4}$$

On n'a pas épuisé tout ce qu'il y avait à dire. Supposons que $g(z)$ soit une fonction holomorphe dans Ω telle que $g(1) = 0$ et $\exp(g(z)) = z$. Alors je prétends que $g(z) = \mathrm{Log}(z)$ partout. En effet, la différence $g(z) - \mathrm{Log}(z)$ ne peut prendre que des valeurs dans $2\pi i\mathbf{Z}$. Les parties réelles sont donc identiques et les parties imaginaires ne peuvent différer que par des multiple de 2π. Notons $F(z) = \mathrm{Im}(g(z) - \mathrm{Log}(z))$ et appliquons le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue réelle $t \mapsto f(t) = F(1 + t(z-1))$, pour z fixé et $0 \leq t \leq 1$. Si $f(1) \neq f(0) = 0$ il y aura des valeurs intermédiaires non-multiples entiers de 2π (par exemple π si $f(1) > 0$ ou $-\pi$ si $f(1) < 0$). Donc $f(1) = 0$. Ainsi $g(z) = \mathrm{Log}(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Enfin, examinons la question de $\mathrm{Log}(z_1 z_2)$. Si z_1 et z_2 sont dans Ω leur produit peut être dans $]-\infty, 0[$. Nous faisons un choix et décidons que $\mathrm{Log}(-t) = \log(t) + i\pi$ pour $0 < t < \infty$. La fonction Log est donc définie sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Mais elle n'est holomorphe que sur Ω (elle n'est pas continue aux points de l'axe réel négatif). Autrement dit, la définition est :

$$z \neq 0 \implies \quad \mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\theta, \quad \text{avec} \quad -\pi < \theta \leq +\pi$$

Alors comme $\exp(\mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)) = \exp(\mathrm{Log}(z_1)) \exp(\mathrm{Log}(z_2)) = z_1 z_2$, on a :

$$\mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) = \mathrm{Log}(z_1 z_2) + i\, 2\pi k(z_1, z_2), \quad k(z_1, z_2) \in \mathbf{Z}$$

et $k(z_1, z_2) = 0$ si et seulement si [4] $\mathrm{Im}(\mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)) \in]-\pi, +\pi]$. On raisonne de même avec $\mathrm{Log}(z_1/z_2)$. En conclusion :

Théorème 1 *On définit la* **détermination principale du logarithme** *comme étant la fonction* $\mathrm{Log}(z)$ *sur* $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ *donnée par :*

$$\mathrm{Log}(z) = \log(r) + i\,\theta, \quad \textit{pour } z = re^{i\theta}, r > 0, -\pi < \theta \leq +\pi$$

Sur l'ouvert $\Omega = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$ *la fonction* Log *est holomorphe et est la primitive de* $\frac{1}{z}$ *s'annulant en* $z = 1$*. De plus la fonction* Log *est l'unique fonction holomorphe sur* Ω *s'annulant en* 1 *et vérifiant* $\exp(\mathrm{Log}(z)) = z$ *pour tout* $z \in \Omega$*. On a*

$$|\mathrm{Im}(\mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2))| < \pi \implies \quad \mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)$$

$$|\mathrm{Im}(\mathrm{Log}(z_1) - \mathrm{Log}(z_2))| < \pi \implies \quad \mathrm{Log}(\frac{z_1}{z_2}) = \mathrm{Log}(z_1) - \mathrm{Log}(z_2)$$

On a :

$$x > 0 \implies \mathrm{Log}(x + iy) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i\,\mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})$$
$$z \in \Omega \implies \mathrm{Log}(x + iy) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i\, 2\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$
$$|h| < 1 \implies \mathrm{Log}(1 + h) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{h^n}{n}$$

4. les valeurs possibles pour k sont -1, 0, et $+1$.

La fonction Log *est aussi l'unique fonction holomorphe sur* Ω *qui coïncide avec le logarithme népérien sur l'axe réel positif. Elle est discontinue le long de l'axe réel négatif :*

$$r > 0 \implies \begin{aligned} &\lim_{\epsilon \to 0^+} \mathrm{Log}(-r + i\epsilon) = \log(r) + i\pi \\ &\lim_{\epsilon \to 0^+} \mathrm{Log}(-r - i\epsilon) = \log(r) - i\pi \end{aligned}$$

Il ne faudrait pas accorder, dans ces questions de logarithmes complexes, une place privilégiée quelconque à l'axe réel négatif : toute demi-droite partant de l'origine peut jouer un rôle analogue. Par exemple, considérons la fonction $f(z) = \mathrm{Log}(iz) - i\frac{\pi}{2}$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus i[0, +\infty[$, a comme dérivée $\frac{1}{z}$ et s'annule en $z = 1$. Elle vérifie, en fait :

$$f(z) = \log(r) + i\alpha, \quad z = re^{i\alpha}, \quad -\frac{3\pi}{2} < \alpha \leq +\frac{\pi}{2}$$

Ou encore, on considère $\mathrm{Log}(\frac{z}{i}) + i\frac{\pi}{2}$, qui est holomorphe pour $z \notin i]-\infty, 0]$ et vaut $\log(r) + i\beta$, $z = re^{i\beta}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta \leq 3\frac{\pi}{2}$. Aussi, on peut considérer la fonction $\mathrm{Log}(-z) + i\pi$ pour $z \notin [0, +\infty[$ qui vaut $\log(r) + i\gamma$, pour $z = re^{i\gamma}$ avec $0 < \gamma \leq 2\pi$ et $r > 0$. Elle ne vérifie plus $f(1) = 0$ (puisqu'avec notre définition de $\mathrm{Log}(-1) = +i\pi$ cela donne $f(1) = 2i\pi$) mais on a $\lim_{\epsilon \to 0^+} f(1 + i\epsilon) = 0$. Par contre $\lim_{\epsilon \to 0^+} f(1 - i\epsilon) = +2i\pi$.

Dans le paragraphe précédent j'ai noté α, β, γ les différentes déterminations de la coordonnée polaire angulaire de z, pour éviter les confusions, mais la pratique normale est de conserver la notation θ. Pour spécifier exactement de quel θ on parle il suffit d'indiquer les inégalités que doit vérifier θ. Traditionnellement θ est appelée **argument**. Lorsque l'on impose $-\pi < \theta < \pi$ on parle de la **détermination principale de l'argument**, et on la note $\mathrm{Arg}(z)$ (notre convention sur $]-\infty, 0[$ est donc $\mathrm{Arg}(-1) = +\pi$). Sinon on a une autre « détermination » de l'argument et on écrit simplement $\arg(z)$ sans la lettre majuscule et aussi $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$.

Cela me donne l'occasion de préciser que d'une manière générale une fonction que l'on note $\log(z)$ sur un ouvert U est certes une primitive de la fonction $\frac{1}{z}$, mais que la réciproque ne vaut pas : on réserve l'écriture $\log(z)$ aux fonctions holomorphes $g(z)$ telles que $\exp(g(z)) = z$ en tout z de l'ouvert concerné[5]. Les primitives[6] de $\frac{1}{z}$ sont définies à une

5. prouver que cela implique $g'(z) = 1/z$.
6. sur un ouvert connexe.

constante complexe additive près, alors que pour les fonctions $\log(z)$ la seule ambiguïté est modulo $2\pi\, i$.

Signalons aussi que lorsque deux fonctions holomorphes sont reliées par la relation $\exp(g(z)) = f(z)$, on écrit souvent $g(z) = \log f(z)$, $\mathrm{Im}(g(z)) = \arg f(z)$, et qu'en règle générale il ne faut **surtout pas** faire l'erreur de croire que cela veut dire $g(z) = \mathrm{Log}(f(z))$, $\mathrm{Im}(g(z)) = \mathrm{Arg}(f(z))$. Cela ne sera le cas que si $|\mathrm{Im}(g(z))| < \pi$ pour tout z de l'ouvert où l'on travaille. Par contre il est toujours vrai que $\mathrm{Re}(g(z)) = \log|f(z)|$.

2 Ouverts étoilés et primitives

Un ouvert U est dit **étoilé** si il existe $z_0 \in U$ tel que pour tout $z \in U$ le segment $[z_0, z]$ est entièrement inclus dans U. C'est donc une notion plus générale que la **convexité** : un ouvert (ou un ensemble) est dit convexe si il contient le segment $[z_0, z_1]$ dès qu'il contient les extrémités z_0 et z_1. Alors que pour un ouvert étoilé on demande seulement qu'il existe un certain z_0 tel que cela soit vrai pour tous les z_1. Un disque ou un demi-plan est convexe (et donc aussi étoilé) ; l'ouvert Ω n'est pas convexe mais il est étoilé (en prenant $z_0 = 1$). Tout ouvert étoilé est connexe. [7]

Dans la section précédente nous avons prouvé que toute fonction holomorphe sur Ω admettait une primitive. Cela est vrai dans tout ouvert étoilé :

Théorème 2 *Soit U un ouvert étoilé. Toute fonction holomorphe sur U admet une primitive holomorphe sur U.*

Preuve : soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert U, qui est étoilé par rapport au point z_0. Si une primitive g existe alors on a nécessairement :

$$g(z) - g(z_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(z_0 + t(z - z_0))\, dt = \int_0^1 (z - z_0) f(z_0 + t(z - z_0))\, dt$$

Définissons donc g par cette formule, la valeur de $g(z_0)$ étant arbitraire. En notant $z = x+iy$

7. un grand avantage de la convexité sur le caractère étoilé ou connexe, c'est que la convexité se préserve par intersections.

on calcule :

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x+iy) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big((z-z_0)f(z_0+t(z-z_0))\Big)dt$$

Cela est justifié car la fonction des trois variables réelles x, y, t, définie pour $(x,y,t) \in U \times [0,1]$ par $F(x,y,t) = (z-z_0)f(z_0+t(z-z_0))$ (avec $z = x+iy$) admet pour y et t fixés une dérivée partielle en x qui est continue en le triplet (x,y,t) :

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y,t) = f(z_0+t(z-z_0)) + (z-z_0)\cdot f'(z_0+t(z-z_0))\cdot t\ .$$

Donc la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x} g(x+iy)$ existe, et vaut :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} g(x+iy) &= \int_0^1 \Big(f(z_0+t(z-z_0)) + (z-z_0)\cdot f'(z_0+t(z-z_0))\cdot t\Big)dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(f(z_0+t(z-z_0))\cdot t\Big)dt \\ &= f(z)\end{aligned}$$

Un calcul semblable prouve $\frac{\partial}{\partial y} g(x+iy) = if(x+iy)$. Donc g a des dérivées partielles continues qui vérifient les équations de Cauchy-Riemann. Donc g est une fonction holomorphe et $g' = \frac{\partial}{\partial x} g = f$.

