Mathématiques — Licence (S6)
Année 2004–2005
« Séries de Fourier et Espaces de Hilbert »
Présentation du cours et Examens

Ce polycopié comporte :

(1) un très bref résumé du cours,

(2) une présentation distribuée aux étudiants,

(3) ~~100 exercices pour les travaux dirigés~~,

(4) ~~des annexes sur~~ :

   (a) ~~l'intégrale de Riemann~~,

   (b) ~~les convergences dominée et monotone~~,

   (c) ~~le théorème de Cantor-Lebesgue~~,

   (d) ~~les familles sommables~~,

   (e) ~~les mesures signées et complexes~~,

   (f) ~~le phénomène de Gibbs~~.

(5) un sujet d'examen de mi-semestre et son corrigé,

(6) un sujet d'examen de fin de semestre,

(7) un deuxième sujet d'examen de fin de semestre, deux semaines après (vive le LMD !).

Jean-François Burnol.

31 mai 2005.

23 mai 2006 : je ne laisse subsister que les documents de **présentation du cours** et les **sujets d'examens.** Je renvoie le lecteur à ma page « enseignement » sur la toile [1] pour le polycopié de l'année 2005–2006 qui contient la version actuelle des exercices et des annexes, ainsi que de nombreux nouveaux compléments de cours.

1. qui est au jour d'aujourd'hui `jf.burnol.free.fr/ens.html`

page suivante, svp

« SÉRIES DE FOURIER ET ESPACES DE HILBERT »

JEAN-FRANÇOIS BURNOL

Ce cours se destine aux étudiants ayant acquis les notions de base de l'intégrale de Lebesgue. Son objectif principal est d'établir le théorème de Riesz-Fischer. Nous commençons avec une présentation des théorèmes classiques de la théorie des séries de Fourier : convolutions, noyaux de Dirichlet et de Fejér, théorème de Fejér pour les fonctions continues, inégalité de Bessel, propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique des séries de Fourier, lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions Riemann-intégrables, théorème de localisation de Riemann, théorème de Dirichlet (local, global avec hypothèse C^1 par morceaux, global avec hypothèse de monotonie par morceaux), fonctions infiniment dérivables ; puis nous montrons la densité dans L^1 et L^2 des fonctions en escaliers et des fonctions continues, le Lemme de Riemann-Lebesgue général, le théorème de Fejér dans L^1, le théorème d'unicité, l'égalité de Fatou-Parseval ; ensuite nous exposons la théorie de base des espaces de Hilbert : formes bilinéaires et hermitiennes, sous-espace isotrope, produits scalaires euclidiens et hermitiens, inégalité de Cauchy-Schwarz, projections orthogonales, systèmes et bases orthonormés, orthogonalisation de Gram-Schmidt, caractère hilbertien de l'espace l^2 ; enfin nous définissons les espaces $\mathcal{L}^2(X, \mu)$, $L^2(X, \mu)$, et nous prouvons le théorème de Riesz-Fischer pour tout espace mesuré, et aussi dans sa forme plus classique identifiant via les séries de Fourier et la notion de base orthonormée l'espace de Hilbert $L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ à l'espace de Hilbert $l^2(\mathbf{Z})$. Les feuilles d'exercices comportent des ouvertures sur des thèmes tels que : fonctions absolument continues, fonctions à variation bornée, sommation d'Abel et critère de Dirichlet, deuxième formule de la moyenne, théorèmes taubériens, dualité pour les groupes abéliens localement compacts, théorème de Fréchet-Riesz... ; par ailleurs des annexes donnent des exposés se suffisant en eux-mêmes sur l'intégrale de Riemann, le théorème de la convergence monotone, celui de la convergence dominée, les familles sommables, le phénomène de Gibbs.

(**1**) L'idée de Fourier. Le système trigonométrique. Les formules de la théorie de Fourier. Séries de Fourier « complexes ». Convolutions et coefficients de Fourier. Noyau de Dirichlet. Théorème de convergence en un point de dérivabilité (Riemann-Lebesgue admis pour le moment). Principe de localisation de Riemann.

(**2**) Moyenne de Cesàro. Noyau de Fejér. Théorème de Fejér (convergence ponctuelle, convergence uniforme). Théorème d'unicité pour les fonctions continues. Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques.

(**3**) La propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique. Inégalité de Bessel. Riemann-Lebesgue pour les fonctions R-intégrables. Parseval pour les fonctions continues. Si on peut approcher f au sens L^2 par des fonctions en escalier alors on a Parseval pour f.

