Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable : Jean-François Burnol

Note : le texte pourrait (devrait) être rendu plus compréhensible par l'incorporation de figures appropriées ; leur mise en place a été reportée par l'auteur à une hypothétique date ultérieure et en attendant le lecteur est encouragé à utiliser les marges pour y dessiner lui-même ce qui lui paraîtra utile.

PREMIER CHAPITRE

Table des matières

1 Premiers pas

Que vaut $\log(-1)$? On peut imaginer que $\log(-1)+\log(-1) = \log((-1)(-1)) = \log(1) = 0$ donc $2\log(-1) = 0$ donc $\log(-1) = 0$. Plus généralement $2\log(-r) = \log((-r)^2) = \log(r^2) = 2\log(r)$, pour $r > 0$ et donc $\log(-r) = \log(r)$. D'ailleurs si l'on calcule alors $\frac{d}{dx}\log(x)$ pour $x < 0$ on obtient par la règle de dérivation des fonctions composées : $\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{d}{dx}\log(-x) = \frac{1}{-x}\frac{d}{dx}(-x) = -\frac{1}{x}\times(-1) = +\frac{1}{x}$ ce qui paraît réconfortant puisque $\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

L'argument paraît convaincant. Mais on a aussi la formule $\exp(\log(x)) = x$, donc on devrait avoir $\exp(\log(-1)) = -1$. Mais avec notre définition je trouve $\exp(\log(-1)) = \exp(0) = 1$, et non pas -1.

Il y a un problème. Bien sûr on pourrait définir totalement arbitrairement $\log(x)$ pour $x < 0$, le tout c'est de trouver une définition qui soit le plus compatible avec ce dont on a l'habitude. Essayons à partir de la formule de base pour définir le logarithme :

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

C'est clair que l'on a un problème si l'on veut faire $x < 0$ puisque l'intervalle allant de 1 à x passera par une singularité de l'intégrand $\frac{1}{t}$. On peut tenter de prendre comme formule une valeur principale à la Cauchy :

$$\log(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_1^{\epsilon} + \int_{-\epsilon}^{x}\right)\frac{dt}{t},$$

ce qui donne $\lim_{\epsilon\to 0^+}(\log(\epsilon)+[\log|t|]_{-\epsilon}^{x})$ soit tout simplement $\log(|x|)$ (la valeur de l'intégrale ne dépend pas de ϵ, dans ce cas particulier ; cela s'explique par le fait que $\frac{1}{t}$ est une fonction impaire). On retombe sur la valeur problématique $\log(-1) = 0$.

À ce stade, il faut avoir une inspiration de génie. La voici : lorsque l'on va de 1 à $x < 0$ on rencontre en 0 la singularité de $\frac{1}{t}$, mais c'est parce que l'on est confiné à l'axe réel. Alors plongeons cet axe réel dans un plan dont il sera l'axe horizontal et suivons un chemin dans le plan allant de 1 à $x < 0$ sans passer par l'origine. On veut que $\frac{1}{t}$ ait un sens le long de ce chemin, alors pour cela il n'y a pas d'autre choix que de considérer ce plan comme le plan des nombres complexes $t = z = x + iy$, et de calculer $\frac{1}{t}$ au sens des nombres complexes, et de poser $dt = dx + idy$. Alors nous prendrons comme définition :

$$\log(-1) = \int_1^{-1} \frac{dz}{z} = \int_1^{-1} \frac{dx + idy}{x + iy} = \int_1^{-1} \frac{(x - iy)(dx + idy)}{x^2 + y^2} \ ,$$

avec $z = \gamma(u) = x(u) + iy(u)$, $0 \leq u \leq 1$, $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = -1$ et la condition cruciale : $\forall u \ \gamma(u) \neq 0$. Nous avons paramétré le chemin menant de 1 à -1 par le nombre réel $u \in [0, 1]$ (dans votre tête imaginez ce $[0, 1]$ comme vivant sur une autre copie de $\mathbf{R}$ que celle plongée dans $\mathbf{C}$, sinon cela risque de créer un terrible embrouillamini), et le chemin lui-même, par définition, est une certaine fonction dérivable $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$.

Notre notation $\int_1^{-1}$ n'est pas bonne. Elle devrait refléter le fait que nous avons choisi un chemin γ. On écrira donc dorénavant $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$. Dans la dernière intégrale à droite on remplace x par $x(u)$, dx par $x'(u)du$, etc..., et l'on arrive à la définition :

$$\log(-1) = \int_\gamma \frac{dz}{z} := \int_0^1 \frac{(x(u) - iy(u))(x'(u) + iy'(u))}{x(u)^2 + y(u)^2} \, du$$

J'ai abrégé $x(\gamma(u)) = \mathrm{Re}(\gamma(u))$ en $x(u)$ et idem pour $y(u) = \mathrm{Im}(\gamma(u))$. Dans l'équation ci-dessus la dernière expression est la définition de $\int_\gamma \frac{dz}{z}$. On s'est ramené à l'intégrale d'une fonction (un peu compliquée, à valeurs complexes) sur l'intervalle réel $[0, 1]$. En ce qui concerne le symbole $\log(-1)$ on s'attend à ce qu'il dépende du chemin choisi, donc on devrait peut-être le noter $\log_\gamma(-1)$ par exemple.

Tout cela est bien, mais qu'est-ce que cela donne concrètement ? Par exemple on peut prendre $\gamma(u) = \cos(\pi u) + i \sin(\pi u)$ qui va de $+1$ à -1 par le demi-cercle de rayon 1 dans le demi-plan supérieur. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\log(-1) &= \int_0^1 \big((\cos(\pi u) - i \sin(\pi u))(-\pi \sin(\pi u) + i\pi \cos(\pi u))\big) du \\ &= i\pi \int_0^1 \big((\cos(\pi u) - i \sin(\pi u))(+i \sin(\pi u) + \cos(\pi u))\big) du = i\pi\end{aligned}$$

Bon, $\log(-1)$ vaut $i\pi$ en fin de compte ! enfin, non. Voyons ce qui passe avec le chemin $\gamma(u) = \cos(\pi u) - i \sin(\pi u)$, qui passe lui par le demi-plan inférieur. Je vous invite à faire le calcul. Vous trouverez $\log(-1) = -i\pi$ et non plus $+i\pi$. Remarquez que la réponse ancienne 0 qui vient de la valeur principale au sens de Cauchy est la moyenne entre $+i\pi$ et $-i\pi$ ce qui n'est pas un hasard, mais en fait tout cela commence à devenir assez embrouillé ; alors, vraiment, c'est 0 ou $+i\pi$ ou $-i\pi$?

C'est le moment d'énoncer un théorème que nous n'avons pas encore les moyens de prouver mais que nous établirons plus tard :

Théorème 1 *Si le chemin dérivable $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ va de $+1$ à -1, ne passe pas par 0, et reste toujours dans le demi-plan supérieur $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, alors l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ vaut $+\pi i$.* ***Elle ne dépend pas du chemin (restant dans le demi-plan supérieur).*** *Si le chemin reste dans le demi-plan inférieur alors l'intégrale vaut* ***toujours*** *$-\pi i$. Dans le cas général la valeur de l'intégrale est toujours de la forme $\pi i + k(\gamma)2\pi i$ avec un certain $k(\gamma)$ qui est un nombre* ***entier relatif*** *($k(\gamma) \in \mathbf{Z}$). Ce $k(\gamma)$ ne change pas lorsque l'on déforme le chemin sans jamais le faire passer par l'origine ; plus encore si deux chemins ont le même k c'est que l'on peut déformer continûment (sans jamais passer par zéro !) le premier de manière à le faire coïncider avec le second.*

Remarquez que le fait que $\pi i \neq -\pi i$ prouve, compte tenu de ce qu'affirme le théorème qu'il est impossible de déformer dans le plan le demi-cercle supérieur en le demi-cercle inférieur sans qu'à un moment l'un des chemins intermédiaires ne passe par l'origine (et tout en maintenant les extrémités fixes, si on pouvait bouger les extrémités alors certainement on pourrait déformer l'un en l'autre sans passer par l'origine du plan). C'est là quelque chose qui paraît intuitivement évident, mais qui n'admet pas de démonstration mathématiquement rigoureuse « gratuite ». En fait ce genre de question est à l'origine de la « Topologie algébrique », une discipline mathématique dont les débuts se trouvent dans les travaux de Riemann sur l'Analyse Complexe. Plus tard nous évoquerons un autre théorème de Topologie du plan, le Théorème de Jordan, dont la démonstration serait encore plus difficile, et que nous admettrons.

Pour en revenir au théorème une version plus complète nous dirait que si un chemin part de 1 et aboutit en z_0 alors $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ peut prendre une infinité de valeurs distinctes, mais deux quelconques parmi elles diffèrent toujours par un multiple entier relatif de $2\pi i$. Autrement dit $\log(z_0)$ n'est défini qu'à $2\pi i$ près. À vrai dire si l'on impose $z_0 \notin]-\infty, 0]$ et aussi si l'on oblige le chemin à éviter $]-\infty, 0]$ alors l'intégrale donne un résultat qui est indépendant du chemin choisi ; on l'appelle la détermination principale du logarithme et on la notera $\mathrm{Log}(z_0)$.

Donc le problème avec la preuve que $\log(-1) = 0$ car $2\log(-1) = \log((-1)^2) = \log(1) = 0$ c'est qu'en fait $\log(1)$ lui-même n'est défini qu'à $2\pi i$ près, et donc lorsque l'on divise par 2 on prouve que $\log(-1)$ vaut 0 certes, mais seulement à $\frac{1}{2}2\pi i = \pi i$ près. Donc cela ne contredit pas les valeurs $\pi i + k2\pi i$ données par les intégrales.

On pourrait penser que le problème est lié à l'emploi de la formule $\log(z_1) + \log(z_2) = \log(z_1 z_2)$ mais cette formule est tout-à-fait valable à $2\pi i\mathbf{Z}$ près. Donc on peut écrire $2\log(-1) = 0$ à condition de comprendre cela à $2\pi i\mathbf{Z}$ près.

Comme nous le verrons en ce qui concerne la détermination principale $\mathrm{Log}(z)$, la formule $\mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) = \mathrm{Log}(z_1 z_2)$ n'est effectivement pas toujours valable (elle est valable si et seulement si $|\mathrm{Im}(\mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2))| < \pi$). Mais elle est toujours valable modulo $2\pi i$.

Avec les nombres réels, la fonction logarithme, historiquement comme logiquement, vient avant la fonction exponentielle. Le logarithme est cette découverte géniale dont les anciens de l'Antiquité ne disposaient pas, à savoir que l'on peut transformer des multiplications en des additions. Il est lié à la géométrie de l'hyperbole, mais le plus simple maintenant est de le définir par $\log(1) = 0$, $\log'(x) = \frac{1}{x}$. Ensuite on prouve $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, $\lim_{x\to 0}\log(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\log(x) = +\infty$, et l'on définit $\exp : \mathbf{R} \to]0, +\infty[$ comme sa fonction réciproque (grâce au théorème des valeurs intermédiaires). On prouve $\exp(t+u) = \exp(t)\exp(u)$, et :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \exp'(t) = \exp(t)$$

Nous avons vu qu'il y a des difficultés avec le logarithme de nombres réels négatifs, difficultés qui sont partiellement résolues en passant aux nombres complexes. Après tout trouver $\log(x)$ c'est résoudre l'équation $\exp(z) = x$, donc on progressera peut-être à condition de disposer d'une fonction « exponentielle complexe ». Notons la provisoirement $E(z)$. On veut $E(x) = e^x$ pour $x \in \mathbf{R}$, et on va imposer aussi

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad E'(z) = E(z)$$

Ici il faut faire une pause importante.

2 Dérivabilité au sens complexe, équations de Cauchy-Riemann

Définition 1 (dérivabilité et holomorphie) *Une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ sur un ouvert du plan complexe est dite* dérivable au sens complexe *au point $z_0 \in U$ si la limite*

$$f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

existe. La fonction f est dite holomorphe *sur U si elle dérivable au sens complexe en tout point de U, et elle est dite holomorphe sur un ensemble A si il existe un ouvert V contenant A sur lequel f est définie et holomorphe. Une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier est dite* fonction entière.