Théorème 3 *Soit U un ouvert étoilé. Toute fonction holomorphe sur U ne s'annulant pas peut s'écrire comme l'exponentielle d'une autre fonction holomorphe.*

Pour la preuve soit f ne s'annulant pas sur l'ouvert étoilé U. La fonction $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$ est donc définie et holomorphe sur U et par le théorème précédent admet une primitive $g(z)$. Si l'on calcule la dérivée de $f(z)\exp(-g(z))$ on trouve $(f'(z) - f(z)g'(z))\exp(-g(z))$ ce qui donne zéro identiquement. Donc $f(z)\exp(-g(z))$ est une constante C (l'ouvert étoilé U est connexe), nécessairement non nulle et $\exp(g(z)) = \frac{1}{C}f(z)$. On choisit alors w avec $e^w = C$ et l'on remplace $g(z)$ par $g_1(z) = g(z) - w$. La fonction g_1 est holomorphe et $\exp(g_1) = f$ sur U.

3 Fonctions puissances et série binomiale

Si z et a sont deux nombres complexes, et si $z \neq 0$ alors on peut définir z^a mais pas d'une manière unique : il faut choisir w avec $\exp(w) = z$ et poser $z^a = \exp(aw)$. Suivant le choix de w, le résultat est donc variable à une puissance entière de $\exp(2\pi\, ia)$ près. Par exemple i^i peut valoir $e^{-\frac{\pi}{2}}$ (si on prend $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$) ou $e^{-5\frac{\pi}{2}}$ (si on prend $i = e^{i\frac{\pi}{2}+i2\pi}$), etc...

Il n'y a que pour les exposants a entiers qu'il n'y a pas d'ambiguïté. Sinon, pour a quelconque, si on restreint z à l'ouvert $\Omega = \mathbf{C}\backslash]-\infty, 0]$, alors on peut utiliser la détermination principale du logarithme pour définir la détermination principale de la puissance z^a :

$$z \in \Omega, a \in \mathbf{C}, \qquad z^a = e^{a\,\mathrm{Log}(z)}$$

La fonction z^a est donc holomorphe en a de dérivée $\mathrm{Log}(z)z^a$ et holomorphe en z de dérivée $ae^{a\,\mathrm{Log}(z)}\frac{1}{z} = az^{a-1}$:

$$\frac{\partial}{\partial z} z^a = az^{a-1}$$

Il serait en fait plus prudent d'écrire $\frac{z^a}{z}$ au lieu de z^{a-1} lorsque l'on n'a pas précisé la détermination choisie et il est alors entendu qu'il s'agit de la même détermination dans les deux membres de l'égalité $\frac{\partial}{\partial z} z^a = a\frac{z^a}{z}$.

Dans le disque ouvert $D(1, 1) = \{z \mid |z-1| < 1\}$, on peut développer en série entière en la variable $h = z-1$ la fonction holomorphe $f(z) = z^a = (1+h)^a = e^{a\,\mathrm{Log}(1+h)}$. On sait que ce développement est donné par la formule de Taylor :

$$z^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

et on a $f^{(n)}(z) = a(a-1)\dots(a-n+1)z^{a-n}$. On obtient donc la **série binomiale de Newton** :

$$\begin{aligned} |h| < 1 \implies \qquad (1+h)^a &= 1 + ah + \frac{a(a-1)}{2}h^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}h^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}h^n \end{aligned}$$

Examinons le rayon de convergence de cette série. Il faut faire attention : si $a \in \mathbf{N}$ le rayon de convergence est infini car nous avons affaire à un polynôme. Sinon, ses coefficients d_n sont tous non nuls et on a $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{a-n}{1+n}$ qui a comme limite -1 lorsque $n \to \infty$. Par un critère connu[8] de deuxième ou première année, cela veut dire que le rayon de convergence est exactement 1.

La question du comportement de la série binomiale sur le cercle $|h| = 1$ est **extrêmement** intéressante. Nous y consacrerons le prochain chapitre. En attendant introduisons une notation très utilisée ; on pose (symbole de Pochhammer) :

$$(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$$

pour tout $a \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$. Donc $(a)_0 = 1$, $(a)_1 = a$, $(a)_2 = a(a+1)$, etc.... L'avantage des plus au lieu des moins c'est que le signe de $(a)_n$ (pour a réel) est constant pour n grand, au lieu d'alterner comme le fait $a(a-1)\dots(a-n+1)$. Avec cette notation la série binomiale est

$$(1+h)^a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-a)_n}{n!} h^n$$

La formule la plus commode est donc en général :

$$(1-h)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} h^n \ ,$$

par exemple $(1-h)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}h + \frac{1.3}{2.4}h^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}h^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}h^4 + \dots$. C'est le moment de rappeler le célèbre **produit infini de Wallis** :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3}{2.2}\,\frac{3.5}{4.4}\,\frac{5.7}{6.6}\,\frac{7.9}{8.8}\dots$$

Je vous laisse utiliser cela pour en déduire que le $n^{\text{ème}}$ coefficient de la série pour $(1-h)^{-1/2}$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-1/2}$ pour $n \to \infty$. Nous y reviendrons très en détail dans le prochain chapitre[9], où nous montrerons d'une manière générale $\frac{(a)_n}{n!} \sim \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}$, pour une certaine constante $\Gamma(a)$, qui vue comme fonction de $a \in \mathbf{C}$, $-a \notin \mathbf{N}$, est une fonction holomorphe presque aussi fondamentale en mathématiques que les fonctions cos, sin et exp. En fait si dans votre entourage on met en doute le sérieux de vos études vous n'aurez qu'à répliquer que vous connaissez la fonction Gamma d'Euler pour remettre tout le monde à sa place. Mais j'anticipe sur le prochain chapitre.

8. la série $\sum d_n h^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum |d_n| h^n$ et cette dernière a rayon de convergence 1 puisque le rapport de deux coefficients successifs tend vers 1.

9. je reporte à un exercice ou au chapitre suivant la justification de la formule de Wallis (qui n'a d'ailleurs pas d'utilité numérique, la convergence étant très lente).

4 Intégrales le long de chemins

Nous considérons un chemin (de classe C^1), c'est-à-dire une application dérivable $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$, $-\infty < a < b < \infty$. Le point de départ est $\gamma(a)$, le point d'arrivée $\gamma(b)$. Lorsque ces deux points sont identiques on dit que l'on a un **lacet**. On ne demande pas que les tangentes se raccordent si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Donc d'une manière générale on ne travaillera pas avec des chemins C^1 au sens strict, mais des chemins continus pour lesquels il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ telle que la restriction de γ à chaque $[a_j, a_{j+1}]$ soit de classe C^1. On dira que le chemin est C^1 *par morceaux*.

On peut associer à un tel chemin sa **longueur** :[10] [11]

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

Cette longueur se comporte additivement lorsque l'on met des chemins bout-à-bout. La longueur possède une importante propriété d'**invariance par reparamétrisation** : supposons que l'on se donne une bijection croissante (donc continue) de classe C^1 par morceaux $\psi : [c,d] \to [a,b]$. Alors le chemin $\gamma_1 = \gamma \circ \psi$ est dit avoir été obtenu de γ par une reparamétrisation. Calculons[12] la longueur de γ_1 :

$$L_{\gamma_1} = \int_c^d |\gamma_1'(u)|du = \int_c^d |\gamma'(\psi(u))|\psi'(u)du = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = L_\gamma$$

Les deux longueurs coïncident.

Considérons $\phi(t) = \int_a^t |\gamma'(v)|dv$. La fonction ϕ est continue de classe C^1 par morceaux et elle est croissante. Afin qu'elle soit strictement croissante le plus simple est d'imposer au vecteur vitesse $\gamma'(t)$ de ne jamais devenir nul. Alors $\phi'(t) = |\gamma'(t)|$ est toujours strictement positif (en un nombre fini de points lire à la place de ϕ', « dérivée à gauche » et/ou « dérivée à droite »). Si c'est le cas on dira que le chemin est **régulier**. La fonction continue ϕ strictement croissante établit une bijection de $[a,b]$ sur $[0, L_\gamma]$ qui admet une réciproque continue elle aussi de classe C^1 par morceaux que l'on notera ψ. Par construction si l'on

10. ici on considère $\gamma'(t)$ en tant que nombre complexe et $|\gamma'(t)|$ est son module ; mais on peut aussi voir $\gamma'(t)$ comme un vecteur vitesse $\vec{v} = (v_x, v_y)$ et alors $|\gamma'(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ est sa norme.

11. si les dérivées à droites et à gauche diffèrent en $a = a_0 < \cdots < a_N = b$, remplacer $\int_a^b$ par $\sum_j \int_{a_j}^{a_{j+1}}$.