(4) Preuve de l'approximation au sens L^1 ou L^2 des fonctions (Lebesgue)-intégrables par des fonctions en escalier. Identité de Parseval. Lemme de Riemann-Lebesgue en général. Continuité des translations.

(5) Convergence au sens L^1 (et L^2) des sommes de Fejér. Unicité, pour les fonctions Lebesgue-intégrables générales. Convergence uniforme et forme forte du principe de localisation. Relation entre coefficients de Fourier pour f et pour f'. Convergence uniforme pour les fonctions C^1.

(6) L'intégrale de Dirichlet. Le (vrai) théorème de Dirichlet.

(7) Espaces hermitiens, inégalité de Cauchy-Schwarz, notion d'orthogonalité. Procédé de Gram-Schmidt. Projection orthogonale sur un espace de dimension finie. Matrice de Gram.

(8) L'espace de Hilbert l^2. Il est complet. Espaces de Hilbert en général. Projection orthogonale sur un sous-espace fermé, sur un convexe fermé. Complément perpendiculaire. Double complément.

(9) Systèmes orthonormés, bases orthonormées. Le dual d'un espace de Hilbert.

(10) Espaces $\mathcal{L}^2(X, \mu), L^2(X, \mu)$ associés à un espace mesuré. Le théorème de Riesz-Fischer dans ce contexte. Le théorème de Riesz-Fischer historique.

(11) Récapitulation de résultats connus identifiant des classes de fonctions via leurs coefficients de Fourier. Énoncé du théorème de Riesz-Herglotz.

Université Lille 1 - UFR de Mathématiques
Troisième année de Licence - MATH 312 - 2004/2005

PRÉSENTATION DU COURS

Ce module porte le nom d'<< Analyse Hilbertienne >>. Et en effet un de nos objectif principaux sera d'établir le << théorème de Riesz-Fischer >>, où il est question entre autres d'<< espaces de Hilbert >>. Donc une bonne partie du cours sera consacrée aux espaces de Hilbert, enfin, à leurs aspects les plus simples. Si vous consultez à la bibliothèque un livre où il est question, dans le titre ou la table des matières, d'Analyse Hilbertienne, vous verrez que ce que l'on entend par là en général c'est la << théorie spectrale pour les opérateurs >>, et si le livre est bon, ou un peu ancien, il y sera beaucoup question d'opérateurs intégraux, de théorie de Hilbert-Schmidt, d'alternative de Fredholm, peut-être encore d'analyse harmonique, et si le livre est vraiment très bon il y sera question de Physique, toutes choses que nous n'aborderons pas, ou à peine, dans ce cours.

En fait, nous nous contenterons d'une démarche moins ambitieuse dans laquelle la notion d'espace de Hilbert ne sera principalement motivée que par l'identité de Parseval dans la théorie des séries de Fourier ; la théorie des séries de Fourier est dans son développement historique comme dans sa situation actuelle intimement liée aux théories de l'intégration. Le << théorème de Riesz-Fischer >> dans ce contexte est quelque chose qui nous dit que l'intégrale de Lebesgue est formidable.

Donc ce cours est un cours d'approfondissement de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Mais attention, nous ne re-ferons pas la théorie de l'intégrale de Lebesgue. Vous devrez vous efforcer de compléter vos connaissances par vous-mêmes. Vous avez quelques semaines de délai pour cela, puisqu'au début on n'en fera pas un usage essentiel. Mais dans la deuxième moitié du semestre, il faudra en maîtriser les notions fondamentales sinon vous ne pourrez plus suivre.

Ainsi le plan est de commencer par un ré-examen de la théorie de base des séries de Fourier avec des théorèmes de Dirichlet, Riemann, Fejèr, et en particulier l'identité de Parseval ; puis nous étudierons les espaces de Hilbert (pas de théorie des opérateurs, mais systèmes orthogonaux, projections orthogonales, formules de Gram), et enfin nous prouverons le théorème de Riesz-Fischer, sous sa forme originelle << $L^2 \simeq l^2$ >> comme dans sa version qui est un peu moins précise tout en se prétendant plus générale : << $L^2(X, \mu)$ est complet >>.(*)

(*)si il y a le temps on pourrait parler aussi des espaces << L^p >>.