Par exemple, la fonction $f(z) = z$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$, et $f'(z) = 1$. La fonction $f(z) = z^2$ est une fonction entière et $f'(z) = 2z$. En effet $f(z_0 + h) = f(z_0) + h(2z_0 + h)$, d'où le résultat. Vous démontrerez que les résultats habituels sur $(f + g)'$, $(fg)'$, $(f/g)'$, et $(g \circ f)'$ valent pour les fonctions dérivables d'une variable complexe[1]. En particulier par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$, on obtient $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$ et d'ailleurs cela vaut aussi pour $n \in \mathbf{Z}$ (pour $n = 0$, on considère que la formule veut dire 0, même en $z = 0$). Remarque : pour des raisons qui seront explicitées en une autre occasion on préfère habituellemnt la notation $\frac{\partial}{\partial z}$ à $\frac{d}{dz}$.

La fonction $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ peut (doit) aussi être vue comme une fonction des deux variables réelles x et y.[2] On écrira d'ailleurs souvent

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad u = \mathrm{Re}f, v = \mathrm{Im}f$$

Dans le calcul de $f'(z)$, prenons h réel : alors on est en train d'évaluer la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x} f(x + iy)$, donc

$$f'(z_0) = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} f(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

1. prouver aussi $(g \circ f)'(t) = g'(f(t))f'(t)$ pour $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction dérivable sur un intervalle réel, et g une fonction holomorphe sur $f(I)$.
2. on s'efforce en général de réserver certaines lettres (x, y, u, v, t, p, q, σ, $\tau\ldots$) pour les réels et d'autres pour les complexes (z, w, s, ξ, $\zeta\ldots$), mais il est impossible d'être totalement systématique en la matière.

Tacitement on a utilisé le fait que la partie réelle (respectivement, imaginaire) d'une limite est la limite des parties réelles (respectivement, imaginaires), donc l'existence de $f'(z_0)$ implique l'existence des dérivées partielles par rapport à x des fonctions u et v (au point (x_0, y_0)).

Dans le calcul de $f'(z)$, prenons h imaginaire pur : $h = ik$, $k \in \mathbf{R}$, $k \to 0$. Alors (pourquoi ?) on est en train d'évaluer la dérivée partielle $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy)$, donc

$$f'(z_0) = \frac{1}{i}\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} f(x+iy) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

En comparant les deux expressions pour $f'(z_0)$ on obtient le théorème suivant :

Théorème 2 (Équations de Cauchy-Riemann) *Pour qu'une fonction f soit dérivable au sens complexe au point $z_0 = x_0 + iy_0$ il est* nécessaire *que les fonctions $u = \mathrm{Re} f$ et $v = \mathrm{Im} f$ admettent en ce point des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ et que les* Équations de Cauchy-Riemann *soient satisfaites :*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Afin d'obtenir une condition nécessaire et suffisante il faut faire appel à la notion de *différentiabilité* d'une fontion (à valeurs réelles ou complexes) de plusieurs variables réelles (ici, deux). Nous allons prouver en effet :

Théorème 3 *Pour qu'une fonction f soit dérivable au sens complexe au point $z_0 = x_0 + iy_0$ il est* nécessaire et suffisant *qu'elle soit* différentiable *au point z_0 et que les* Équations de Cauchy-Riemann *soient satisfaites :*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Rappelons cette notion de différentiabilité en un point (x_0, y_0) d'une fonction $F(x, y)$ de deux variables réelles (ici $f(x + iy)$, ou $u(x, y)$, ou $v(x, y)$). On dit que F est différentiable au point (x_0, y_0) si l'on peut trouver deux nombres A et B (complexes éventuellement si F est elle-même à valeurs complexes) et une fonction $\epsilon(h_1, h_2)$ définie pour $0 < \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \leq \delta$ (h_1 et h_2 *réels*) avec $\delta > 0$ suffisamment petit, tels que[3]

$$F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = F(x_0, y_0) + Ah_1 + Bh_2 + \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \epsilon(h_1, h_2)$$

$$\text{et} \qquad \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon(h_1, h_2) = 0$$

En prenant $h_2 = 0$ et $h_1 \to 0$ on en déduit que $F(x, y_0)$ est dérivable au point $x = x_0$ et que cette dérivée vaut A. De plus en prenant $h_1 = 0$ on constate que $F(x_0, y)$ est dérivable au point $y = y_0$ et que cette dérivée vaut B :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = A \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = B$$

Je signale cependant que l'on montre en Cours de Calcul Différentiel que la seule existence de ces dérivées partielles n'est pas suffisante pour que F soit différentiable au point (x_0, y_0) : l'existence est nécessaire, pas suffisante (je rappellerai très bientôt une condition suffisante).

On remarquera que notre h dans la définition de la dérivabilité au sens complexe correspond à ce qui ici est $h_1 + ih_2$ et $\sqrt{h_1^2 + h_2^2} = |h|$. Si $f(z)$ est une fonction définie dans un voisinage de z_0 alors l'existence de $f'(z_0)$ équivaut (prouvez-le !) exactement à dire qu'il existe $C \in \mathbf{C}$ et une fonction $\alpha(h)$ définie pour $0 < |h| \leq \delta$, $\delta > 0$, tels que :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ch + h\alpha(h) \qquad \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$$

La constante C est d'ailleurs $f'(z_0)$. En posant $h = h_1 + ih_2$, $A = C$, $B = iC$, $\epsilon(h_1, h_2) = \frac{h}{|h|}\alpha(h_1 + ih_2)$ on trouve donc immédiatement que $f(x+iy)$ est différentiable au point (x_0, y_0) comme fonction de deux variables réelles avec $A = f'(z_0)$, $B = if'(z_0)$.

Réciproquement si $F(x, y) = f(x + iy)$ est différentiable et si il existe C tel que $A = C$, $B = iC$, ce qui équivaut à exiger $B = iA$ alors en posant $\alpha(h_1 + ih_2) = \frac{|h|}{h}\epsilon(h_1, h_2)$, $h = h_1 + ih_2$, on obtient tout aussi immédiatement que $f(z)$ est dérivable au sens complexe au point $z_0 = x_0 + iy_0$, avec $f'(z_0) = A = -iB$.

3. comme $\frac{1}{\sqrt{2}}(|h_1| + |h_2|) \leq \sqrt{(h_1^2 + h_2^2)} \leq |h_1| + |h_2|$ on peut aussi dans la formule utiliser $|h_1| + |h_2|$ en lieu et place de $\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)}$.

Enfin, on remarque que la condition $B = iA$ (lorsque l'on suppose $F(x, y) = f(x + iy)$ différentiable au point (x_0, y_0)) s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \ ,$$

ce qui, compte tenu de $f = u + iv$, n'est qu'une autre façon d'écrire le système des deux équations de Cauchy-Riemann. Le théorème 3 est donc démontré.

Comme la différentiabilité en un seul point est une notion assez inintéressante, il est utile de disposer du théorème suivant (démonstration en annexe) du cours de calcul différentiel : *si la fonction $F(x, y)$ admet des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tous les points d'un ouvert U, et si ces dérivées partielles sont des fonctions continues du couple (x, y) de cet ouvert U, alors la fonction F est différentiable en tout point (x, y) de l'ouvert U.* Cela nous permet donc d'énoncer la proposition suivante :

Théorème 4 *Si la fonction $f(z)$ définie sur un ouvert U du plan complexe $\mathbf{C}$ admet en tout point de cet ouvert des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ et si ces dérivées partielles sont des fonctions continues sur l'ouvert U et si les équations de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \, \frac{\partial f}{\partial x}$$

(ou de manière équivalente $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$) sont satisfaites, alors la fonction f est une fonction holomorphe sur l'ouvert U.

Remarque : cela est assez surprenant, mais on montrera plus tard que si f est holomorphe alors la fonction f' est automatiquement continue (en fait, infiniment différentiable) donc le théorème précédent caractérise exactement les fonctions holomorphes sur un ouvert U.

3 L'exponentielle complexe

Revenons-en au problème de trouver une fontion entière $E(z)$ qui jouera le rôle de fonction exponentielle pour les nombres complexes. Bien sûr vous connaissez déjà une approche, elle est enseignée dès la première année : il s'agit d'utiliser pour les nombres complexes la formule

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

connue pour les nombres réels. Cela est effectivement très important et d'ailleurs nous allons y revenir plus tard. Mais pour le moment nous préférons (après notre étude dans la section précédente de la dérivabilité au sens complexe) prendre comme point de départ la recherche d'une fonction holomorphe dans tout le plan complexe (fonction entière) telle que

$$E(0) = 1 \text{ et } \quad \forall z \in \mathbf{C} \quad E'(z) = E(z)\ . \tag{1}$$

Commençons par établir grâce à l'équation différentielle quelques propriétés de E. D'abord :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad E(-z) \cdot E(z) = 1$$

En effet avec $f(z) = E(-z)E(z)$ on calcule $f'(z) = -E'(-z)E(z)+E(-z)E'(z) = -E(-z)E(z)+E(-z)E(z) = 0$. Donc (pourquoi ?) f est constante, d'où l'égalité. En particulier on a

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad E(z) \neq 0 \qquad \text{et} \quad E(z)^{-1} = E(-z)$$

Établissons maintenant :

$$\forall z, w \in \mathbf{C} \quad E(z + w) = E(z)E(w)$$

Pour la preuve on fixe w et on considère la fonction entière $f(z) = E(z + w)E(-z)$. On calcule sa dérivée et on trouve zéro. Donc $f(z) = f(0) = E(w)$ d'où la formule.

Ainsi $E(x + iy) = E(x)E(iy)$ et il suffit de déterminer les deux fonctions d'une variable réelle $E(x)$ et $E(iy)$.

La fonction d'une variable réelle $e(x) = E(x)$ vérifie $e(0) = 1$ et $e'(x) = e(x)$, c'est donc que $e(x) = e^x = \exp(x)$ (en effet la dérivée de $\exp(-x)e(x)$ vaut $-\exp(-x)e(x) + \exp(-x)e'(x) = 0$, donc $\exp(-x)e(x) = \exp(0)e(0) = 1$ donc $e(x) = \exp(x)$).

La fonction d'une variable réelle $g(y) = E(iy)$ est dérivable et vérifie $g'(y) = iE'(iy) = ig(y)$, donc elle est aussi deux fois dérivable et $g''(y) = ig'(y) = i^2 g(y) = -g(y)$:

$$\forall y \in \mathbf{R} \quad g''(y) = -g(y)$$

Or par un théorème connu (démonstration en annexe) les seules fonctions d'une variable réelle avec cette propriété sont les combinaisons linéaires $C_1 \cos(y) + C_2 \sin(y)$. Comme $g(0) = 1$ on a $C_1 = 1$. Comme $g'(0) = i$ on a $C_2 = i$. Donc $E(iy) = g(y) = \cos(y) + i \sin(y)$.

En conclusion nous avons prouvé : *si il existe une fonction entière $E(z)$ vérifiant (1) alors elle est nécessairement donnée par la formule*

$$E(z) = E(x + iy) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) \tag{2}$$

Prenons la formule (2) comme la définition de $E(z)$. La fonction ainsi définie est-elle une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$? En tout cas elle admet des dérivées partielles qui sont des fonctions continues du couple (x, y) :

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x + iy) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) = E(x + iy)$$
$$\frac{\partial}{\partial y} E(x + iy) = e^x(-\sin(y) + i \cos(y)) = i\ E(x + iy)$$

La condition de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial y} E = i \cdot \frac{\partial}{\partial x} E$$

est donc satisfaite avec des dérivées partielles continues en le couple (x, y). Par le théorème 4, la fonction $e^x(\cos(y)+i \sin(y))$ est bien une fonction holomorphe de la variable complexe $z = x+iy$, sur tout le plan complexe. De plus on a $E'(z) = \frac{\partial}{\partial x} E(x+iy) = E(z)$, et $E(0) = 1$, ce qui prouve que E est bien solution de (1). La formule d'addition $E(z + w) = E(z)E(w)$ (que l'on pourrait maintenant montrer en utilisant les formules d'addition trigonométriques) et le fait que pour z réel on retrouve l'exponentielle réelle classique nous incite à noter dorénavant $E(z)$ sous les formes e^z ou $\exp(z)$. En particulier on obtient pour z imaginaire pur l'une des plus belles formules des mathématiques :

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$$

Cette formule, ainsi que la notation e^z pour la fonction exponentielle, sont dues à Leonhard Euler. Comme cas particulier on a

$$e^{i\pi} = -1 \ ,$$

aussi celèbre en Mathématiques que $E = mc^2$ l'est en Physique. Donc effectivement on a bien le droit de considérer que $\log(-1) = i\pi$. Attention cependant que

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = +1 ,$$

donc plus généralement $e^{i\pi+k2\pi i} = -1$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et les valeurs possibles pour $\log(-1)$ comprennent en tout cas $i\pi + 2\pi i\mathbf{Z}$.