12. en un nombre fini de points la dérivée à gauche de ψ peut différer de la dérivée à droite donc la notation ψ' est un peu abusive.

reparamètre γ en $\gamma \circ \psi$ on obtient un chemin dont le vecteur vitesse $\gamma'(\psi(s))\psi'(s)$ est partout de norme 1. En effet $|\gamma'(\psi(s))\psi'(s)| = \phi'(\psi(s))\psi'(s) = \frac{d}{ds}(\phi \circ \psi)(s) = 1$. On dit que l'on a re-paramétré γ par sa longueur d'arc et l'on fait référence à ds comme étant l'élément d'arc. Comme $s = \phi(t)$ on a par rapport à la paramétrisation initiale :

$$ds = |\gamma'(t)|dt$$

Si γ prend ses valeurs dans un ouvert U sur lequel est défini une fonction $F(x, y)$ à valeurs réelles ou complexes on pose par définition :

$$\int_\gamma F(x, y)ds := \int_a^b F(x(t), y(t))|\gamma'(t)|dt ,$$

où l'on a écrit $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Cette notion est invariante par reparamétrisation.

Mais nous utiliserons *très peu* cela. Notre principal intérêt est dans un autre type d'intégrale :

$$\int_\gamma F(z)dz = \int_\gamma F(x, y)dz := \int_a^b F(x(t), y(t))\gamma'(t)dt$$

Je m'autorise à utiliser de manière équivalente les écriture $F(z)$, $F(x + iy)$, $F(x, y)$. Les grincheux iront se plaindre où ils pourront. On utilisera aussi les notations $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, c'est-à-dire $x(t) = x(\gamma(t))$ et $y(t) = y(\gamma(t))$ en considérant x et y comme des fonctions $\mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $x(z) = \mathrm{Re}(z)$, $y(z) = \mathrm{Im}(z)$, $z = x(z) + iy(z)$. Vous suivez, j'espère.

Notez bien la subtile différence avec la notion précédente : on a ici le nombre complexe $\gamma'(t)$ et non plus le nombre réel positif $|\gamma'(t)|$. Mais comme nos re-paramétrisations sont toujours supposées croissantes, l'invariance par reparamétrisation vaut aussi pour notre nouveau type d'intégrale.[13] Nous n'utiliserons l'ancien type que lorsque nous aurons besoin de faire des majorations :

$$\left|\int_\gamma F dz\right| \leq \int_a^b |F||\gamma'(t)|dt = \int_\gamma |F|ds \leq \sup_{z \in \gamma([a,b])} |F(z)| \cdot L_\gamma$$

On notera que le lien entre les deux types d'intégrales se lit dans l'écriture aux vertus mnémotechniques : $|dz| = ds$.

13. pour les intégrales de type « longueur » il y aussi invariance sous les reparamétrisations qui renversent le sens de parcours. Pour les intégrales du type « dz » changer le sens de parcours se traduit par un facteur multiplicateur (-1).

Pendant que j'y suis je signale un troisième type d'intégrale invariante par reparamétrisation croissante :

$$\int_\gamma F(z)\overline{dz} := \int_a^b F(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}dt$$

et il y a aussi

$$\int_\gamma F(z)dx := \int_a^b F(\gamma(t))x'(t)dt$$

$$\int_\gamma F(z)dy := \int_a^b F(\gamma(t))y'(t)dt$$

Autrement dit on a $dz = dx + idy$, $\overline{dz} = dx - idy$, au sens où cela devient des égalités lorsque l'on intègre une fonction F le long d'un chemin γ.[14]

Soit z_0 et z_1 (les affixes de) deux points du plan complexe. On note $[z_0, z_1]$ tout chemin allant de z_0 à z_1 en ligne droite, dans la même classe de paramétrisation que le chemin canonique $t \mapsto z_0 + t(z_1 - z_0)$ (ici $[a, b] = [0, 1]$). Ainsi :

$$\int_{[z_0,z_1]} F(z)dz = \int_0^1 F((1-t)z_0 + tz_1)dt$$

$$\int_{[z_1,z_0]} F(z)dz = \int_0^1 F((1-u)z_1 + uz_0)du = \int_1^0 F((1-t)z_0 + tz_1)dt$$

donc

$$\int_{[z_1,z_0]} F(z)dz = -\int_{[z_0,z_1]} F(z)dz$$

Quelques cas particuliers :

$$\int_{[1+i,-1+i]} F(z)dz = \int_1^{-1} F(x+i)dx$$

$$\int_{[-1+i,-1-i]} F(z)dz = \int_1^{-1} F(-1+iy)idy$$

Nous utiliserons ce genre de formules très souvent. Une ligne brisée continue pourra par exemple être notée $[z_0, z_1, z_2, \dots, z_N]$ et

$$\int_{[z_0,z_1,z_2,\dots,z_N]} F(z)dz = \int_{[z_0,z_1]} F(z)dz + \cdots + \int_{[z_{N-1},z_N]} F(z)dz$$

Alors on voit que dans le chapitre précédent notre définition ad-hoc pour les intégrales le long du bord d'un rectangle de sommets z_0, z_1, z_2, z_3 (les sommets sont énumérés dans

14. une définition plus intrinsèque de la notion de forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ est pour plus tard.

le sens direct, contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre) peut se ré-écrire maintenant [15] sous la forme :

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz = \int_{[z_0,z_1,z_2,z_3,z_0]} f(z)dz$$
$$= \int_{[z_0,z_1]} f(z)dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)dz + \int_{[z_2,z_3]} f(z)dz + \int_{[z_3,z_0]} f(z)dz\ .$$

On notera bien que le résultat dépend du sens de parcours, direct ou rétrograde, et que par convention la notation $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz$ est réservée au sens de parcours direct. On notera aussi que le choix du point du sommet de départ z_0 n'importe pas et aussi que parfois on peut utiliser un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ parcourant le bord du rectangle dans le sens direct et débutant en un autre point que l'un des sommets.

Il est commode d'utiliser la notion de **chaîne**. Une chaîne $\Gamma = n_1\gamma_1 + \cdots + n_k\gamma_k$ est une combinaison formelle additive de chemins, à coefficients n_j en général pris dans $\mathbf{Z}$, mais pouvant aussi être des nombres complexes quelconques, de sorte que dorénavant :

$$\int_\Gamma F(x,y)dz = n_1\int_{\gamma_1} F(x,y)dz + \cdots + n_k\int_{\gamma_k} F(x,y)dz$$

Aussi, dans ces chaînes on considère qu'un chemin parcouru en sens inverse ($u \mapsto \gamma_1(u) = \gamma(-u)$, $-b \le -u \le -a$), et l'expression $-\gamma$ signifie la meme chose puisque $\int_{\gamma_1} F(z)dz = -\int_\gamma F(z)dz$.

Dans la pratique nous nous intéresserons aux intégrales $\int_\gamma F(x+iy)dz$ presque exclusivement lorsque $F(z) = F(x+iy)$ est holomorphe. Il y a alors un théorème **tout-à-fait remarquable et extraordinaire** : *lorsque l'on déforme le chemin en maintenant ses extrémités fixes tout en restant dans le domaine d'holomorphie de la fonction F l'intégrale $\int_\gamma F(z)dz$ reste exactement invariante ; de même lorsque l'on déforme continûment un lacet. En particulier lorsque l'on peut déformer continûment ce lacet en un point tout en restant en permanence dans l'ouvert d'holomorphie de F alors $\int_\gamma F(z)dz = 0$.* Nous démontrerons et formulerons précisément (notion d'homotopie) ce théorème (disons, de Cauchy-Gauss) à un moment ultérieur. Je pourrais le faire maintenant, mais je veux vous laisser un peu de temps de digestion. J'insiste tout de même sur le fait que c'est là **le point central et fondamental du cours pris dans son ensemble.** Tout le reste en découle. Si on donne à quelqu'un les équations de Cauchy-Riemann il/elle pourra mettre un temps certain avant

15. ce n'est plus limité au seul cas des rectangles aux bords parallèles aux axes.

de découvrir ce théorème. Mais une fois ce théorème connu, tous les autres résultats de la théorie viendront s'imposer à elle/lui.

Ce que nous allons faire maintenant c'est formuler et prouver un théorème très proche de ce que nous venons d'énoncer.

Théorème 4 *Soit U un ouvert non vide et soit f une fonction holomorphe sur U.* Si la fonction f possède une primitive *holomorphe g sur U alors l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ le long d'un chemin continu C^1 par morceaux ne dépend que des extrémités du chemin :*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma g'(z)dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

En particulier l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un lacet est nulle si la fonction admet une primitive. *Par conséquent si U est un ouvert étoilé alors l'intégrale de toute fonction holomorphe le long de tout lacet tracé dans U est nulle et toute intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend que des extrémités $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ (et de la fonction $f\dots$) mais pas des autres détails du chemin $\gamma : [a,b] \to U$.*

La preuve en est extrêmement rapide : on a

$$\int_\gamma g'(z)dz = \int_a^b g'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt} g(\gamma(t))dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

Voilà !

Vous remarquerez que le théorème est une ample généralisation du théorème de Cauchy-Goursat qui nous disait que l'intégrale le long du bord d'un rectangle était nulle pour toute fonction holomorphe sur le rectangle plein. Par exemple il s'applique aux rectangles dont les bords ne sont pas parallèles aux axes, ou aux parallélogrammes, ou aux triangles, aux hexagones, aux ellipses, aux ovoïdes quelconques, en fait à n'importe quoi, à partir du moment que l'on peut trouver un ouvert étoilé incluant la figure et son bord et sur lequel la fonction est holomorphe.

Le théorème s'applique en particulier aux disques, aux demi-plans ou à l'ouvert Ω dans la discussion du Logarithme, car ce sont des ouverts étoilés et toute fonction holomorphe y admet une primitive holomorphe. Par contre si l'on prend $U = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ alors on a comme exemple très important d'une intégrale le long d'un lacet donnant un résultat non nul :

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

Ici et dans la suite, les cercles [16] seront toujours paramétrés dans le sens direct (sens trigonométrique, ou sens contraire au sens de déplacement des aiguilles d'une montre). On a alors, par définition :

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\theta} \frac{d}{d\theta}(re^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

Cela prouve d'ailleurs que $\frac{1}{z}$ ne peut pas avoir de primitive holomorphe définie dans $\mathbf{C}\setminus\{0\}$: mais cela on l'a bien compris depuis notre discussion de la fonction Logarithme.

La non-annulation d'une intégrale le long d'un lacet formant le bord [17] d'un domaine étoilé [18] ne peut donc survenir que si la fonction f ne peut pas être définie et holomorphe en tous les points de l'intérieur de ce domaine. Considérons le cas très intéressant d'un rectangle $\mathcal{R}$ aux bords parallèles aux axes et contenant l'origine en son intérieur, et cherchons à évaluer l'intégrale $\int_{\partial\mathcal{R}} \frac{1}{z} dz$. Considérons $R > 0$ très grand et le carré de centre 0 et de côté $2R$. En prolongeant les côtés du petit rectangle, on crée une décomposition du grand carré en 9 sous-rectangles, dont 8 ne contiennent pas l'origine. Si l'on fait la somme algébrique des intégrales de $\frac{1}{z} dz$ le long des bords de ces 8 rectangles, tous parcourus dans le sens direct, on voit que tous les segments autres que ceux formant le bord du grand carré, ou le bord du petit rectangle, ont une contribution nulle, puisqu'ils sont parcourus une fois dans un sens et une autre fois dans l'autre sens. Les segments constitutifs (du bord) du grand carré se réassemblent pour donner l'intégrale qui lui est associée et ceux formant le petit rectangle donnent (-1) fois $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z) dz$ puisque qu'ils correspondent au sens de parcours rétrograde. Par le théorème précédent ou le théorème de Cauchy-Goursat chacune des intégrales pour les 8 rectangles est nulle. Donc l'intégrale sur le bord du carré et celle sur le bord du rectangle sont identiques : on peut tout aussi bien remplacer le rectangle

16. à propos des intégrales le long de lacets, le résultat ne dépend pas du point de départ pris sur le lacet.

17. je ne cherche pas ici à définir ces notions d'une manière générale. Imaginez des figures simples comme des triangles ou des ellipses.

18. en choisissant un facteur de dilatation $\lambda > 1$ très très proche de 1 et un point par rapport auquel le domaine est étoilé, et en dilatant le domaine dans le rapport λ on reste à l'intérieur du domaine d'holomorphie de la fonction tout en construisant un ouvert étoilé contenant le lacet.

initial par le carré. Répétant l'argument on peut se ramener au carré avec $R = 1$. On a alors en partant du coin inférieur droit :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{R}} \frac{1}{z}dz &= \int_{-1}^{1} \frac{idy}{1+iy} + \int_{1}^{-1} \frac{dx}{x+i} + \int_{1}^{-1} \frac{idy}{-1+iy} + \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-i} \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+y^2} idy + \int_{-1}^{1} \frac{2i}{1+x^2} dx = 2i(2\operatorname{Arctg}(1) + 2\operatorname{Arctg}(1)) = 2\pi i\end{aligned}$$

On retrouve le $2\pi i$ associé aux cercles et ce n'est pas un hasard puisque l'on peut déformer continûment le cercle en le carré sans passer par l'origine des coordonnées où $\frac{1}{z}$ cesse d'être fini.

On peut interpréter le résultat du calcul de $I = \int_{\partial\mathcal{R}} \frac{1}{z}dz$ autrement grâce à la fonction Log. Pour fixer les idées notons z_0 l'affixe du sommet inférieur droit A, puis z_1 et B, z_2 et C, z_3 et D. Je prétends que

$$I = \operatorname{Log}(\frac{z_1}{z_0}) + \operatorname{Log}(\frac{z_2}{z_1}) + \operatorname{Log}(\frac{z_3}{z_2}) + \operatorname{Log}(\frac{z_0}{z_3})$$

En effet sur $[A, B]$ on peut utiliser $\operatorname{Log} \frac{z}{z_0}$ comme primitive de $\frac{1}{z}$, etc...[19] La partie réelle vaut :

$$\log(\frac{|z_1|}{|z_0|}) + \log(\frac{|z_2|}{|z_1|}) + \log(\frac{|z_3|}{|z_2|}) + \log(\frac{|z_0|}{|z_3|}) = \log 1 = 0$$

donc I est imaginaire pur et vaut

$$I = i\left(\operatorname{Arg}(\frac{z_1}{z_0}) + \operatorname{Arg}(\frac{z_2}{z_1}) + \operatorname{Arg}(\frac{z_3}{z_2}) + \operatorname{Arg}(\frac{z_0}{z_3})\right)$$

Soit α, β, γ, δ les angles (à valeur dans $]0, +\pi[$) $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$. Alors

$$I = i(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \ .$$

Donc la formule $I = 2\pi i$ équivaut à

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi \ ,$$

soit encore : *la somme des angles sous lesquels on voit du point O les quatres segments formant le bord du rectangle est exactement égale à 2π.*

On peut sans doute considérer que l'affirmation précédente énoncé une vérité géométrique évidente. En tout cas on voit qu'elle suggère des développements allant bien au-delà du cas des rectangles.

19. d'une manière générale $z \to \operatorname{Log}(z/w)$ est une primitive de $1/z$ sur l'ouvert $\mathbf{C} \setminus \{-tw, t > 0\}$.

On peut aussi raisonner ainsi : nécessairement $\exp(I) = \frac{z_1}{z_0}\frac{z_2}{z_1}\frac{z_3}{z_2}\frac{z_0}{z_3} = 1$ donc $I \in 2\pi\, i\, \mathbf{Z}$. Mais $0 < \alpha + \beta + \gamma + \delta < 4\pi$ car chacun des quatre angles est dans $]0, \pi[$. Donc la seule possibilité est que $I = 2\pi i$. Mais cette démonstration est assez mauvaise car on ne pourrait pas procéder ainsi avec un polygone avec 5 ou plus de sommets.

Une bien meilleure méthode est la suivante. Au lieu des sommets A, B, C, D, il est bien plus astucieux de travailler avec les points P, Q, R, S d'intersections du bord du rectangle avec les axes des coordonnées, de sorte que P est entre A et B, etc...Notons w_0, w_1, w_2, w_3 les affixes correspondantes. Alors $\mathrm{Log}(\frac{z}{w_0})$ est une primitive de $\frac{1}{z}$ sur la partie du bord du rectangle allant dans le sens direct de P à Q, etc... En répétant l'argument plus haut on obtient donc :

$$I = i\left(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'\right)$$

avec α' l'angle $\widehat{POQ}$, ..., δ' l'angle $\widehat{SOP}$. Chacun vaut $\frac{\pi}{2}$. D'où la formule $I = 2\pi i$.[20]

Nous remettons à une occasion future la discussion générale des valeurs possibles pour les intégrales $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ pour des lacets dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ et la façon de les évaluer.

5 Critère d'holomorphie, limites uniformes

Parmi nos raisonnements du premier chapitre il y en a un que nous n'avons pas suffisamment exploité.

Théorème 5 (Critère d'holomorphie) *Soit U un ouvert (non vide) du plan complexe et f une fonction continue sur U. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est holomorphe,*
2. *toute intégrale $\int_{\partial\mathcal{T}} f(z)dz$ le long du bord d'un triangle $\mathcal{T}$ inclus dans U est nulle,*
3. *toute intégrale $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz$ le long du bord d'un rectangle $\mathcal{R}$ inclus dans U est nulle,*
4. *idem pour les rectangles aux bords parallèles aux axes.*

20. cela suggère une preuve de $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ au niveau de la géométrie du collège : on définit géométriquement α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2, de sorte que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, etc..., et $\pi/2 = \alpha' = \alpha_2 + \beta_1$, $\pi/2 = \beta' = \beta_2 + \gamma_1$, $\pi/2 = \gamma' = \gamma_2 + \delta_1$, $\pi/2 = \delta' = \delta_2 + \alpha_1$. J'espère que vous voyez ce que je veux dire.

Attention ! dans cet énoncé les triangles et rectangles considérés doivent être *entièrement* inclus dans l'ouvert U : si l'on suppose seulement que leurs bords sont dans U on ne peut pas conclure à la nullité des intégrales. Lorsque l'on dit qu'un rectangle est inclus dans U on veut dire toujours qu'à la fois son intérieur et son bord le sont.