Y-en-a-t-il d'autres ? La fonction $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ est un morphisme du groupe additif $(\mathbf{C}, +)$ vers le groupe multiplicatif $(\mathbf{C}^*, \times)$, et il s'agit de trouver son noyau, c'est-à-dire les z avec $e^z = 1$.

Il est utile de remarquer d'abord que $e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x(\cos(y) - i\sin(y)) = \overline{\exp(z)}$ et ainsi que $|e^z|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z)\exp(\bar{z}) = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2\mathrm{Re}(z))$ d'où :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$$

Donc si $e^z = 1$ alors $e^{\mathrm{Re}(z)} = 1$ et donc $\mathrm{Re}(z) = 0$. Alors $z = iy$ et $\cos(y) = 1$ et $\sin(y) = 0$ donc y est un multiple entier de 2π. Donc $2\pi i\mathbf{Z}$ est le noyau du morphisme de groupe $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$.

Surjectivité : si l'on veut résoudre $e^w = z$, on commence par dire que nécessairement $e^{\mathrm{Re}(w)} = |z|$, donc on est obligé de prendre $\mathrm{Re}(w) = \log(|z|)$. Cela étant fait l'équation devient équivalente à $e^{i\mathrm{Im}(w)} = \frac{z}{|z|}$. Donc il s'agit de voir si l'on peut trouver un nombre réel $\theta = \mathrm{Im}(w)$ tel que $e^{i\theta}$ soit le nombre complexe de module 1 : $X + iY = \frac{z}{|z|}$, autrement dit tel que $\cos(\theta) = X$, $\sin(\theta) = Y$. La possibilité de trouver un tel $\theta \in \mathbf{R}$ pour tout X et Y tels que $X^2 + Y^2 = 1$ est une chose que vous avez appris (en théorie) à faire lors de vos premiers cours sur les fonctions continues et dérivables[4]. Ultimement c'est pour cela que les mathématiciens ont introduit la notion de continuité, le théorème des valeurs intermédiaires, et les développements en séries. Cela dit, si $X = -1$, prenez $\theta = \pi$. Si $-1 < X \leq 1$ alors l'unique solution avec $|\theta| < \pi$ est donnée par la formule :

$$\theta = 2\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{Y}{1+X}\right) ,$$

4. en espérant que ces cours ne s'intitulaient pas « Initiation » mais bien « Fondements ».

ce que je vous invite à vérifier (et à en trouver une preuve (ou, plutôt, interprétation) géométrique). Lorsque $X > 0$ on peut prendre simplement

$$\theta = \mathrm{Arctg}\,\frac{Y}{X} = \mathrm{Arcsin}(Y)\ ,$$

ce qui donne un résultat dans $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

Comme le morphisme $\exp : (\mathbf{C}, +) \to (\mathbf{C}^*, \times)$ est surjectif avec noyau $2\pi i\mathbf{Z}$ on a établi que pour tout nombre complexe z NON NUL, il y a une infinité de valeurs possibles pour $\log(z)$, ce sont les solutions de l'équation $e^w = z$, et deux quelconques parmi elles diffèrent par un multiple entier de $2\pi i$. La paternité de ce résultat majeur en Mathématiques revient à Leonhard Euler. [5]

4 Fonctions analytiques

Une série entière (à ne pas confondre avec fonction entière) est une série du type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Je rappelle, sans le démontrer à nouveau, que l'on associe à une telle série (à coefficients a_n réels ou complexes) un *rayon de convergence* $R \in [0, +\infty]$, qui vaut 0 si la série ne converge que pour $z = 0$, $+\infty$ si elle converge pour tout z, et $R \in]0, \infty[$ si elle converge pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$. On peut aussi caractériser R par :

$$|z| < R \implies \lim |a_n z^n| = 0$$

$$|z| > R \implies |a_n z^n| \text{ n'est pas borné lorsque } n \to \infty$$

Rappelons enfin que la série converge absolument pour $|z| < R$, et uniformément (normalement en fait) pour $|z| \leq R' < R$.

On peut associer à une série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sa *série dérivée* $D(S)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$, et c'est un très bon exercice de montrer que S et $D(S)$ ont exactement le même rayon de convergence. Dans cette section nous allons établir le lien entre cette notion formelle de dérivée et la véritable dérivée au sens de la dérivation d'une fonction de la variable complexe, lorsque le rayon de convergence est non nul. Signalons cependant que l'opération $S \to D(S)$ indépendamment de toute notion de

5. Leonhard Euler, 1707-1783. Sans doute le mathématicien le plus prolifique de tous les temps. Des précisions biographiques seront données au Chapitre III de ce cours.

convergence a les propriétés formelles que l'on attend d'une dérivée, c'est-à-dire la formule de Leibniz : $D(ST) = D(S)T + SD(T)$ mais pour cela il nous faudrait définir le produit formel de deux séries (formelles, c'est-à-dire en dehors de toute notion de convergence, et z étant traité comme un symbole désincarné, comme X avec les polynômes $P(X)$, etc. . .) et cela nous entraînerait trop loin.

Énonçons donc sans plus attendre le théorème fondamental :

Théorème 5 *Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul*[6]*. Dans le disque $D(0,R) = \{|z| < R\}$ la fonction $S(z)$ est une fonction dérivable au sens complexe et $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. La fonction $S(z)$ est donc (par récurrence) infiniment dérivable au sens complexe. De plus pour tout z_0 dans ce disque ouvert, la série de Taylor $S(z_0) + S'(z_0)h + \frac{1}{2}S''(z_0)h^2 + \dots$ est convergente et représente $S(z_0+h)$ pour $|h| < R - |z_0|$:*

$$\forall z_0, h, |z_0| + |h| < R \implies S(z_0+h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S^{(m)}(z_0)}{m!}\, h^m$$

En particulier le rayon de convergence de la série de Taylor en z_0 est au moins égal à $R - |z_0|$.

Pour la preuve j'utiliserai le très important *théorème sur les séries doubles* (énoncé et démonstration en annexe). On a, pour $|z_0| + |h| < R$ (donc $|z_0 + h| < R$) :

$$S(z_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0+h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m=n} a_n \binom{n}{m} z_0^{n-m} h^m$$

Examinons si la série double est absolument convergente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m=n} |a_n| \binom{n}{m} |z_0|^{n-m} |h|^m = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z_0| + |h|)^n < +\infty$$

car $|z_0|+|h| < R$. Donc c'est ok, on peut permuter et, toutes les séries écrites étant garanties absolument convergentes[7], on a

$$S(z_0+h) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} z_0^{n-m} \right) h^m \ ,$$

6. si $R = +\infty$, alors dans ce qui suit, on utilise des conventions du genre $+\infty - C = +\infty$ pour tout nombre réel C.

7. la série intérieure est garantie absolument convergente avec le terme h^m inclus, mais on peut le mettre en facteur de tous les autres, et il suffit d'utiliser un $h \neq 0$ pour pouvoir donc affirmer que la série mise entre parenthèse qui ne dépend que de z_0 (et de $m \in \mathbf{N}$) est absolument convergente.

ce qui est de la forme

$$S(z_0+h) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(z_0) h^m \ ,$$

avec

$$c_m(z_0) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} z_0^{n-m} = \frac{1}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-m+1) z_0^{n-m} \ .$$

On reconnaît dans cette dernière somme infinie le résultat $D^m(S)$ de l'action m fois sur S de la dérivation formelle D. Le résultat final est donc :

$$S(z_0+h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (D^m(S))(z_0) h^m \ ,$$

avec une série que nous savons absolument convergente pour $|h| < R - |z_0|$. Nous écrivons alors, pour $0 < |h| < R - |z_0|$:

$$\frac{S(z_0+h) - S(z_0)}{h} = D(S)(z_0) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} (D^m(S))(z_0) h^{m-1} \ .$$

Notons $r(h)$ le dernier terme, dont nous voulons montrer qu'il tend vers zéro lorsque h tend vers 0. Nous pouvons mettre en facteur h, de sorte que

$$r(h) = h \sum_{m=2}^{\infty} d_m h^{m-2} = h \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+2} h^k$$

avec des coefficients d_m qu'il est inutile d'expliciter, la seule chose que nous avons besoin de savoir c'est que la série est absolument convergente pour $0 < |h| < R - |z_0|$. Choisissons δ avec $0 < \delta < R - |z_0|$ et [8] restreignons nous à $0 < |h| \leq \delta$. Alors

$$|r(h)| \leq |h| \sum_{k=0}^{\infty} |d_{k+2}| \delta^k = C|h|$$

pour une certaine constante $C < \infty$, indépendante de h. Il en découle immédiatement $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$ et donc au final :

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(z_0+h) - S(z_0)}{h} = D(S)(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

Ceci prouve que $S(z)$ est dérivable au sens complexe au point z_0 et que $S'(z_0) = D(S)(z_0)$. Ce qui a été montré pour S est alors appliqué à la série $D(S)$ qui a le même rayon de convergence. Il en résulte que $D(S)$ est elle aussi holomorphe sur le disque ouvert $D(0,R)$ et que $D(S)' = D(D(S)) = D^2(S)$ (D^2 est juste une notation pour $D \circ D$).

8. donc $\delta < \infty$ même si $R = +\infty$.

Par récurrence nous en déduisons que S est infiniment dérivable au sens complexe et que $S^{(m)} = D^m(S)$ pour tout $m \in \mathbf{N}$ (par convention $S^{(0)} = S$ et $D^0(S) = S$). Nous pouvons alors réécrire la formule pour $S(z_0 + h)$ comme une série de Taylor $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{S^{(m)}(z_0)}{m!} h^m$ et le théorème est entièrement démontré.

En particulier considérons la série exponentielle :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Elle a un rayon de convergence infini et définit donc une fonction holomorphe sur tout le plan complexe. Le théorème nous dit que nous pouvons calculer sa dérivée en dérivant terme à terme, ce qui donne $F'(z) = F(z)$! Comme $F(0) = 1$ c'est donc que cette fonction est l'exponentielle complexe que nous avions précédemment définie par la formule $E(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$. En effet nous avions montré que toute fonction holomorphe vérifiant l'équation différentielle $E' = E$ et prenant la valeur 1 en $z = 0$ était nécessairement de cette forme. Remarque : comme notre théorème nous a permis de dire que $F(z)$ est holomorphe, cela prouve d'une deuxième façon, qui ne fait pas appel aux équations de Cauchy-Riemann, que la fonction $e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ est holomorphe. La formule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)$$

est suffisamment remarquable pour que je vous invite à bien la contempler et à vous en imprégner. À gauche on a une symétrie $x \leftrightarrow iy$ ce qui incite à se poser la question si l'on n'a pas aussi, par hasard :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = e^{iy}\cos(-ix) + ie^{iy}\sin(-ix) \quad ?$$

Compte tenu de $e^{iy} = \cos(y)+i\sin(y)$, et en réunissant les termes en $\cos(y)$ et $\sin(y)$, on voit que cela est compatible avec la formule précédente si l'on a $e^x = \cos(-ix)+i\sin(-ix)$. Mais effectivement si l'on part de la formule $\cos(x) = (e^{ix}+e^{-ix})/2$ on est amené naturellement à définir $\cos(z)$ pour z complexe par cette même formule, d'où $\cos(ix) = (e^{-x}+e^x)/2 = \mathrm{ch}(x)$ et de même $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, donc $\sin(-ix) = (e^x - e^{-x})/2i = -i\,\mathrm{sh}(x)$, et alors $\cos(-ix) + i\sin(-ix) = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$, ok, ça marche. Autrement dit on définit cos, sin, et aussi ch et sh par les mêmes formules pour z complexe avec l'exponentielle que dans le cas réel. On notera qu'avec ces définitions :

$$\mathrm{ch}(z) = \cos(iz) \qquad \mathrm{sh}(z) = -i\sin(iz) \qquad \sin(iz) = i\,\mathrm{sh}(z)$$

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \qquad \mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = 1$$

et l'on passe de l'une des deux formules à l'autre via $z \leftrightarrow iz$. [9]

Il y a une façon directe intéressante de montrer que la solution de $E' = E$ prenant la valeur 1 en 0 est nécessairement $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$: il s'agit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral de Lagrange à la fonction d'une variable réelle $t \mapsto E(tz)$, $0 \leq t \leq 1$. Je laisse cela en exercice. Cependant une fois cela fait il reste à montrer que la solution unique trouvée $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est bien holomorphe. On peut le faire en vérifiant les équations de Cauchy-Riemann : on montre que l'on peut permuter les dérivées partielles et le signe somme. Ou encore on utilise le théorème des séries doubles pour montrer directement la formule d'addition ce qui permet ensuite de se ramener à dériver en 0 seulement. Je laisse cela en exercice. Le théorème 5 nous a donné de toute façon la réponse ultime sur le problème de dériver une série entière convergente. Il est logique à ce stade d'introduire la définition suivante :

Définition 2 (fonctions analytiques) *On dit qu'une fonction $f(z)$ définie sur un ouvert U du plan complexe $\mathbf{C}$ est* analytique *sur U si en tout point z_0, il existe un $\delta(z_0) > 0$ et des nombres complexes $c_n(z_0)$ tels que pour $|z - z_0| < \delta(z_0)$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z - z_0)^n$.*

Nous avons vu par le théorème 5 que la somme d'une série entière est holomorphe, même infiniment dérivable au sens complexe, et qu'elle peut être développée en série de Taylor convergente en tout point de son disque de convergence et cela nous permet donc d'affirmer que la somme $S(z)$ d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est analytique dans son disque de convergence. Il en sera de même de toutes ses dérivées puisque celles-ci sont aussi des sommes de séries entières. Ainsi :

Théorème 6 *Toute fonction analytique est holomorphe, et même elle est infiniment dérivable au sens complexe ; de plus toutes ses fonctions dérivées sont aussi des fonctions analytiques.*

9. Par pitié, familiarisez vous suffisamment avec ces quelques fonctions, les plus basiques de toute l'Analyse Mathématique, pour éviter d'écrire aux examens des choses incroyablement fausses du genre $|\cos(z)| \leq \cos(R)$ pour $|z| \leq R$. Ayez constamment présent à l'esprit le fait que sin par exemple se comporte totalement différemment sur l'axe réel (périodique, bornée) et sur l'axe imaginaire (exponentiellement croissante car $\sin(iy) = i\,\mathrm{sh}(y)$).

La *Théorie de Cauchy* va nous amener plus tard dans ce chapitre à deux théorèmes fondamentaux :

1. toute fonction holomorphe est une fonction analytique. En particulier toute fonction holomorphe est automatiquement infiniment dérivable au sens complexe,
2. le rayon de convergence R de la série de Taylor au point z_0 d'une fonction holomorphe f sur un ouvert U est au moins égal à la distance de z_0 au complémentaire de U. Autrement dit, le disque ouvert $D(z_0, R)$ sur lequel converge cette série de Taylor contient le plus grand disque ouvert centré en z_0 et contenu entièrement dans U. [10]

Le point 2 montre que le $\delta(z_0)$ de la définition d'une fonction analytique peut être pris égal au rayon du plus grand disque ouvert centré en z_0 et inclus dans U, mais il est totalement impossible d'établir cela sans dans le même temps démontrer les théorèmes de Cauchy. Plus précisément il y aurait tout de même une simplification si l'on voulait établir le point 2 pour les fonctions analytiques seulement, car nous savons déjà que la fonction analytique est infiniment dérivable, alors que pour la fonction holomorphe générale $f(z)$ on ne sait même pas a priori que $f'(z)$ est une fonction continue. D'ailleurs nous allons d'abord démontrer les théorèmes de Cauchy pour les fonctions holomorphes dont on suppose que la dérivée est une fonction continue ; ce n'est que dans un deuxième temps, grâce à une méthode de Goursat, que nous donnerons une approche ne faisant aucune hypothèse sur la fonction dérivée f' si ce n'est son existence. Tout cela peut paraître un petit peu académique puisqu'en fin de compte les fonctions holomorphes sont infiniment dérivables, mais c'est aussi l'élégance des Mathématiques de chercher les hypothèses minimales. [11]

5 Principe du prolongement analytique

Revenons à la somme $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Dans la démonstration du théorème 5 on y a fait remarquer, en notant D l'opérateur

10. ce disque de convergence peut contenir des points en dehors de U, d'où l'idée d'utiliser cela pour prolonger la fonction en dehors de U. Mais si deux disques associés à deux points distincts z_0 et z_1 s'intersectent en dehors de U il n'est pas toujours vrai que dans cette intersection les deux séries de Taylor donneront le même résultat. C'est même souvent faux. Cependant si U est convexe, c'est bon. Cette affirmation fera un bon exercice lorsque nous en aurons dit un peu plus sur cette idée de « prolongement analytique ».

11. il ne faut pas confondre cela avec l'idée d'une structuration linéaire des Mathématiques, couche par couche empilées dans un ordre implacable l'une au-dessus des autres. Une araignée qui parcourt sa toile le fait avec élégance et ne confond pas le lieu où elle se trouve avec le chemin qui l'y a conduit. Elle a même intérêt à essayer plusieurs chemins pour se rendre au même lieu.

de dérivation formelle (qui est aussi par le théorème la dérivation au sens concret, véritable), la formule :

$$D^m(S)(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-m+1) z^{n-m} .$$

Pour $z = 0$ seul le terme initial avec $n = m$ contribue et cela donne $D^m(S)(0) = a_m m!$. Comme l'on a prouvé pour tout z : $D^m(S)(z) = S^{(m)}(z)$, cela donne :

$$a_m = \frac{S^{(m)}(0)}{m!}$$

Remarque : certes dans la preuve du théorème 5 on a prouvé en particulier la formule

$$\forall h, |h| < R \implies S(h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S^{(m)}(0)}{m!} h^m ,$$

cependant si vous lisez attentivement la preuve vous verrez que la formule

$$a_m = \frac{S^{(m)}(0)}{m!}$$

n'y était pas encore établie, d'où la nécessité de l'argument ci-dessus. Autrement dit nous ne savions pas encore que deux séries donnant la même fonction ont nécessairement exactement les mêmes coefficients. [12]

Vous avez déjà étudié les séries entières lors des deux premières années, alors vous savez qu'un moyen plus simple d'établir l'unicité des coefficients est le suivant : en fait il s'agit de montrer que si l'un au moins des coefficient a_n est non nul alors la fonction $S(z) = \sum_{n=0} a_n z^n$ ne peut pas être identiquement nulle. La preuve est très simple : soit n_0 le plus petit indice avec $a_n \neq 0$, alors $S(z) = a_{n_0} z^{n_0}(1 + z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n_0+k+1}}{a_{n_0}} z^k)$. Prenons $0 < \delta < R$. Alors : $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_0+k+1}|\delta^k = C < \infty$. Donc :

$$0 < |z| \leq \delta \implies \left| \frac{S(z)}{a_{n_0} z^{n_0}} - 1 \right| \leq |z| \cdot C$$

Pour $|z|$ suffisamment petit le terme de droite est inférieur à $\frac{1}{2}$, et cela interdit à $S(z)$ de prendre la valeur zéro. Donc non seulement la fonction S ne peut pas être identiquement nulle, elle ne peut en fait, dans un voisinage suffisamment petit de $z_0 = 0$, ne s'annuler qu'au plus une seule fois, en $z_0 = 0$ mais pas ailleurs. Évidemment si elle ne s'annule pas en z_0 elle ne s'annule en aucun point d'un voisinage ouvert suffisamment petit, mais cela on

12. d'ailleurs il aurait fallu utiliser deux notations distinctes pour la série formelle $T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et sa somme $S(z)$, et au lieu de $D(S)$ il aurait fallu écrire $D(T)$, puisque la dérivation formelle fait appel explicitement aux coefficients de la série.

le savait déjà simplement en invoquant la continuité de $S(z)$ comme fonction de z (comme elle est dérivable, elle est continue). Reécrivons une partie de ce que nous avons appris sous la forme d'un théorème :

Théorème 7 *Si une fonction analytique s'annule en un point z_0 alors*
- *soit elle s'annule identiquement dans un voisinage de z_0,*
- *soit il existe un voisinage suffisamment petit de z_0 dans lequel la fonction n'a pas d'autre zéro que z_0.*

Définition 3 (multiplicité d'un zéro) *Soit f une fonction analytique définie dans un voisinage d'un point z_0. On pose $m(f;z_0) = +\infty$ si f est identiquement nulle dans un voisinage de z_0, et sinon $m(f;z_0)$ est le plus petit indice d'un coefficient non nul de la série de Taylor de f en z_0. On dit que $m(f;z_0)$ est la* multiplicité *de z_0 comme zéro de f (évidemment $m(f;z_0) = 0$ veut dire exactement que z_0 n'est pas un zéro de f).*

On en arrive maintenant à une propriété fondamentale des fonctions analytiques, que l'on exprimera sous différentes formes, et qui s'appellent d'une manière collective le « Principe du Prolongement Analytique », ou encore le Théorème d'Unicité Analytique. Pour l'exprimer nous avons besoin d'un rappel de Topologie :

Définition 4 (ouverts connexes) *Un ouvert U du plan complexe $\mathbf{C}$ est dit* connexe *si lorsque l'on a deux points quelconques z_0 et z_1 de U on peut les relier par un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$ restant toujours dans U ($\gamma([0,1]) \subset U$). Si V est ouvert de $\mathbf{C}$ et $z_0 \in V$, la* composante connexe *de V contenant z_0 est l'ensemble des points z_1 de V que l'on peut relier par un chemin continu à z_0 tout en restant dans V.*[13] *Un* domaine *(ou une* région*) est, par définition, un ouvert connexe (non vide...) du plan complexe.*

Théorème 8 (Principe du Prolongement Analytique) *Si une fonction f analytique sur un ouvert* connexe *U du plan complexe $\mathbf{C}$ est identiquement nulle sur un disque ouvert non vide $D(z_0, r)$ inclus dans U alors elle identiquement nulle sur U. Ou encore : si deux*

13. prouvez que cet ensemble est ouvert et que les composantes connexes sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence « $z_0 \sim z_1$ si l'on peut relier z_0 à z_1 par un chemin continu dans V ».

fonctions analytiques f et g sur un domaine *(= ouvert connexe) U prennent les mêmes valeurs sur un certain disque non vide dans U alors elles prennent partout les mêmes valeurs. Encore plus fort : si l'ensemble des points d'un domaine U où deux fonctions analytiques f et g sur U prennent les mêmes valeurs possède un point d'accumulation dans U alors en fait les deux fonctions f et g prennent partout dans U les mêmes valeurs. Ce sont, en fait, les mêmes fonctions.*

Il serait plus adapté dans ce contexte de parler de Théorème d'Unicité Analytique, car je n'ai pas l'intention de discuter de manière plus approfondie l'idée d'un « prolongement » analytique.

Comme exemple d'application du théorème si deux fonctions entières coïncident sur l'intervalle réel $[0, 1]$ alors elles sont partout égales ! Donc la fonction e^z est l'unique fonction entière égale à e^x pour $0 \leq x \leq 1$: on a utilisé l'équation différentielle $E'(z) = E(z)$ pour la construire, mais il n'y a de toute façon pas d'autre prolongement possible de e^x comme fonction analytique en dehors de l'axe réel.

Je rappelle qu'un *point d'accumulation* d'un ensemble A est un point z (pas nécessairement dans A !) tel que pour tout $\delta > 0$ on peut trouver $z' \in A$ avec $0 < |z - z'| \leq \delta$. Notez bien la condition $z' \neq z$. Une façon équivalente est de dire que l'on peut trouver une suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de A, deux à deux distincts, avec $z = \lim z_n$.[14] Je rappelle aussi qu'un point *appartenant à* A est dit *isolé* dans A si il n'est *pas* un point d'accumulation de A. Cela équivaut à dire qu'il existe un disque ouvert non vide centré en z qui n'intersecte A qu'en $\{z\}$.

Venons-en à la démonstration du théorème. Il suffit de prouver la dernière affirmation qui est la plus forte. On considère $F = f - g$ et on est ramené à prouver que les zéros d'une fonction analytique F sur U, non identiquement nulle, ne peuvent avoir aucun point d'accumulation dans U (ouvert connexe). Raisonnons par l'absurde. Supposons $F(z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\lim z_n = w$ avec $w \in U$, les z_n étant tous distincts de w. Par continuité de

14. cela équivaut encore à dire que l'on peut trouver des $z_n \in A$ avec $z = \lim z_n$, *les z_n étant tous distincts de z*. Un sous-ensemble de $\mathbf{C}$ est fermé si et seulement si il contient tous ses points d'accumulation. Plus généralement le plus petit fermé contenant A est l'union de A et de ses points d'accumulation. Un point de A peut être ou ne pas être un point d'accumulation.

la fonction F on a $F(w) = 0$. Par le Théorème 7 on peut affirmer que F est nécessairement identiquement nulle dans un voisinage suffisamment petit W de w.