Preuve du Théorème : supposons f holomorphe. Soit T un triangle plein inclus dans U. Choisissons un z_0 dans l'intérieur de T. Considérons le triangle T_λ un peu plus grand que T obtenu par la dilatation de centre z_0 et de rapport $\lambda > 1$ très proche de 1 ($z \to z_0+\lambda(z-z_0)$). L'ouvert U_λ égal à l'intérieur de T_λ est étoilé (il est même convexe). Le bord du triangle originel $\mathcal{T}$ est un lacet entièrement inclus dans U_λ. Donc $\int_{\partial\mathcal{T}} f(z)dz = 0$. En ce qui concerne les rectangles, on peut : soit montrer $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz = 0$ par la méthode de Goursat comme nous l'avons déjà fait pour les rectangles aux bords horizontaux et verticaux ; soit découper le rectangle en l'union de deux triangles ; soit faire pour le rectangle une démonstration semblable à celle faite ici pour les triangles. Venons-en à l'aspect le plus intéressant du théorème, le fait que si $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz = 0$ pour tout rectangle $\mathcal{R} \subset U$ alors la fonction continue f est holomorphe. On ne va utiliser que des rectangles aux bords parallèles aux axes. Il s'agit donc de la réciproque du théorème de Cauchy-Goursat. Pour la preuve nous n'avons qu'à reprendre à l'identique un raisonnement que nous avons déjà fait au premier chapitre. Pour montrer que f est holomorphe dans un voisinage d'un point $z_0 = x_0+iy_0$ on peut aussi bien remplacer U par un disque $D(z_0, r)$ non vide centré en z_0. Pour $z = x + iy$ dans ce disque, posons :

$$g(x+iy) = \int_{x_0}^{x} f(t+iy_0)dt + i\int_{y_0}^{y} f(x+iu)du$$

Cette expression (et la continuité de f) donne facilement :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x+iy) = if(x+iy)\ .$$

De plus par l'hypothèse faite, on a aussi :

$$g(x+iy) = i\int_{y_0}^{y} f(x_0+iu)du + \int_{x_0}^{x} f(t+iy)dt\ ,$$

et donc

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x+iy) = f(x+iy)\ .$$

Ainsi la fonction g a des dérivées partielles continues vérifiant les équations de Cauchy-Riemann : elle est donc holomorphe, et sa dérivée $g' = f$ l'est donc aussi. Le Théorème est démontré.

Remarques :

1. la partie du théorème qui dit que la fonction continue f est holomorphe si les intégrales prises le long des bords de triangles sont nulles est appelée « **Lemme de Morera** ».
2. pour f holomorphe on aurait pu démontrer dès le premier chapitre $\int_{\partial\mathcal{T}} f(z)dz = 0$ pour tout triangle $\mathcal{T}$ par la méthode de Goursat de subdivision utilisée pour les rectangles.

Considérons maintenant des fonctions f_1, f_2, ... sur un ouvert U. Je rappelle que l'on dit qu'elles convergent uniformément vers une fonction limite f si :

$$\forall\epsilon > 0\, \exists N \in \mathbf{N} \quad n \geq N \implies \forall z \in U \quad |f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$$

Un théorème important de première ou deuxième année nous dit que si les fonctions f_n sont continues et convergent uniformément vers f alors f est elle-même une fonction continue. De plus considérons un segment quelconque $[z_0, z_1]$ dans l'ouvert U. Alors :

$$\left|\int_{[z_0,z_1]} f_n(z)dz - \int_{[z_0,z_1]} f(z)dz\right| \leq \int_{[z_0,z_1]} |f_n(z) - f(z)||dz|\ ,$$

donc pour $n \geq N$ on a

$$\left|\int_{[z_0,z_1]} f_n(z)dz - \int_{[z_0,z_1]} f(z)dz\right| \leq \epsilon \int_{[z_0,z_1]} |dz| = \epsilon|z_1 - z_0|$$

ce qui établit : $\lim \int_{[z_0,z_1]} f_n(z)dz = \int_{[z_0,z_1]} f(z)dz$ et donc pour tout rectangle $\mathcal{R} \subset U$ (ou tout triangle $\mathcal{T} \subset U$) on a :

$$\lim \int_{\partial\mathcal{R}} f_n(z)dz = \int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz$$

Si maintenant on suppose que toutes les fonctions f_n sont holomorphes, alors toutes les intégrales $\int_{\partial\mathcal{R}} f_n(z)dz$ sont nulles et donc aussi $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz$ est nul. On applique à f le théorème précédent et on en déduit que f est une fonction holomorphe.

Je voudrais maintenant établir qu'en plus on a :

$$\forall k \in \mathbf{N}\ \forall z \in U \quad \lim f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z)$$

autrement dit que les fonctions dérivées convergent (simplement) vers la fonction limite f.[21] Pour cela je rappelle une formule qui a été établie au premier chapitre pour toute

21. dois-je rappeler que pour des fonctions, même infiniment dérivables, de la variable réelle, on ne peut pas sans précaution affirmer que la limite des dérivées est la dérivée de la limite ?

fonction holomorphe f sur un disque $D(z,R)$ et tout $0<r<R$:

$$\forall k\in \mathbf{N} \quad \frac{f^{(k)}(z)}{k!}r^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})e^{-ki\theta}d\theta$$

Cette formule résulte immédiatement des formules de la théorie des séries de Fourier lorsque l'on écrit la série de Taylor pour $f(z+h)$, $h=re^{i\theta}$, sous la forme :

$$f(z+re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z)}{n!}r^n e^{n\,i\theta}$$

La convergence pour r fixé strictement inférieur R qui est lui-même inférieur au rayon de convergence est une convergence normale (on sait que $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right|r^n<\infty$ lorsque r est strictement inférieur au rayon de convergence) et on peut donc calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})e^{-ki\theta}d\theta$ en permutant série et intégrale (voir annexe). Seul le terme avec $n=k$ donne un résultat non nul, et on obtient la formule indiquée pour $\frac{f^{(k)}(z)}{k!}r^k$.

Cela étant acquis si on applique pour chaque k fixé, et pour chaque n la formule à f_n, et aussi à f, on en déduit grâce à l'hypothèse de convergence uniforme :

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!}r^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})e^{-ki\theta}d\theta = \lim \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(z+re^{i\theta})e^{-ki\theta}d\theta = \lim \frac{f_n^{(k)}(z)}{k!}r^k$$

et donc $\lim f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z)$ ce qu'il fallait démontrer. En conclusion :

Théorème 6 (de convergence uniforme) *Supposons que les fonctions holomorphes f_n ($n=0,1,\dots$) convergent uniformément vers une fonction f sur un ouvert U. Alors la fonction limite f est holomorphe. De plus pour tout k on a aussi $\lim f_n^{(k)} = f^{(k)}$ au sens de la convergence simple.*

Remarque : dans la pratique, pour que l'hypothèse de convergence uniforme soit satisfaite, souvent il faut remplacer l'ouvert U par un ouvert $V\subset U$ plus petit, par exemple un disque $D(z_0,r)$ tel que le disque fermé (compact) $\overline{D(z_0,r)}$ soit inclus dans U. Si effectivement $(f_n(z))_{n=0,1,\dots}$ a cette propriété d'être uniformément convergente sur tout tel disque, alors on prouve que les suites des fonctions dérivées conservent elles aussi la propriété de convergence uniforme (sur les disques fermés inclus dans U). Cet énoncé plus complet (théorème de Weierstrass) sera établi dans un autre chapitre.

6 Intégrales à paramètre complexe

Considérons une intégrale sur un intervalle $[a,b]$ réel ($-\infty < a < b < \infty$) :

$$G(\lambda) = \int_a^b g(\lambda, t)dt$$

dépendant d'un paramètre complexe λ qui est dans ouvert $U \subset \mathbf{C}$.

Théorème 7 (d'holomorphie des intégrales à paramètre) *Sous les hypothèses :*

1. *la fonction $(\lambda, t) \mapsto g(\lambda, t)$ est une fonction continue sur $U \times [a,b]$,*
2. *pour chaque $t \in [a,b]$ la fonction $\lambda \mapsto g(\lambda, t)$ est holomorphe sur U,*

alors la fonction $G(\lambda)$ est holomorphe. De plus les fonctions $\frac{\partial^k g}{\partial \lambda^k}(\lambda, t)$ sont elles aussi des fonctions continues sur $U \times [a,b]$ et l'on a

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad G^{(k)}(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial^k g}{\partial \lambda^k}(\lambda, t)dt$$

La preuve est assez sophistiquée. L'holomorphie étant une propriété locale nous pouvons à loisir remplacer U par un ouvert plus petit voisinage d'un point arbitraire $\lambda_0 \in U$. Soit donc $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D(\lambda_0, 2r)}$ est inclus dans U. Comme g est continue sur le compact $\overline{D(\lambda_0, 2r)} \times [a,b]$ il existe une constante C telle que

$$\forall \lambda \in \overline{D(\lambda_0, 2r)} \quad \forall t \in [a,b] \qquad |g(\lambda, t)| \leq C$$

Considérons la série de Taylor au point λ_0 pour la fonction $g(\lambda, t)$:

$$g(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)(\lambda - \lambda_0)^n$$

Les coefficients $c_n(t)$ dépendent de λ_0. Ils sont donnés par la formule de Taylor :

$$c_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda_0, t) \ .$$

De plus on peut les exprimer sous une forme intégrale :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad c_n(t) = \frac{1}{2\pi(2r)^n}\int_0^{2\pi} g(\lambda_0 + 2re^{i\theta}, t)e^{-n\,i\theta}d\theta \ .$$

Nous faisons deux déductions de cette formule intégrale. D'une part par un théorème (voir annexe) sur la continuité des intégrales à paramètre les fonctions $c_n(t)$ sont des fonctions continues de t, d'autre part elles vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |c_n(t)| \leq \frac{C}{(2r)^n} \ .$$

On peut alors écrire pour $|\lambda - \lambda_0| \leq r$:

$$\left| g(\lambda, t) - \sum_{n=0}^{N} c_n(t)(\lambda - \lambda_0)^n \right| \leq \sum_{n>N} \frac{C}{(2r)^n} r^n = \frac{C}{2^N} \ .$$

Définissons maintenant :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad c_n = \int_a^b c_n(t)dt \ .$$

Cela est licite puisque l'on a indiqué précédemment que $c_n(t)$ est une fonction continue de t. On obtient en intégrant sur l'intervalle $[a, b]$ l'inégalité précédente :

$$|\lambda - \lambda_0| \leq r \implies \quad \left| G(\lambda) - \sum_{n=0}^{N} c_n(\lambda - \lambda_0)^n \right| \leq \frac{(b-a)C}{2^N}$$

La série $\sum c_n(\lambda - \lambda_0)^n$ est donc convergente pour $|\lambda - \lambda_0| \leq r$ et l'on obtient :

$$|\lambda - \lambda_0| \leq r \implies \quad G(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda - \lambda_0)^n \ .$$

Ceci prouve que G est holomorphe sur le disque $D(\lambda_0, r)$. De plus comme la série est forcément la série de Taylor de G au point λ_0 on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad G^{(n)}(\lambda_0) = n!c_n = n! \int_a^b c_n(t)dt = \int_a^b \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda_0, t)dt$$

puisque $n!c_n(t) = \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda_0, t)$. Le théorème est démontré, enfin pas tout-à-fait : on a établi que

$$\frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda, t)$$

était une fonction continue de t pour chaque $\lambda \in U$ fixé, mais pas encore qu'elle était une fonction continue du couple (λ, t).

Pour cela nous reprenons $\lambda_0 \in U$ et $r > 0$ exactement comme dans la preuve ci-dessus. Pour $|\lambda - \lambda_0| < r$ le disque fermé centré en λ et de rayon r est inclus dans le disque $D(\lambda_0, 2r)$ donc aussi dans l'ouvert U. Écrivons alors :

$$\frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi\, r^n} \int_0^{2\pi} g(\lambda + re^{i\theta}, t)e^{-n\, i\theta} d\theta \ .$$

Posons :

$$F(\lambda, t, \theta) = g(\lambda + re^{i\theta}, t)e^{-n\,i\theta}$$

Il s'agit d'une fonction continue du triplet $(\lambda, t, \theta) \in D(\lambda_0, r) \times [a, b] \times [0, 2\pi]$. Donc (voir annexe), son intégrale par rapport à θ est une fonction continue du couple (λ, t). Le théorème est entièrement démontré.

Remarque : on a parfois besoin d'un théorème plus général, pour des fonctions $g(\lambda, t)$ qui ne sont pas nécessairement continues en la variable t. On établira plus tard un tel théorème sans hypothèse de continuité, mais seulement de Riemann-intégrabilité sur $[a, b]$. Mais très souvent, si le théorème ci-dessus ne suffit pas, c'est parce que les fonctions $g(\lambda, t)$ ont certes des discontinuités mais seulement en des points fixes $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_N = b$ de $[a, b]$ indépendants de λ. Il suffit alors de remplacer l'intervalle $[a, b]$ par ses sous-intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ pour appliquer le théorème présenté ici. [22]

J'indique brièvement une autre manière d'établir sous les hypothèses faites que

$$G(\lambda) = \int_a^b g(\lambda, t)dt$$

est une fonction holomorphe de λ. On peut utiliser pour cela des sommes de Riemann :

$$S_N(\lambda) = \sum_{0 \le k < N} \frac{b-a}{N} g(\lambda, a + k\frac{b-a}{N})$$

Comme sommes finies les fonctions S_N sont certainement holomorphes. Soit D un disque ouvert tel que le disque fermé $\overline{D}$ est inclus dans U. La fonction g est continue donc uniformément continue sur le compact $\overline{D} \times [a, b]$. Donc, en particulier, pour tout $\epsilon > 0$ on peut choisir $N \gg 1$ tel :

$$\forall \lambda \in \overline{D} \quad |t - u| \le \frac{b-a}{N} \implies |g(\lambda, t) - g(\lambda, u)| \le \epsilon\ .$$

Alors, pour tout $n \ge N$ on a :

$$\left| \int_a^b g(\lambda, t)dt - S_n(\lambda) \right| \le \sum_{0 \le k < n} \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} |g(\lambda, t) - g(\lambda, a + k\frac{b-a}{n})|dt \le (b-a)\epsilon$$

22. les raisons pour ne pas donner le théorème plus général ici sont semblables à celles nous ayant amené à ne démontrer qu'en partie le théorème de Weierstrass sur la convergence uniforme dans la section précédente : c'est que pour mener à bien commodément ces preuves on a besoin d'une compréhension plus approfondie des liens entre dérivées et intégrales pour les fonctions analytiques (formules intégrales de Cauchy). Or, j'ai décidé d'attendre un peu avant de présenter cela.

Ainsi il y a convergence uniforme sur $\overline{D}$ (donc sur D) des fonctions holomorphes $S_n(\lambda)$ vers $G(\lambda)$. La fonction G est donc holomorphe.

Terminons ce chapitre sur le cas des intégrales impropres au sens de Riemann (c'est-à-dire, avec un intervalle infini d'intégration au lieu de $[a,b]$ ou encore avec des fonctions non-bornées au voisinage d'une des extrémités a ou b).

Théorème 8 *Soit $g(\lambda,t)$ une fonction continue en le couple $(\lambda,t) \in U \times [0,+\infty[$, holomorphe en λ pour t fixé et telle qu'il existe une fonction $k(t)$ indépendante de λ avec :*

$$\forall \lambda \in U \ \forall t \in [0,+\infty[\qquad |g(\lambda,t)| \leq k(t) \ ,$$

$$\text{et} \qquad \int_0^\infty k(t)dt < \infty$$

Alors la fonction

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g(\lambda,t)dt$$

est une fonction holomorphe de $\lambda \in U$. De plus,

$$\forall n \geq 1 \quad G^{(n)}(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda,t)dt$$

Un énoncé exactement analogue vaut pour un intervalle tel que $]0,1]$, les fonctions $g(\lambda,t)$ (continues sur $U\times]0,1]$) étant alors supposées dominées par une fonction positive (Riemann intégrable) k avec $\int_0^1 k(t)dt = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 k(t)dt < \infty$.

Preuve : d'abord $G(\lambda) = \int_0^\infty g(\lambda,t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T g(\lambda,t)dt$ existe puisqu'il s'agit d'une intégrale absolument convergente. Soit $T_1 < T_2 < \dots$ une suite quelconque de limite $+\infty$ et posons

$$G_k(\lambda) = \int_0^{T_k} g(\lambda,t)dt$$

Par le théorème précédent les fonctions G_k sont holomorphes. De plus on a :

$$|G(\lambda) - G_k(\lambda)| \leq \int_{T_k}^\infty k(t)dt$$

donc les fonctions G_k convergent uniformément sur U vers $G(\lambda)$. Donc la fonction G est holomorphe. De plus on sait alors que l'on a convergence simple :

$$\forall n \geq 1 \quad G^{(n)}(\lambda) = \lim_{k\to\infty} G_k^{(n)}(\lambda)$$

et à nouveau par le théorème précédent

$$G_k^{(n)}(\lambda) = \int_0^{T_k} \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda, t)dt$$

donc

$$\forall n \geq 1 \quad G^{(n)}(\lambda) = \lim_{k\to\infty} \int_0^{T_k} \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda, t)dt$$

Comme la limite existe pour n'importe quel choix de suite $T_1 < T_2 < \dots$ avec $\lim T_k = \infty$ c'est (par un résultat de première année : « critère par les suites ») que la limite $\lim_{T\to\infty}$ existe (et vaut $G^{(n)}(\lambda)$). Le cas d'intervalle tel que $]0, 1]$ est établi d'une manière analogue.

Remarque : bien souvent on doit remplacer l'ouvert U par des ouverts plus petits pour trouver une fonction k qui marche. Par exemple U est un demi-plan $\mathrm{Re}(\lambda) > \sigma_0$ et pour trouver k on doit se restreindre à l'ouvert $\mathrm{Re}(\lambda) > \sigma_0 + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Si l'on peut faire cela pour tout $\epsilon > 0$ alors c'est bon et on a la conclusion du théorème sur U.

À titre d'exemple d'intégrales à paramètre intéressantes considérons des intégrales du type $F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(t)dt$ (transformées de Laplace). Si :

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_0 t}|g(t)|dt < \infty$$

pour un certain $\sigma_0 \in \mathbf{R}$ on peut affirmer que F est holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(\lambda) > \sigma_0$. Malheureusement pour appliquer le théorème ci-dessus il faudrait supposer g continue comme fonction de t. Alors je propose une preuve spéciale où l'on suppose seulement que g est intégrable au sens de Riemann sur tous les intervalles $[0, T]$, $0 < T < \infty$. En fait j'affirme que pour chaque $T \in]0, +\infty[$ la fonction

$$F_T(\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda t} g(t)dt$$

est une fonction entière de λ. Admettons ce point pour un instant. Pour $\mathrm{Re}(\lambda) \geq \sigma_0$ on a

$$\Big|F(\lambda) - F_T(\lambda)\Big| \leq \int_T^\infty e^{-\sigma_0 t}|g(t)|dt$$

et donc les fonctions F_T tendent vers F lorsque $T \to \infty$, uniformément sur le demi-plan fermé $\mathrm{Re}(\lambda) \geq \sigma_0$. La fonction F est donc continue sur ce demi-plan fermé et holomorphe sur le demi-plan ouvert $\mathrm{Re}(\lambda) > \sigma_0$.