Soit $z \in U$ quelconque et soit $\gamma : [0, 1] \to U$ un chemin continu avec $\gamma(0) = w$, $\gamma(1) = z$. Par continuité de γ pour $t > 0$ suffisamment petit on a $\gamma(t) \in W$ et on a choisi W de sorte que F est identiquement nulle sur W. On peut donc définir un ensemble non-vide

$$B = \{t \in [0, 1],\ \textit{il existe un voisinage de } \gamma(t) \textit{ sur lequel } F \textit{ est identiquement nulle}\}$$

et poser $\tau = \sup B$ puisque $B \subset [0, 1]$ est non vide.

On aura $0 < \tau \leq 1$. On peut alors (par l'une des propriétés caractérisant une borne supérieure) écrire $\tau = \lim t_n$ avec une suite croissante (au sens large) d'éléments t_n de B. Soit $w' = \gamma(\tau)$. Par continuité de γ et de F, on a $F(w') = F(\gamma(\tau)) = \lim F(\gamma(t_n)) = 0$. Donc w' est un zéro de F. Supposons par extraordinaire que l'un des t_n soit tel que $\gamma(t_n) = w'$. Alors w' possède un voisinage sur lequel F est identiquement nulle, par la définition même de B (donc dans ce cas on a aussi $\tau \in B$). Sinon, c'est que $w' \neq \gamma(t_n)$ pour TOUS les n. Comme $\lim \gamma(t_n) = w'$ et que $\gamma(t_n) \neq w'$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout voisinage de w' contient des points distincts de w' en lesquels F s'annule. Par le théorème 7 nous pouvons alors affirmer que F est identiquement nulle dans un certain voisinage de w'. Donc en fait $\tau \in B$ dans ce cas aussi. Donc dans tous les cas $\tau \in B$ et ainsi il existe un voisinage ouvert W' de w' dans U sur lequel F est identiquement nulle.

Pour conclure, supposons $\tau < 1$. Par continuité de γ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$ avec $\tau \leq t \leq \tau + \delta$ on a $\gamma(t) \in W'$. Donc W' est aussi un voisinage ouvert de $\gamma(t)$ pour de tels t et donc par définition de B, tous ces t sont dans B. Ceci est impossible puisque $\tau = \sup B$. L'hypothèse $\tau < 1$ a mené à une contradiction, donc $\tau = 1$. On sait aussi $\tau \in B$ donc $1 \in B$ et F est identiquement nulle dans un voisinage de $z = \gamma(1)$. En particulier F est nulle en z !

Mais z était arbitraire dans U donc F est partout nulle ! [15]

15. une démonstration un peu plus sophistiquée consiste à prouver que l'ensemble des $z \in U$ tels que F est identiquement nulle dans un voisinage de z, est à la fois ouvert et fermé dans U, et d'utiliser la caractérisation suivante des ensembles topologiques connexes : ce sont les ensembles tels que leurs seuls

À titre d'exemple assez foudroyant d'application du Théorème d'Unicité Analytique, supposons que l'on ait une fonction entière $f(z)$ avec $f(\frac{1}{n}) = e^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$. Alors $\forall z \in \mathbf{C}$ $f(z) = \exp(z)$! En effet les deux fonctions analytiques $f(z)$ et $\exp(z)$ coïncident en les points $\frac{1}{n}$ qui possèdent un point d'accumulation (à savoir, $0 = \lim \frac{1}{n}$). Donc, par unicité analytique, et compte tenu du fait que $\mathbf{C}$ est évidemment connexe, on a $f(z) = \exp(z)$ partout. ATTENTION ! si l'on prend par exemple comme ouvert (connexe) le demi-plan $U = \{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$, alors il est possible de trouver d'autres fonctions f analytiques sur U qui vérifient $f(\frac{1}{n}) = e^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$. [16] Le point IMPORTANT c'est que $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$ n'a effectivement pas de point d'accumulation dans U. Son unique point d'accumulation est 0 et $0 \notin U$. Donc l'existence de tels $f \neq \exp$ n'est pas contradictoire avec notre théorème (heureusement !). Par ailleurs, il est trivial de montrer la nécessité de l'hypothèse de connexité de U : prenons $U = \{|z| < 1\} \cup \{|z-3| < 1\}$ et posons $f(z) = 0$ pour $|z| < 1$ et $f(z) = 1$ pour $|z - 3| < 1$.

Théorème 9 (Théorème des zéros isolés) *Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U. Si f n'est pas identiquement nulle alors les zéros de f forment un ensemble A qui est fermé dans U et dont tous les points sont isolés dans A (on dit que A est un ensemble fermé (dans U !) discret). L'intersection de A avec un compact $K \subset U$ quelconque est de cardinalité finie.*

Preuve : comme U est connexe et que f n'est pas identiquement nulle, l'ensemble de ses zéros A ne peut avoir aucun point d'accumulation dans U, par le Théorème d'Unicité Analytique. En particulier les points de A sont isolés (dans A). De plus l'image réciproque par une application continue d'un fermé est un fermé donc $A = f^{-1}(\{0\})$ est fermé (dans U pas forcément dans $\mathbf{C}$ si $U \neq \mathbf{C}$!!). Enfin la propriété caractéristique d'un compact c'est que toute suite de points possède une suite-extraite convergente. Si $K \cap A$ était de cardinalité infinie, on pourrait construire une suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points deux-à-deux distincts dans $K \cap A$. Toute limite d'une suite-extraite serait alors un point d'accumulation de A. Mais A ne possède pas de point d'accumulation dans U, donc certainement pas non plus dans K qui est un sous-ensemble de U. Le théorème est démontré.

---

sous-ensembles à la fois ouvert et fermé pour la topologie induite sont l'ensemble vide et l'ensemble tout entier. Je vous laisse décider si j'ai bien fait d'opter pour une autre preuve. Remarque : il est très facile de faire une démonstration fausse du principe du prolongement analytique !

16. on peut prendre $f(z) = (1 + \sin(\frac{\pi}{z}))\exp(z)$, et f est même holomorphe sur $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

6 Les fonctions holomorphes sont analytiques

Nous allons montrer le Théorème Majeur de ce Chapitre.

Théorème 10 (Cauchy : analyticité des fonctions holomorphes) *Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert $D(z_0, R)$. Alors il existe des nombres complexes $c_n \in \mathbf{C}$ tels que :*

$$z \in D(z_0, R) \implies \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n$ ($h = z - z_0$) est donc au moins égal à R. Plus généralement soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. Alors

1. *f est une fonction analytique et en particulier elle est infiniment dérivable au sens complexe,*
2. *sur tout disque ouvert $D(z_0, R)$ inclus entièrement dans U la fonction f est la somme de sa série de Taylor en z_0.*

Pour la preuve nous allons, comme Cauchy, faire une *hypothèse supplémentaire* : à savoir que la fonction dérivée f' est continue. Ensuite nous verrons comment on peut se passer de cette hypothèse. Il est donc un petit peu exagéré d'attribuer au seul Cauchy la paternité de ce théorème. Le joli argument permettant de se dispenser de l'hypothèse de continuité de f' a été contribué en 1904 par Goursat, plusieurs décennies après que la théorie ait été construite par Cauchy, Riemann, Weierstrass.

Il suffit de montrer l'existence de la représentation $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ dans $D(z_0, R)$ (puisque, compte tenu de notre étude précédente des fonctions analytiques, les autres affirmations du théorème en résultent) et clairement on peut tout aussi bien supposer $z_0 = 0$. Notre preuve [17] va reposer sur un Théorème (dit « de Dirichlet ») de la théorie des séries de Fourier (démonstration en annexe) : *soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique dérivable, et $c_n(g)$ pour $n \in \mathbf{Z}$ ses coefficients de Fourier : $c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt$. On*

17. c'est une méthode parmi d'autres. Celle-ci est bien adaptée aussi à notre discussion future des « séries de Laurent », et de toute façon il faut bien faire un jour ou l'autre la remarque du lien entre les séries entières et les séries de Fourier.

a :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad g(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N\leq n\leq N} c_n(g)e^{int} \ .$$

Nous appliquons ce « Théorème de Dirichlet » [18] aux fonctions $g_r(t) = f(re^{it})$, $0 < r < R$, $t \in \mathbf{R}$. Elles sont de classe C^1 et 2π-périodiques. On posera donc pour $n \in \mathbf{Z}$:

$$c_n(r) = c_n(g_r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt \ .$$

Calculons la dérivée de $c_n(r)$ par rapport à r : [19]

$$c_n'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(re^{it})e^{it}e^{-int}dt \ ,$$

et intégrons alors par parties :

$$c_n'(r) = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{1}{ri}f(re^{it})e^{-int}\right]_0^{2\pi} + \frac{in}{ri}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt\right) = \frac{n}{r}c_n(r)$$

En effet le terme entre crochets disparaît par 2π-périodicité. Au final nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbf{Z}\ \forall r \in]0, R[\qquad c_n'(r) = \frac{n}{r}c_n(r)$$

Ces équations différentielles sont aisément résolues : la dérivée de $r^{-n}c_n(r)$ est $-nr^{-n-1}c_n(r)+r^{-n}\frac{n}{r}c_n(r) = 0$, donc $r^{-n}c_n(r)$ est une constante, que nous noterons c_n :

$$\forall n \in \mathbf{Z}\ \exists c_n \in \mathbf{C}\ \forall r \in]0, R[\qquad c_n(r) = c_n r^n$$

Nous avons presque fini. Choisissons $\delta > 0$ avec $\delta < R$ et notons $M = \sup_{|z|\leq\delta} |f(z)|$ qui est fini, car f est continue sur le compact $\{|z| \leq \delta\}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \qquad c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt \implies \forall r \in]0, \delta] \quad |c_n(r)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M dt = M$$

Donc, $\forall n \in \mathbf{Z}\ \forall r \in]0, \delta] \quad |c_n| \leq Mr^{-n}$. Supposons maintenant $n < 0$ et passons à la limite pour $r \to 0^+$. On obtient :

$$\forall n < 0 \quad c_n = 0 \quad \text{et donc aussi} \quad \forall r \in]0, R[\qquad c_n(r) = 0 \ .$$

En invoquant le théorème de Dirichlet on obtient alors :

$$\forall r \in]0, R[\quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad f(re^{it}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{0\leq n\leq N} c_n r^n e^{int} = \lim_{N\to\infty} \sum_{0\leq n\leq N} c_n \cdot (re^{it})^n$$

18. le vrai théorème de Dirichlet a des hypothèses différentes, voir l'annexe.
19. expliquez pourquoi on a le droit de dériver sous le signe somme.

et donc, finalement,

$$0 < |z| < R \implies \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ a donc un rayon de convergence au moins égal à R puisqu'elle converge pour des z avec $|z|$ arbitrairement proches de R. En ce qui concerne la validité de la formule au point $z = 0$, il suffit maintenant de dire que la fonction $f(z)$ comme la somme de la série $S(z)$ sont des fonctions continues pour $|z| < R$, et comme elles coïncident partout sauf peut-être en 0 elles coïncident aussi en $z = 0$. Le Théorème de Cauchy est donc démontré (sous l'hypothèse de continuité de la fonction dérivée f' [20]) : en effet nous avons établi que f est la somme d'une série entière dans $D(0, R)$, le fait que cette série entière soit infiniment dérivable et qu'elle soit sa propre série de Taylor à l'origine sont des points que nous avons établis précédemment dans notre étude des fonctions analytiques.

On extrait de la preuve des formules intéressantes pour les dérivées successives de f en 0 puisque nécessairement $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$:

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad \forall r \in]0, R[\qquad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\, dt$$

En particulier, pour $n = 0$ cela donne

$$\forall r \in]0, R[\qquad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, dt$$

et donc :

Théorème 11 (de la moyenne) *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. En tout point z_0 de U, $f(z_0)$ est égal à la moyenne des valeurs de f prises sur le cercle de centre z_0 et de rayon r, pour tout r tel que le disque fermé $\{|z - z_0| \leq r\}$ soit inclus dans U.* [21]

20. l'hypothèse de continuité de f' a été utile pour justifier la dérivation par rapport à r de $c_n(r)$ sous le signe d'intégration et pour intégrer par parties ; elle n'était pas nécessaire pour le « théorème de Dirichlet » car la preuve donnée en annexe ne demande pas la continuité de la fonction dérivée.

21. justifier le fait que si le disque fermé $\{|z - z_0| \leq r\}$ est inclus dans U alors il existe $r' > r$ tel que le disque ouvert $D(z_0, r')$ est inclus dans U.

7 Existence de primitives et Théorème de Cauchy-Goursat

Comment faire lorsque l'on ne dispose plus de l'hypothèse de continuité pour la fonction dérivée f' ? Voici une idée : supposons que l'on puisse trouver une *primitive* de f, c'est-à-dire, une fonction g holomorphe avec $g' = f$. Alors cette fonction g a une dérivée continue (f est continue, puisque dérivable !), donc le théorème de la section précédente s'applique à g. Ainsi g est analytique, et donc ses dérivées successives f et f' aussi ! Donc f' est continue, et la section précédente s'applique intégralement à f.

Alors, cherchons g avec $g' = f$. Il se trouve que sur un ouvert U quelconque, cela n'est pas toujours possible : par exemple il n'existe pas de fonction holomorphe sur $U = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ avec $g'(z) = \frac{1}{z}$. On en reparlera avec moult détails plus tard. Mais il se trouve qu'il n'y a pas de problème lorsque U est un disque ouvert et c'est bien le cas d'un disque $D(z_0, R)$ qui nous intéresse ici. On pourra d'emblée supposer $z_0 = 0$ sans perte de généralité et l'objectif est donc de prouver :

Théorème 12 (Existence d'une primitive) *Soit $R > 0$ et soit f une fonction holomorphe sur $D(0, R)$. Alors il existe une fonction holomorphe g sur $D(0, R)$ telle que f soit la fonction dérivée de g.*

Preuve : On va construire g de sorte que $g(0) = 0$. Soit $z = x+iy$ dans le disque ouvert. Nécessairement, si g existe :

$$g(x) = \int_0^x g'(t)dt = \int_0^x f(t)dt$$

$$g(x+iy) - g(x) = \int_0^y ig'(x+iu)du = i\int_0^y f(x+iu)du$$

Donc, en combinant, on est amené à adopter la définition suivante :

$$g(x+iy) = \int_0^x f(t)dt + i\int_0^y f(x+iu)du$$

Mais comment montrer que cette fonction est holomorphe ? Il est facile [22] de calculer la dérivée partielle par rapport à y :

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x+iy) = if(x+iy)$$

22. je rappelle que pour toute fonction continue $A(y)$, on a $\frac{d}{dy}\int_0^y A(u)du = A(y)$.

Mais comment faire pour $\frac{\partial}{\partial x}g(x+iy)$? Si l'on pouvait permuter $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\int_0^y$ on pourrait ensuite utiliser Cauchy-Riemann pour f, c'est-à-dire remplacer $\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}$ par $\int_0^y -i\frac{\partial}{\partial y}$, et après un tout petit calcul cela donnerait comme voulu $\frac{\partial}{\partial x}g(x+iy) = f(x+iy)$. Ainsi la fonction g aurait des dérivées partielles continues vérifiant les équations de Cauchy-Riemann ! Mais pour permuter $\frac{\partial}{\partial x}$ et le signe $\int_0^y$ dans une intégrale $\int_0^y F(x,u)du$ dépendant d'un paramètre x il faut des hypothèses, par exemple la continuité de la fonction $\frac{\partial}{\partial x}F(x,u)$ par rapport au couple (x,u). Mais justement nous ne disposons pas d'une telle hypothèse.[23]

Reprenons à zéro en échangeant les rôles de x et de y. Si g existe avec $g' = f$:

$$g(iy) = \int_0^y ig'(iu)du = i\int_0^y f(iu)du$$
$$g(x+iy) - g(iy) = \int_0^x g'(t+iy)dt = \int_0^x f(t+iy)dt$$

ce qui amène à definir une fonction (notée k pour éviter les confusions avec le g déjà défini) :

$$k(x+iy) = i\int_0^y f(iu)du + \int_0^x f(t+iy)dt$$

Pour cette fonction k il est facile de calculer la dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial x}k(x+iy) = f(x+iy)$$

Si nous savions que les deux fonctions g et k étaient en fait la même fonction alors nous pourrions affirmer :

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x+iy) = f(x+iy)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}g(x+iy) = if(x+iy)$$

La fonction g aurait ainsi des dérivées partielles continues et celles-ci vérifieraient les équations de Cauchy-Riemann. Par le Théorème 4 cela prouverait que g est holomorphe avec de plus $g' = \frac{\partial}{\partial x}g = f$. Le théorème d'existence d'une primitive serait alors établi.

Le fait que $k = g$ est cas particulier[24] du Théorème de Cauchy-Goursat :

23. même les théorèmes plus puissants que l'on apprend dans le cours sur l'intégrale de Lebesgue ne suffiraient pas ici pour justifier la permutation de $\frac{\partial}{\partial x}$ et de $\int_0^y$.

24. c'est un cas particulier car dans le théorème qui suit on ne se restreint pas à U égal à un disque ; par contre en ce qui concerne les cas $x < 0$ ou $y < 0$ il faut faire un peu d'algèbre avec $\int_0^x = -\int_x^0$, $\int_0^y = -\int_y^0$, pour se ramener au théorème qui suit où l'on a $x_0 \leq x_1$ et $y_0 \leq y_1$.

Théorème 13 (de Cauchy-Goursat) *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et soit $\mathcal{R} = \{x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1\}$ un rectangle inclus dans U. Alors*

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz = 0$$

Ici, avant de donner dans le chapitre suivant les définitions générales pour les intégrales le long d'un chemin γ, ou sur le bord $\partial\Omega$ d'un domaine, on utilisera les symboles $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz$ comme une simple notation condensée pour représenter, par définition :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x+iy_0)dx + i\int_{y_0}^{y_1} f(x_1+iy)dy - \int_{x_0}^{x_1} f(x+iy_1)dx - i\int_{y_0}^{y_1} f(x_0+iy)dy$$

Supposons que l'on choisisse un point (X,Y) dans le rectangle $\mathcal{R}$ et que l'on considère ainsi les 4 sous-rectangles $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$ aux bords parallèles aux axes ayant chacun le point (X,Y) parmi leurs sommets. Pour être spécifique on prend $(X,Y) = (\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2})$. Je vous laisse vérifier alors que l'on a :

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz = \sum_{1\leq j\leq 4} \int_{\partial\mathcal{R}_j} f(z)dz$$

pour n'importe quelle fonction f (pourvu que les intégrales aient un sens et vérifient les règles de Chasles usuelles $\int_\alpha^\beta + \int_\beta^\gamma = \int_\alpha^\gamma$). Donc :

$$\left|\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz\right| \leq \sum_{1\leq j\leq 4} \left|\int_{\partial\mathcal{R}_j} f(z)dz\right|$$

et il existe donc l'un des sous-rectangles $\mathcal{R}_j$, on le notera $\mathcal{R}^{(1)}$, tel que

$$\left|\int_{\partial\mathcal{R}^{(1)}} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz\right|$$

On construit ainsi une suite de rectangles emboîtés $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{(0)} \supset \mathcal{R}^{(1)} \supset \mathcal{R}^{(2)} \supset \dots$ avec

$$\left|\int_{\partial\mathcal{R}^{(j+1)}} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\mathcal{R}^{(j)}} f(z)dz\right|$$

et donc, par récurrence :

$$\left|\int_{\partial\mathcal{R}^{(j)}} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4^j}\left|\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz\right|$$

Notons (X_j, Y_j) les coordonnées du point inférieur gauche du rectangle $\mathcal{R}^{(j)}$ (en particulier $(X_0, Y_0) = (x_0, y_0)$). Alors par construction $X_{j+1} - X_j$ vaut 0 ou $\frac{x_1-x_0}{2^{j+1}}$ et aussi $Y_{j+1} - Y_j$

vaut 0 ou $\frac{y_1-y_0}{2^{j+1}}$. La suite (X_j) est croissante et majorée par x_1 donc convergente, et la suite (Y_j) est croissante et majorée par y_1 donc convergente. Soit X_∞ et Y_∞ les limites et $z_\infty = X_\infty + iY_\infty$. Chaque rectangle $\mathcal{R}^{(j)}$ est fermé et tous les points (X_k, Y_k), $k \geq j$ sont dedans, donc aussi leur limite (X_∞, Y_∞). Puisque la largeur de $\mathcal{R}^{(j)}$ est exactement $\frac{x_1-x_0}{2^j}$ et sa hauteur $\frac{y_1-y_0}{2^j}$ il en résulte que pour tout point z se trouvant sur son bord on a l'inégalité :

$$|z - z_\infty| \leq \frac{D}{2^j} \qquad \text{avec } D = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}$$

La fonction f est dérivable au sens complexe au point z_∞. On peut donc pour tout $\epsilon > 0$ trouver $\delta > 0$ tel que pour $|z - z_\infty| \leq \delta$ on a $|f(z) - f(z_\infty) - f'(z_\infty)(z - z_\infty)| \leq \epsilon |z - z_\infty|$. Donc, pour $\epsilon > 0$ fixé et pour tout j suffisamment grand, on aura, pour tous les z sur le bord du rectangle $\mathcal{R}^{(j)}$:

$$|f(z) - f(z_\infty) - f'(z_\infty)(z - z_\infty)| \leq \epsilon \frac{D}{2^j} ,$$

puis, en notant $P = 2|x_1 - x_0| + 2|y_1 - y_0|$ le périmètre de $\mathcal{R}$, et donc $\frac{P}{2^j}$ le périmètre de $\mathcal{R}^{(j)}$, on peut affirmer, pour tout j suffisamment grand :

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} \big(f(z) - f(z_\infty) - f'(z_\infty)(z - z_\infty) \big) \, dz \right| \leq \epsilon \frac{P}{2^j} \frac{D}{2^j} = \epsilon \frac{PD}{4^j}$$

C'est là où l'on fait la remarque simplificatrice :

$$\int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} dz = 0 \qquad \text{et aussi} \qquad \int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} z \cdot dz = 0 ,$$

cela vaut pour n'importe quel rectangle et je vous le laisse à vérifier, c'est très simple. Donc d'une part pour tout j :

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^j} \left| \int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz \right|$$

et d'autre part pour tout j suffisamment grand :

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} f(z) dz \right| \leq \epsilon \frac{PD}{4^j}$$

En combinant les deux on obtient :

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz \right| \leq \epsilon PD$$

Mais $\epsilon > 0$ est arbitraire. Donc, on peut conclure, on a $\left| \int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz \right| = 0$ ce qui donne (finalement) :

$$\int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz = 0$$

Le Théorème de Cauchy-Goursat est démontré, et avec lui aussi celui de l'existence d'une primitive pour toute fonction holomorphe sur un disque et donc aussi le Théorème d'analyticité des fonctions holomorphes en toute généralité. On peut donc conclure là ce Chapitre.