Pour montrer que F_T est une fonction entière, définissons :

$$u_n(t) = \frac{(-\lambda)^n}{n!} t^n g(t)$$

La fonction g Riemann intégrable est bornée sur $[0,T]$, soit C_T une borne supérieure. Soit :

$$a_n = \frac{|\lambda|^n}{n!} T^n C_T$$

de sorte que

$$\forall t \in [a,b] \qquad |u_n(t)| \leq a_n$$

et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = e^{|\lambda| T} C_T < \infty$. On est donc dans le cadre du théorème de l'annexe sur l'interversion des séries et des intégrales en cas de convergence normale (pour un λ donné et fixe) ce qui permet d'affirmer :

$$\int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T u_n(t)\, dt\ .$$

Cela donne donc, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$:

$$F_T(\lambda) = \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} t^n g(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_0^T t^n g(t) dt$$

et prouve que F_T est la somme d'une série entière qui converge pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. Donc F_T est une fonction holomorphe dans tout $\mathbf{C}$ (fonction entière).

7 Annexes

Dans cette annexe je me limite aux outils usuels employés dans le cadre de la théorie de l'intégration suivant Riemann. Lebesgue a démontré des théorèmes incroyablement puissants (théorème de la convergence dominée, théorème de la convergence monotone) qui s'appliquent aux intégrales de Riemann, mais dont le contexte naturel est celui de l'approche de Lebesgue (Borel, Fatou, Riesz,...) à la mesure et à l'intégration. Comme cette approche est associée à tout un vocabulaire (fonctions mesurables, tribus d'ensemble, sigma-additivité, etc...) dont l'assimilation prend du temps, il est raisonnable de se limiter dans le cadre d'un cours d'Analyse Complexe essentiellement à ce que l'on peut faire aisément avec la notion de convergence uniforme. Cela oblige d'ailleurs parfois dans la pratique à obtenir des majorations explicites, exercice fort utile par ailleurs, majorations dont on n'a pas besoin si l'on s'autorise à utiliser les prodigieux théorèmes de Lebesgue.

7.1 Interversion de séries et d'intégrales

Nous commencerons par :

Théorème 9 *Soit f_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ des fonctions Riemann-intégrables sur l'intervalle fini $[a, b]$. On suppose qu'elles convergent uniformément vers une fonction f. Alors f est intégrable au sens de Riemann et :*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim \int_a^b f_n(t)dt$$

Preuve : quitte à considérer séparément les parties réelles et imaginaires, on peut supposer que les fonctions sont à valeurs réelles. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$n \geq N \implies \qquad \forall t \in [a, b] \quad |f(t) - f_n(t)| \leq \epsilon$$

Soit K_1 et K_2 deux fonctions en escalier telles que $K_1 \leq f_N \leq K_2$ et $\int_a^b (K_2(t) - K_1(t))dt \leq \epsilon \cdot (b - a)$. Posons $K_0 = K_1 - \epsilon$ et $K_3 = K_2 + \epsilon$. Alors K_0 et K_3 sont des fonctions en escalier telles que $K_0 \leq f \leq K_3$ et $\int_a^b (K_3(t) - K_0(t))dt \leq 3\epsilon \cdot (b - a)$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, la fonction f est intégrable au sens de Riemann. On a alors, de plus :

$$n \geq N \implies \qquad \left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)|dt \leq \epsilon(b - a)$$

et donc $\lim \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

Théorème 10 (interversion en cas de convergence normale) *Soient u_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ des fonctions Riemann intégrables sur un intervalle $[a, b]$ fini, telles qu'il existe une série à termes positifs $\sum a_n$ de sorte que :*

$$\forall t \in [a, b] \qquad |u_n(t)| \leq a_n$$

$$\text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \; .$$

Alors la fonction $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ est intégrable au sens de Riemann et

$$\int_a^b U(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t)dt \; .$$

Preuve : je rappelle que cette notion s'appelle « convergence normale » de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$. En tout cas, l'hypothèse faite implique la convergence absolue pour chaque t donc la fonction $U(t)$ existe bel et bien. Posons $f_n(t) = u_0(t)+u_1(t)+\cdots+u_n(t)$. Les fonction f_n sont Riemann-intégrables comme sommes finies de fonctions Riemann-intégrables. De plus on a :

$$\forall t \in [a,b] \qquad |U(t) - f_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

et comme $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = 0$, ces inégalités prouvent la convergence uniforme des fonctions f_n vers la fonction U. On applique alors le théorème précédent.

7.2 Continuité d'intégrales à paramètres

On considère un intervalle fini fermé $[a,b]$ et aussi un ensemble de paramètres $S \subset \mathbf{R}^p$ (dont les éléments seront dénotés par des lettres telles P, Q ; par exemple P peut être un couple (λ, x) composé avec un nombre complexe de $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ et un nombre réel x de sorte que $P \in \mathbf{R}^3$) et une fonction $f(P,t)$ (à valeurs réelles ou complexes) qui est pour chaque $P \in S$ une fonction Riemann intégrable de t de sorte que l'on peut définir :

$$F(P) = \int_a^b f(P,t)dt \ .$$

On notera $\|P - Q\|$ une norme sur $\mathbf{R}^p$ donnant sa topologie, par exemple pour $\mathbf{R}^p = \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ on peut prendre $\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + |x|$ où l'on utilise le module d'un nombre complexe et la valeur absolue d'un nombre réel.

Théorème 11 *On suppose que pour chaque t la fonction $f(P,t)$ est une fonction continue sur S, et cela uniformément par rapport à t. Alors la fonction F est une fonction continue de P.*

Preuve : d'abord il faut expliquer ce que signifie l'hypothèse « continue en P, uniformément en t ». Cela veut dire :

$$\forall P \in S\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \qquad \forall t \in [a,b]\ \forall Q \in S \quad \|P - Q\| \leq \delta \implies |f(P,t) - f(Q,t)| \leq \epsilon$$

Comme ces inégalités (pour un P et ϵ donnés) valent simultanément avec le même $\delta(P,\epsilon)$ pour tout t de l'intervalle $[a,b]$, on obtient pour Q vérifiant $\|P-Q\| \le \delta$:

$$|F(P)-F(Q)| = \left|\int_a^b f(P,t)dt - \int_a^b f(Q,t)dt\right| \le \int_a^b |f(P,t)-f(Q,t)|dt \le \epsilon\cdot(b-a)$$

Ceci prouve bien $\lim_{\substack{Q\to P\\ Q\in S}} F(Q) = F(P)$ autrement dit F est continue au point P arbitraire de S.

La façon la plus simple de garantir la « continuité en P, uniformément en t » est de demander la continuité de $f(P,t)$ par rapport au couple (P,t). On va se restreindre pour énoncer cela à des $S \subset \mathbf{R}^p$ d'un type simple.

Théorème 12 *On suppose que $S \subset \mathbf{R}^p$ est de la forme $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_p$, les I_j étant des intervalles quelconques*[23] *et aussi on suppose que la fonction $f : S \times [a,b] \to \mathbf{C}$ est continue. Alors F est continue comme fonction de $P \in S$.*

Preuve : soit $P_0 \in S$. Écrivons explicitement $P_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Pour $\eta > 0$ suffisamment petit l'intersection $W_\eta = S \cap \prod_j [x_j-\eta, x_j+\eta]$ est un produit d'intervalles fermés. Donc W_η est fermé (pour η suffisamment petit). La fonction f restreinte au compact $W_\eta \times [a,b]$ est continue donc uniformémement continue. Donc a fortiori la restriction de f au voisinage $V_\eta = S \cap \prod_j]x_j-\eta, x_j+\eta[$ de P_0 dans S est uniformément continue comme fonction du couple $(P,t) \in V_\eta \times [a,b]$. Autrement dit quitte à remplacer S par V_η (qui est ouvert dans S) on peut dès le départ supposer que f est une fonction uniformément continue du couple (P,t). Cela signifie explicitement la chose suivante : pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\forall t,u \in [a,b], \forall P,Q \in S, \quad (|t-u| \le \delta \text{ et } \|P-Q\| \le \delta) \implies |f(P,t)-f(Q,u)| \le \epsilon$$

En prenant $t = u$ là-dedans on constate que cela donne la « continuité de f comme fonction de P, uniformément en $t \in [a,b]$ ». Donc on peut appliquer le théorème précédent (ou, mieux, intégrer les inégalités avec $t = u$ sur l'intervalle $[a,b]$).

23. c'est-à-dire pas nécessairement ouverts ou fermés, tous les types d'intervalles sont autorisés. Cela signifie dans la preuve qui suit que l'on conserve en tête toutes les éventualités, mais que l'on ne vas pas jusqu'à fastidieusement les expliciter, on se contente de se convaincre que l'on écrit des choses sensées.

Remarque : si l'ensemble S considéré est, par exemple, du type $U \times J \subset \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ avec U un ouvert de $\mathbf{C}$ et J un intervalle de $\mathbf{R}$, alors on peut, après avoir choisi $P_0 = (\lambda_0, v_0) \in S$ remplacer $U \subset \mathbf{C}$ par le voisinage ouvert rectangulaire de $\lambda_0 = x_0 + iy_0$ donné par les inégalités $|x - x_0| < \eta$, $|y - y_0| < \eta$ (pour un certain $\eta > 0$ suffisamment petit) et se ramener ainsi aux hypothèses du théorème. De même si $S \subset \mathbf{R}^p$ est un ouvert quelconque, alors après avoir pris $P_0 \in S$ arbitraire, on peut commence par remplacer S par un produit d'intervalles ouverts $\prod_j I_j$ qui contient P_0 pour se ramener aux hypothèses du théorème. On pourrait dans ce théorème faire des énoncés plus généraux, mais je crois que la Topologie vous traumatise déjà suffisamment comme cela, alors je n'insiste pas.

7.3 Dérivabilité d'intégrales à paramètres

Théorème 13 *Soit $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$ des intervalles réels finis d'intérieurs non vides. Soit $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \to \mathbf{C}$ une fonction qui est pour chaque $x \in [\alpha, \beta]$ intégrable au sens de Riemann comme fonction de $t \in [a, b]$, de sorte que l'on peut définir :*

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

On suppose de plus que pour chaque t la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ existe (en $x = \alpha$ il s'agit d'une dérivée à droite et en $x = \beta$ d'une dérivée à gauche) et est une fonction continue de $x \in [\alpha, \beta]$, uniformément par rapport à $t \in [a, b]$ (cela sera le cas en particulier si $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est une fonction continue du couple (x, t)). Alors, la fonction F est une fonction continûment dérivable de x et

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$$

Précisons que cela fait partie des conclusions que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est pour chaque x une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et donc que l'intégrale ci-dessus a un sens.

Preuve : comme nous allons appliquer le théorème des accroissements finis nous séparons parties réelles et parties imaginaires ce qui nous ramène à devoir établir le théorème sous l'hypothèse que f est à valeurs réelles. C'est ce que nous supposerons dorénavant donc. Notons f_1 la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - x'| \leq \delta \implies \qquad \forall t \in [a, b] \quad |f_1(x', t) - f_1(x, t)| \leq \epsilon$$

Par le théorème des accroissements finis, pour t fixé :

$$\forall x \forall h \neq 0 \quad (x, x+h \in [\alpha, \beta]) \implies \quad \exists \theta \in]0,1[\qquad f(x+h,t) = f(x,t) + hf_1(x+\theta h, t)$$

Le fameux θ (qui n'est pas forcément unique) dépend tout à la fois de x, de h, et de t. Ce qui compte c'est $0 < \theta < 1$. Imposons maintenant $0 < |h| \leq \delta$. Alors en combinant l'égalité des accroissements finis et l'inégalité précédente avec $x' = x + \theta h$ on obtient :

(A)

$$\forall t \in [a,b] \; \forall x \quad (0 < |h| \leq \delta \text{ et } x, x+h \in [\alpha, \beta]) \implies \left| \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} - f_1(x,t) \right| \leq \epsilon$$

Maintenant $x \in [\alpha, \beta]$ est fixé. Soit pour $n \geq N_1$ suffisamment grand (c'est-à-dire $N_1 \geq \frac{1}{\beta - x}$) les fonctions de t :[24]

$$g_n(t) = n(f(x + \frac{1}{n}, t) - f(x,t))$$

Ce sont des fonctions Riemann intégrables et en posant $N(\epsilon) = \max(\frac{1}{\delta}, N_1)$ on déduit de l'équation (A) ci-dessus

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N(\epsilon) \quad n \geq N(\epsilon) \implies \qquad \forall t \in [a,b] \quad |g_n(t) - f_1(x,t)| \leq \epsilon$$

donc la fonction $f_1(x,t)$ est limite uniforme des fonctions $g_n(t)$ qui sont Riemann-intégrables. Elle est donc elle-même Riemann intégrable. On revient maintenant à (A), que l'on intègre sur l'intervalle $[a,b]$. Cela donne :

$$\forall x \quad (0 < |h| \leq \delta \text{ et } x, x+h \in [\alpha, \beta]) \implies \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b f_1(x,t)dt \right| \leq \epsilon$$

D'où l'on déduit :

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \qquad \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_a^b f_1(x,t)dt$$

On a donc démontré que la fonction F est une fonction dérivable de x avec $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$. La continuité de F' découle alors du théorème de continuité des intégrales à un paramètre établi dans la section précédente.

7.4 Intégrales doubles de fonctions continues

Théorème 14 *Soit $g(x,t)$ une fonction continue sur le produit cartésien $[\alpha, \beta] \times [a,b]$ de deux intervalles finis fermés. Alors :*

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b g(x,t)dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta g(x,t)dx \right) dt$$

24. si $x = \beta$ prendre à la place $-n(f(\beta - 1/n, t) - f(\beta, t))$.

Preuve : je pourrais procéder autrement mais je vais tirer profit du théorème de la section précédente. Posons $f(x,t) = \int_\alpha^x g(y,t)dy$. En utilisant le fait que g est uniformément continue sur $[\alpha,\beta] \times [a,b]$ vous établirez sans peine que f est une fonction continue du couple (x,t). De plus la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est simplement g. La fonction g est une fonction continue du couple (x,t) donc uniformément continue, donc continue en x, uniformément par rapport à t. On peut donc appliquer à f le théorème de la section précédente. On en déduit que

$$x \mapsto F(x) = \int_a^b \left(\int_\alpha^x g(y,t)dy \right) dt$$

est une fonction continûment dérivable avec

$$F'(x) = \int_a^b g(x,t)dt \ .$$

Ainsi :

$$F(\beta) = F(\alpha) + \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b g(x,t)dt \right) dx$$

et comme $F(\alpha) = 0$ et

$$F(\beta) = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta g(x,t)dx \right) dt$$

cela donne l'égalité voulue.

7.5 Dérivées secondes mixtes

Théorème 15 *Soit I et J deux intervalles ouverts et $F(x,t)$ une fonction sur $I \times J$ qui admet des dérivées partielles secondes $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}F$ et $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}F$ que l'on suppose être toutes deux des fonctions continues du couple (x,t). Alors*

$$\forall (x,t) \in I \times J \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}F(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}F(x,t)$$

Preuve : On peut, en traitant séparément parties réelles et imaginaires, supposer que F est à valeurs réelles. Prenons $x_0 \in I$ et $t_0 \in J$. Soit $g(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}F(x,t)$. Par hypothèse g est une fonction continue du couple (x,t). Donc $\int_{t_0}^{t_1} g(x,t)dt$ est pour t_0 et t_1 fixés une fonction continue de x, c'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial x}F(x,t_1) - \frac{\partial}{\partial x}F(x,t_0)$ est une fonction continue de x, et donc $F(x,t_1)-F(x,t_0)$ est une fonction de classe C^1 de x ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}F(x_1,t_1)-F(x_1,t_0)-F(x_0,t_1)+F(x_0,t_0) &= \int_{x_0}^{x_1}(\frac{\partial}{\partial x}F(x,t_1)-\frac{\partial}{\partial x}F(x,t_0))dx\\ &= \int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1} g(x,t)dtdx\end{aligned}$$

On a par le théorème de la section précédente :

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1} g(x,t)dtdx = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} g(x,t)dxdt$$

Donc nous pouvons affirmer que :

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{x_0}^{x_1} g(x,t)dx\right)dt &= F(x_1,t_1)-F(x_0,t_1)-F(x_1,t_0)+F(x_0,t_0)\\ &= \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial t}(F(x_1,t)-F(x_0,t))dt\\ &= \int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}F(x,t)dx\right)dt\end{aligned}$$

Ces derniers calculs sont justifiés en invoquant la continuité de la fonction $k(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}F(x,t)$ exactement comme dans le paragraphe antérieur nous avions utilisé la continuité de $g(x,t)$. L'on a donc pour tout t_0, t_1, x_0, x_1 :

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{x_0}^{x_1} g(x,t)dx\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{x_0}^{x_1} k(x,t)dx\right)dt$$

En dérivant par rapport à t_1 on obtient (puisque pour x_0 et x_1 fixés $\int_{x_0}^{x_1} g(x,t)dx$ et $\int_{x_0}^{x_1} k(x,t)dx$ sont des fonctions continues de t) :

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x,t_1)dx = \int_{x_0}^{x_1} k(x,t_1)dx$$

puis en dérivant par rapport à x_1 :

$$g(x_1,t_1)=k(x_1,t_1)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : lorsque l'on mène des calculs avec des dérivées partielles et que l'on fait des substitutions dans les variables, même très simples, il est très facile de s'embrouiller complètement avec les notations en $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}, \dots$. D'où l'intérêt, comme dans la preuve ci-dessus, d'introduire une nouvelle notation, comme g ou k au lieu de $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}F$ ou $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}F$.

Une bonne méthode est de numéroter les variables et d'indiquer les dérivées partielles par des indices correspondant aux numéros :

$$F_1(x,t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \qquad F_2(x,t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)$$

$$F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad F_{12} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) \quad F_{21} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \quad F_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

On utilise parfois des écritures telles que $F_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}F$ ($F_{xt} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}F$, $\ldots$) au lieu de F_{11}, F_{12}, $\ldots$ mais c'est dangereux si l'on substitue à x dans $F(x,t)$ des choses comme $1-x$, ou $t-x$ ou x^2, $\ldots$ très rapidement on peut gravement s'embrouiller. Aussi il est toujours plus prudent d'écrire $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ à la place de $\frac{\partial}{\partial x}F(x,t)$ (car $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ représente correctement : calculer la première dérivée partielle, *puis* évaluer au point (x,t)).

On peut aussi incorporer à la notation elle-même la commutativité des opérateurs de dérivée partielle $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ en utilisant des multi-exposants : $\partial^{(n_1,\ldots,n_p)} = (\partial_1)^{n_1}\cdots(\partial_p)^{n_p}$, $F^{(n_1,\ldots,n_p)} = \partial^{(n_1,\ldots,n_p)}F = \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_p}F}{\partial x_1^{n_1}\ldots\partial x_p^{n_p}}$. Par exemple : $F^{(2,0)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}F$, $F^{(1,3)} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^3}{\partial t^3}F = \frac{\partial^3}{\partial t^3}\frac{\partial}{\partial x}F$, etc... (donc $F^{(1,3)} = F_{1222} = F_{2221} = F_{2122} = F_{2212}$, ces identités étant valables si toutes les dérivées partielles de F jusqu'à l'ordre 4 existent et sont continues). Si pour le multi-exposant $\underline{n} = (n_1,\ldots,n_p)$ on pose $\underline{n}! = n_1!\ldots n_p!$ la formule de Taylor en plusieurs variables prend une forme simple. Voir le Cours de Calcul Différentiel.