8 Annexes

8.1 Différentiabilité

Théorème 14 *Si la fonction (à valeurs réelles ou complexes) $F(x, y)$ admet des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tous les points d'un ouvert U du plan, et si ces dérivées partielles sont des fonctions continues du couple (x, y) de cet ouvert U, alors la fonction F est différentiable en tout point (x, y) de l'ouvert U.*

Pour la preuve notons $A(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ et $B(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ les dérivées partielles de F, dont on suppose qu'elles existent en tout point de U et sont des fonctions continues du couple (x, y). Soit (x_0, y_0) un point de l'ouvert U. Notons $A_0 = A(x_0, y_0)$ et $B_0 = B(x_0, y_0)$. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que U contienne le rectangle $\mathcal{R}(\delta_0) = \{|x - x_0| \leq \delta_0, |y - y_0| \leq \delta_0\}$. Soit $(x, y) \in \mathcal{R}(\delta_0)$, écrivons :

$$\begin{aligned}
&F(x,y) - F(x_0,y_0) \\
&= F(x,y) - F(x_0,y) + F(x_0,y) - F(x_0,y_0) \\
&= \int_{x_0}^{x} A(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} B(x_0,u)du \\
&= (x - x_0)A_0 + \int_{x_0}^{x}(A(t,y) - A_0)dt + (y - y_0)B_0 + \int_{y_0}^{y}(B(x_0,u) - B_0)du
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Par continuité des fonctions A et B il existe $\delta > 0$ tel que pour tout couple (x', y') dans $\mathcal{R}(\delta)$ on ait $|A(x', y') - A_0| \leq \epsilon$, $|B(x', y') - B_0| \leq \epsilon$. Donc :

$$(x,y) \in \mathcal{R}(\delta) \implies \Big|F(x,y) - F(x_0,y_0) - A_0 \cdot (x - x_0) - B_0 \cdot (y - y_0)\Big| \leq \epsilon|x - x_0| + \epsilon|y - y_0|$$

On aura remarqué que les points (t, y), $t \in |[x_0, x]|$, et (x_0, u), $u \in |[y_0, y]|$, sont tous dans $\mathcal{R}(\delta)$ lorsque (x, y) y est.[25] Autrement dit en posant, pour $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$:

$$\epsilon(h_1,h_2) = \frac{F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - F(x_0,y_0) - A_0 \cdot h_1 - B_0 \cdot h_2}{|h_1| + |h_2|},$$

25. notation : $|[a, b]| = [\min(a, b), \max(a, b)]$.

on a :

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 \quad 0 < \max(|h_1|, |h_2|) \leq \delta \implies |\epsilon(h_1, h_2)| \leq \epsilon$$

c'est-à-dire $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon(h_1, h_2) = 0$. Donc (par définition) F est différentiable au point (x_0, y_0), la preuve est complète.

8.2 Séries doubles

Une série double est d'abord une expression formelle $\sum_{n,m\geq 0} a_{n,m}$ avec des nombres complexes $a_{n,m}$ indexés par $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Dans un premier temps nous ferons l'hypothèse : [26]

$$\forall (n,m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \quad a_{n,m} \geq 0$$

Dans ce cas considérons l'ensemble $\mathcal{A} \subset [0, +\infty[$ des nombres réels de la forme $S(B) := \sum_{(n,m)\in B} a_{n,m}$ avec $B \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ de cardinalité finie. Alors, par définition :

$$\sum_{n,m\geq 0} a_{n,m} = \sup(\mathcal{A})$$

Il s'agit donc d'un élément de $[0, +\infty[\cup \{+\infty\}$. La série est dite *convergente* si cet élément n'est pas $+\infty$.

Théorème 15 *Que la série de* ***terme général positif ou nul*** $a_{n,m}$ *soit convergente ou divergente on a toujours :*

$$\sum_{n,m\geq 0} a_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n+m=k \\ n,m\geq 0}} a_{n,m}$$

On notera que chacune des séries simples est à termes positifs, a ainsi des sommes partielles croissantes et donc possède une limite dans $[0, +\infty]$. [27]

Soit $B \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ de cardinalité finie. Alors pour N et M suffisamment grand $B \subset \{0, \ldots, N\} \times \{0, \ldots, M\}$ donc

$$S(B) = \sum_{(n,m)\in B} a_{n,m} \leq \sum_{\substack{0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq M}} a_{n,m}$$

26. dans ce cas spécial on pourrait autoriser $a_{n,m} = +\infty$. Cela serait utile si l'on voulait discuter des séries triples ! mais bon, on en restera là ici.
27. certaines des séries simples intérieures peuvent valoir $+\infty$. Examiner par exemple la situation avec $a_{n,m} = 1$ pour tout (n, m) !

On a donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}\right) \geq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}\right) \geq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=0}^{M} a_{n,m}\right) \geq S(B)$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}\right) \geq \sum_{m=0}^{M}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}\right) \geq \sum_{m=0}^{M}\left(\sum_{n=0}^{N} a_{n,m}\right) \geq S(B)$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{n+m=k\\ n,m\geq 0}} a_{n,m} \geq \sum_{k=0}^{N+M}\sum_{\substack{n+m=k\\ n,m\geq 0}} a_{n,m} = \sum_{\substack{0\leq n\\ 0\leq m\\ n+m\leq N+M}} a_{n,m} \geq \sum_{\substack{0\leq n\leq N\\ 0\leq m\leq M}} a_{n,m} \geq S(B)$$

Donc chacune des trois séries considérées majore chacun des $S(B)$, c'est-à-dire majore le sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $[0,+\infty[$. Par définition de $\sup(\mathcal{A})$ cela implique que chacune des trois séries majore $\sup(\mathcal{A})$.

De plus pour tout N fini, fixé, on a :

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N} a_{n,m} = \lim_{M\to\infty}\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} a_{n,m} ,$$

et, comme limite d'éléments de $\mathcal{A}$ cela est majoré par $\sup(\mathcal{A})$. Donc la limite pour $N \to \infty$ est aussi majorée par $\sup(\mathcal{A})$.

On raisonne de même avec

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}\right) &= \lim_{M\to\infty}\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}\\ &= \lim_{M\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{M} a_{n,m}\\ &= \lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{n,m} \leq \sup(\mathcal{A})\end{aligned}$$

Et c'est encore plus immédiat pour les sommes triangulaires. Bref, chacune des trois séries minore $\sup(\mathcal{A})$. Elles sont donc chacune égale à $\sup(\mathcal{A})$ d'où le théorème.

Prenons le cas général de séries doubles à termes complexes $u_{n,m}$. La série double $\sum_{n,m\geq 0} u_{n,m}$ est dite *absolument convergente* si

$$\sum_{n,m\geq 0} |u_{n,m}| < \infty$$

Par le théorème précédent il suffit pour cela que $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}|u_{n,m}|\right)<\infty$, ou que $\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n,m}|\right)<\infty$, ou encore que $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{n+m=k\\ n,m\geq 0}}|u_{n,m}|<\infty$.

Supposons que l'une de (donc toutes) ces conditions soit vérifiée. Alors pour chaque n fixé on a $\sum_{m=0}^{\infty}|u_{n,m}|<\infty$ (sinon la série double ne pourrait pas être finie...) et pour m fixé on a $\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n,m}|<\infty$, et donc les séries simples $\sum_{m=0}^{\infty}u_{n,m}$ et $\sum_{n=0}^{\infty}u_{n,m}$ sont chacunes absolument convergentes, donc convergentes. Et comme :

$$\forall n \quad \left|\sum_{m=0}^{\infty}u_{n,m}\right|\leq\sum_{m=0}^{\infty}|u_{n,m}|$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty}S_n$ avec terme général $S_n=\sum_{m=0}^{\infty}u_{n,m}$ est elle aussi absolument convergente. Idem avec $\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_{n,m}\right)$ et aussi avec $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{n+m=k\\ n,m\geq 0}}u_{n,m}$. On peut donc définir trois nombres complexes :

$$X=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}u_{n,m}\right)\quad Y=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_{n,m}\right)\quad Z=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{n+m=k\\ n,m\geq 0}}u_{n,m}$$

Théorème 16 *Soit $\sum_{n,m\in\mathbf{N}^2}u_{n,m}$ une série double de nombres complexes. Si elle est **absolument convergente** alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{n+m=k\\ n,m\geq 0}}u_{n,m}\ ,$$

toutes les séries apparaissant ici étant absolument convergentes. La valeur commune pourra être notée $\sum_{\substack{n\geq 0\\ m\geq 0}}u_{n,m}$ (la notation ne précise pas dans quel ordre on est censé sommer, mais le théorème nous dit justement que le résultat ne dépend pas de l'ordre).

Pour la preuve il est clair que l'on peut considérer séparément les parties réelles et imaginaires. Il suffit ainsi de démontrer le théorème sous l'hypothèse $\forall n,m\ u_{n,m}\in\mathbf{R}$. Définissons :

$$a_{n,m}=|u_{n,m}|\qquad b_{n,m}=|u_{n,m}|-u_{n,m}$$

Comme $0\leq b_{n,m}\leq 2a_{n,m}$ la série double de terme général $b_{n,m}$ est elle-aussi convergente. En écrivant

$$u_{n,m}=a_{n,m}-b_{n,m}$$

l'égalité $X=Y=Z$ résulte des égalités analogues pour la série double de terme général positif ou nul $a_{n,m}$ et de celles pour la série double de terme général positif ou nul $b_{n,m}$.

8.3 Théorème de Dirichlet

Théorème 17 *Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique, partout dérivable. Soit $c_n(g)$ pour $n \in \mathbf{Z}$ ses coefficients de Fourier :*

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt\ ,$$

alors

$$\forall t_0 \in \mathbf{R} \quad g(t_0) = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N\leq n\leq N} c_n(g)e^{int_0}\ .$$

Comme la fonction g est supposée dérivable, elle est continue, et donc elle est intégrable au sens de Riemann [28], ce qui donne un sens aux coefficients de Fourier $c_n(g)$. Le premier théorème de ce type avec une preuve rigoureuse est dû à Dirichlet. Mais ici on devrait parler de Théorème de Dirichlet-Riemann : la preuve utilise de manière essentielle un important « Lemme de Riemann », dont nous donnerons l'énoncé le moment venu.

Dans les livres d'enseignement un théorème est souvent énoncé, sous le nom de « Théorème de Dirichlet », avec comme hypothèse pour g d'être de classe C^1 par morceaux (et aux éventuels points de discontinuité de g, en nombre fini, le théorème dit que la limite de la série de Fourier en t_0 est $\frac{g(t_0^+)+g(t_0^-)}{2}$). Les hypothèses de Dirichlet étaient : *nombre fini de discontinuités de première espèce et nombre fini de maxima et de minima locaux*, et ce n'est pas la même chose que C^1 *par morceaux* ! Chez Dirichlet il n'y a pas d'hypothèse de dérivabilité. [29] Jordan a prouvé un théorème plus général que celui de Dirichlet ; son hypothèse est : *la fonction est à variation bornée* [30] et cela contient comme cas particulier le cas des fonctions de classe C^1, ou de classe C^1 par morceaux. Les conditions de Dirichlet et de Jordan (sur $[-\pi,\pi]$ tout entier ou un intervalle ouvert $I \subset [-\pi,\pi]$) sont des conditions qui garantissent la convergence de la série de Fourier en tout point (en tout point de l'intervalle I). En ce qui concerne l'hypothèse de dérivabilité on peut la faire en un unique point t_0 : *si g est intégrable au sens de Riemann (ou de Lebesgue), et si $g'(t_0)$ existe, alors la série de Fourier converge au point t_0 vers $g(t_0)$.* En effet on peut vérifier que la preuve que nous allons donner ici du théorème 17 s'adapte à ce cas. Donc la condition de dérivabilité permet de donner un critère suffisant pour la convergence en un point donné t_0, alors que la condition du théorème de Dirichlet-Jordan est suffisante pour la convergence en tous les points d'un intervalle ouvert. C'est donc, me semble-t-il, un (léger) contresens que d'associer le nom de Dirichlet à la condition de dérivabilité comme condition suffisante de convergence d'une série de Fourier.

Si k est une fonction 2π-périodique intégrable au sens de Riemann ou de Lebesgue alors $\int_a^{a+2\pi} k(u)du$ ne dépend pas de a. En effet $\int_a^{a+2\pi} = \int_a^0 + \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi+a} = \int_a^0 + \int_0^{2\pi} + \int_0^a = \int_0^{2\pi}$, en utilisant les relations de Chasles et $\int_{2\pi}^{2\pi+a} = \int_0^a$ par 2π-périodicité.

28. une présentation de l'intégrale de Riemann est disponible sur le site de l'auteur.
29. je signale tout de même par acquit de conscience que par un théorème célèbre de Lebesgue une fonction monotone, ou à variation bornée, est presque partout dérivable.
30. voir le cours sur les fonctions de variations bornées sur le site de l'auteur

Fixons t_0 et considérons la fonction $k(t) = g(t_0+t)$, alors $c_n(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-t_0}^{-t_0+2\pi} k(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-t_0}^{-t_0+2\pi} g(t_0+t)e^{-int}dt = e^{int_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u)e^{-inu}du = e^{int_0}c_n(g)$. Donc si le théorème est connu pour k en 0, alors $g(t_0) = k(0) = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{-N\leq n\leq N} c_n(k) = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{-N\leq n\leq N} c_n(g)e^{int_0}$.

Quitte à remplacer g par k on est ramené au cas $t_0 = 0$. On va utiliser l'existence de $g'(0)$, la dérivabilité aux autres points sera superflue (on utilisera aussi la continuité de g sur $[-\pi,\pi]$, mais la preuve pourrait s'étendre aux g supposées seulement Riemann-intégrables, voire Lebesgue-intégrables). On a : [31]

$$\begin{aligned} S_N := \sum_{-N\leq n\leq N} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sum_{-N\leq n\leq N} e^{int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}((g(t)+g(-t))\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où la fonction g est la constante 1, alors les $c_n(g)$ sont tous nuls, sauf $c_0 = 1$, donc pour $g \equiv 1$ on doit trouver $S_N = 1$. Ainsi :

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt\ ,$$

et, à nouveau dans le cas général :

$$S_N - g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{g(t)+g(-t)-2g(0)}{\sin(\frac{t}{2})}\sin((N+\frac{1}{2})t)\,dt$$

Par dérivabilité en 0 de g, on a :

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)+g(-t)-g(0)}{t} = g'(0)-g'(0) = 0\ ,$$

donc la fonction continue G définie sur $]0,\pi]$ par :

$$G(t) := \frac{g(t)+g(-t)-2g(0)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

a une limite [32] à droite en $t = 0$. Cette limite est nulle, mais nous n'allons pas faire usage de ce point, son existence seule nous suffit, car elle nous permet d'étendre par continuité G en $t = 0$ et donc de la considérer comme une fonction continue sur $[0,\pi]$. [33]

31. je laisse en exercice le calcul de la somme géométrique $\sum_{-N\leq n\leq N} e^{int} = \sum_{-N\leq n\leq N} q^n$, $q = e^{it}$.
32. je rappelle que $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$.
33. vous remarquerez que cela veut dire en particulier qu'à la place de l'existence de $g'(0)$ on peut utiliser l'hypothèse plus faible de l'existence de dérivées à droite et à gauche. On peut affaiblir cela encore en l'hypothèse de la propriété de Lipschitz (ou même la propriété de Hölder) en 0. De plus, sous ces hypothèses, on n'a pas besoin de la continuité de g en 0 mais seulement de l'existence de limites à droite $g(0^+)$ et à gauche $g(0^-)$ et la preuve établirait dans ce cas la convergence vers $(g(0^+)+g(0^-))/2$. Signalons aussi qu'en utilisant la validité du Lemme de Riemann pour les fonctions Riemann ou même Lebesgue intégrables, on obtient des énoncés tels que : *si g est intégrable (au sens de Riemann ou, plus généralement, au sens de Lebesgue), et si $g'(t_0)$ existe, alors la série de Fourier de g au point t_0 est convergente de limite $g(t_0)$.*

Il suffit donc à ce stade pour pouvoir affirmer $\lim_{N\to+\infty} S_N = g(0)$ de disposer du :

Théorème 18 (Lemme de Riemann) *Soit* $-\infty < a < b < \infty$ *et soit* $G : [a,b] \to \mathbf{C}$ *une fonction continue, ou plus généralement intégrable au sens de Riemann. On a alors :*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) G(t)\, dt = 0 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b \cos(\lambda t) G(t)\, dt = 0$$

L'idée clé est que si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver une fonction K (dépendant de ϵ !) pour laquelle le Lemme est vrai et telle que $\int_a^b \big|G(t) - K(t)\big|\, dt < \epsilon$ alors le Lemme est vrai pour G. En effet

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \sin(\lambda t) G(t)\, dt\right| &\leq \left|\int_a^b \sin(\lambda t)(G(t) - K(t))\, dt\right| + \left|\int_a^b \sin(\lambda t) K(t)\, dt\right| \\ &\leq \epsilon + \left|\int_a^b \sin(\lambda t) K(t)\, dt\right|\end{aligned}$$

Comme le Lemme est vrai pour K il existe Λ tel que pour $|\lambda| \geq \Lambda$ le dernier terme est aussi majoré par ϵ. Donc

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \Lambda \quad |\lambda| \geq \Lambda \implies \left|\int_a^b \sin(\lambda t) G(t)\, dt\right| \leq 2\epsilon$$

On procède de même avec cos à la place de sin.

On dispose de deux catégories de fonctions K pour lesquelles le Lemme est facilement prouvé : les fonctions de classe C^1 (intégration par parties), et les fonctions en escalier, qui sont combinaisons linéaires finies de fonctions $K_{c,d}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [c,d] \\ 0 & x \notin [c,d] \end{cases}$: le calcul direct pour ces dernières est immédiat. En fait ces deux catégories conviennent : toute fonction G intégrable au sens de Riemann, ou même intégrable au sens de Lebesgue, peut être approchée par une telle K à epsilon près au sens suivant : $\int_a^b |G - K|\, dt < \epsilon$. Ce théorème d'approximation[34] n'est pas une broutille pour l'intégrale de Lebesgue, mais pour l'intégrale de Riemann il est plus à portée de main, car on n'a qu'à rappeler que l'on peut prendre comme *définition*[35] de l'intégrabilité au sens de Riemann la chose suivante : *une fonction G à valeurs réelles est intégrable au sens de Riemann si et seulement si on peut pour tout $\epsilon > 0$ trouver deux fonctions en escalier K_1 et K_2 avec $K_1 \leq G \leq K_2$ et $\int_a^b (K_2 - K_1)\, dt \leq \epsilon$.*

34. des raisonnements simples montrent que si l'on sait faire avec des K en escalier, on sait faire avec des K de classe C^1, et vice-versa.

35. et si ce n'est pas une définition, c'est une caractérisation que l'on établit lorsque l'on explique la théorie de Riemann. Voir le fichier sur Riemann du site de l'auteur

Alors, pour un G général on écrit $G = \mathrm{Re}(G) + i\mathrm{Im}(G)$, on prend un K_1 pour $\mathrm{Re}(G)$ avec $\frac{1}{2}\epsilon$, et un K_1' pour $\mathrm{Im}(G)$ avec $\frac{1}{2}\epsilon$, et ensuite avec $K = K_1 + iK_1'$ on a $\int_a^b |G-K|\,dt < \epsilon$.

Dans le cas particulier des fonctions G continues, à valeurs réelles, l'uniforme continuité permet de justifier (exercice !) l'existence de K_1 et K_2 avec une propriété plus forte : $K_1 \leq G \leq K_2$ et $\forall t\ K_2(t) - K_1(t) \leq \frac{1}{b-a}\epsilon$. Ces inégalités valables pour tout t impliquent l'inégalité $\int_a^b (K_2 - K_1)\,dt \leq \epsilon$. C'est d'ailleurs essentiellement par cet argument que l'on établit que les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann.

Bref, nous avons démontré le Lemme de Riemann pour les fonctions Riemann-intégrables, avec un argument plus explicite encore pour les fonctions continues (via l'uniforme continuité). Donc nous avons démontré le « Théorème de Dirichlet » en particulier pour les fonctions 2π-périodiques et partout dérivables.

Pour en revenir à notre discussion du Lemme de Riemann, on a par ordre croissant de généralité, pour G à valeurs réelles sur un intervalle $[a, b]$:

1. G est continue (donc uniformément continue) : alors pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver K_1 et K_2 en escalier avec $\forall t\ K_1(t) \leq G(t) \leq K_2(t)$ et $\forall t\ K_2(t) - K_1(t) \leq \frac{1}{b-a}\epsilon$.[36]
2. G est intégrable au sens de Riemann : alors pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver K_1 et K_2 en escalier avec $\forall t\ K_1(t) \leq G(t) \leq K_2(t)$ et $\int_a^b (K_2(t) - K_1(t))\,dt \leq \epsilon$.[37]
3. G est intégrable au sens de Lebesgue : alors pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver K en escalier avec $\int_a^b \Big|G(t) - K(t)\Big|\,dt \leq \epsilon$.

Le dernier point nécessite de la part des Professeurs courageux qui veulent l'établir une discussion précise et assez approfondie de l'intégrale de Lebesgue. Je n'en dis pas plus ici.[38]

Le Lemme de Riemann vaut donc aussi pour les fonctions intégrables au sens de Lebesgue, et dans ce contexte il s'appelle Lemme de Riemann-Lebesgue, et il est alors aussi valable pour un intervalle de longueur infini[39]. Il prend donc la forme suivante :

36. les fonctions avec cette propriété sont appelées fonctions réglées. On prouve qu'une fonction est réglée si et seulement si elle admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche (ce qui confirme que les fonctions continues sont réglées). Voir la présentation de l'intégrale de Riemann sur le site de l'auteur.

37. cette propriété caractérise l'intégrabilité au sens de Riemann.

38. ne pas confondre la classe des fonctions en escalier avec la classe plus grande des fonctions dites *étagées* ou *simples* qui sont par définition les fonctions mesurables ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

39. avec l'intégrale de Lebesgue on n'est plus limité à un intervalle d'intégration de longueur finie. Je rappelle qu'en théorie de Riemann les intégrales sur des intervalles infinis sont dites généralisées, ou impropres,

$$\textit{si } \int_{\mathbf{R}} |f(t)|\, dt < \infty \textit{ alors } \lim_{|\lambda|\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f(t) {\cos \atop \sin}(\lambda t)\, dt = 0.$$

Exercice : la fonction log n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $]0,1]$ puisqu'elle n'est pas bornée. Cependant elle est intégrable au sens de Lebesgue (puisque $\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 |\log(t)|dt = 1 < \infty$). Prouver

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^1 \log(t)\cos(\lambda t)\, dt = 0$$

sans faire appel au lemme de Riemann-Lebesgue (ind. : intégrer par parties $\int_\epsilon^1$.)

8.4 L'équation différentielle $y'' + y = 0$

Théorème 19 *Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction à valeurs réelles ou complexes sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbf{R}$. Si*

$$\forall x \in I \quad f''(x) = -f(x)\ ,$$

alors il existe deux constantes (uniques, réelles si f est à valeurs réelles) A et B dans $\mathbf{C}$ telles que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

Pour la preuve je vais supposer $I = \mathbf{R}$ et je vous laisse faire pour un intervalle ouvert quelconque. Les coefficients A et B sont uniques puisque l'on doit avoir $f(0) = A$, $f'(0) = B$.

Certainement f est continue puisque par hypothèse f est deux fois dérivable. Comme $f'' = -f$, f est de classe C^2 (évidemment en itérant on voit qu'elle est en réalité infiniment dérivable). On a la formule (cas particulier de la formule de Taylor avec reste intégral de Lagrange) :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)\, dt\ .$$

On ne va pas appliquer cette formule à f mais plutôt à $g(x) = f(x) - A\cos(x) - B\sin(x)$ avec $A = f(0)$ et $B = f'(0)$. En effet cette fonction g vérifie elle aussi l'équation $g'' = -g$ et de plus $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$. Donc :

$$g(x) = \int_0^x (x-t)g''(t)\, dt = -\int_0^x (x-t)g(t)\, dt$$

ce sont des limites d'intégrales sur des intervalles de longueurs finies, il n'y a pas de définition directe. C'est aussi le cas pour les fonctions non bornées sur un intervalle de longueur finie. La théorie de Riemann est une théorie de l'intégration de fonctions bornées sur un intervalle borné.

Notons $M(x) = \sup\{|g(t)| \mid |t| \leq |x|\}$. Par continuité de g on a $M(x) < \infty$ pour tout x. La fonction M est paire. Elle est croissante sur $[0, \infty[$. On écrit :

$$|g(x)| \leq \left| \int_0^x |x - t| M(x)\, dt \right| = M(x) \int_0^{|x|} u\, du = \frac{1}{2} M(x) x^2$$

Si $|y| \leq |x|$ alors $|g(y)| \leq \frac{1}{2} M(y) y^2 \leq \frac{1}{2} M(x) x^2$. Donc en passant au sup, on trouve :

$$\forall x \qquad M(x) \leq \frac{1}{2} M(x) x^2$$

Prenons en particulier $x = 1$. On obtient $M(1) \leq \frac{1}{2} M(1)$. Donc $M(1) = 0$. Donc g est identiquement nulle sur l'intervalle $[-1, +1]$. Mais alors $g(1) = g'(1) = 0$. On peut alors appliquer ce qui précède à $g_1(x) = g(1 + x)$, puis à $g_2(x) = g(2 + x)$, etc..., et montrer par récurrence que g est identiquement nulle sur $[n - 1, n + 1]$. Donc g est identiquement nulle sur $[-1, \infty[$. On fait de même pour $]-\infty, +1]$ (ou on applique ce qui précède à $g(-x)$). Donc g est identiquement nulle et $f(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$ ce qu'il fallait démontrer.