L i v r e s : l'activité mathématique implique le fonctionnement de l'organe que l'on appelle cerveau et qui chez nous contrairement à chez d'autres espèces animales autorise la lecture. Il serait dommage de ne pas en profiter. Donc je vous encourage vivement, comme d'habitude, à aller voir ce qui est disponible à la Bibliothèque. Il n'y a pas semble-t-il de référence exactement adaptée au plan que j'ai esquissé. D'une manière générale les livres développant la théorie des espaces de Hilbert vous seront utiles mais probablement uniquement par leurs premiers et, peut-être, seconds chapitres (on n'ira pas beaucoup plus loin que les notions liées aux systèmes orthonormaux et aux projections orthogonales) ; les livres portant sur la théorie de la mesure et de l'intégration seront utiles, et il faudra déjà en maîtriser une bonne partie (il y est probablement question du théorème de Riesz-Fischer sous la forme << L^2 est complet >> avec une discussion des séries de Fourier plus brève que celle envisagée pour ce cours). Enfin les livres d'analyse harmonique, d'analyse de Fourier, pourraient vous rendre service, mais il n'est pas prévu de parler de la transformation intégrale de Fourier dans ce cours, donc seuls les chapitres sur les séries de Fourier apparaîtront comme directement reliés au cours.

> J'insiste sur le fait que même si au début du semestre il n'est pas trop question de l'intégrale de Lebesgue, rapidement elle deviendra très importante. Ce module ne peut donc certainement pas être suivi par un(e) étudiant(e) n'ayant pas acquis préalablement les notions du cours sur la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Je signale un peu au hasard l'ouvrage de Guichardet << Intégration et Analyse Hilbertienne >> (515-7 GUI). Vous me direz si il est bon sur l'intégration ; sur l'analyse hilbertienne c'est un des livres qui permettraient aux plus intéressés d'aller bien au-delà de ce que nous ferons. Je cite aussi le petit fascicule << Séries, séries entières, séries de Fourier >> de R. Dupont (515-243 DUP) qui pourrait vous être directement utile au début du semestre, si vous n'êtes pas offusqué(e)s d'aller consulter un ouvrage de << premier cycle >> (c'est-à-dire, le premier cycle des années quatre-vingt-dix ; en fait nous démontrerons ce qui est énoncé sans preuve dans ce fascicule, et vous devrez comprendre et pouvoir reproduire ces démonstrations). Attention au fait que ce sont les notations et définitions du cours qui l'emportent sur ce qui peut être fait dans les livres.

> Je ne peux que rappeler encore une fois l'importance essentielle de travailler les feuilles d'exercices qui vous sont distribuées, avant, pendant, après les heures de TDs.

EXAMEN DU 31 MARS 2005
durée : 2 heures
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés

Problème

On rappelle les formules

$$D_n(x) = \sum_{-n\leq k\leq n} e^{ikx} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$F_n(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_{n-1}(x)}{n} = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{n\sin^2(\frac{x}{2})} \qquad (n \geq 1)$$

$$\sum_{0\leq j<n} j = 1 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\sum_{0\leq j<n} j^2 = 1^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(2n^2-3n+1)}{6} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

On pourra à chaque question admettre les résultats des précédentes.

1. Exprimer $D_n(x)$ en fonction des $\cos(kx)$, $0 \leq k \leq n$, et justifier les inégalités $D_n(x) \leq D_n(0)$ et $0 \leq F_n(x) \leq F_n(0)$.

2. Montrer $0 \leq F_N(x) \leq \min(N, \frac{1}{N}\frac{\pi^2}{x^2})$ pour tout $x \in]0, \pi]$ et tout $N \geq 1$.

3. On considère un polynôme trigonométrique $P(x)$ du type $\sum_{0\leq k\leq N} v_k \cos(kx)$. Montrer $\int_{-\pi}^{\pi} P^2(x) \frac{dx}{2\pi} = v_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq k\leq N} v_k^2$.

4. Que valent les v_k dans l'expression $F_N(x) = \sum_{0\leq k\leq N} v_k \cos(kx)$? (ils dépendent aussi de N)

5. On note $\lambda_N = \int_{-\pi}^{\pi} F_N^2(x) \frac{dx}{2\pi}$. Prouver $\lambda_N = \frac{2}{3}N + \frac{1}{3}\frac{1}{N}$.

6. On pose $K_N(x) = \frac{1}{\lambda_N} F_N^2(x)$. Que vaut $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x) \frac{dx}{2\pi}$? Prouver pour tout $x \in]0, \pi]$ et tout $N \geq 1$:

$$0 \leq K_N(x) \leq \min(\frac{3}{2}N, \frac{3}{2N^3}\frac{\pi^4}{x^4})$$

-LA SUITE AU VERSO-

7. Prouver (on considérera séparément $0 \le x \le \frac{\pi}{N}$ et $\frac{\pi}{N} \le x \le \pi$) :

$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)|x|\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K_N(x)x\,dx \le \frac{3\pi}{2N}$$

8. On rappelle que l'on dit d'une fonction f qu'elle est Λ-Lipschitzienne si $\forall u, v\ |f(u) - f(v)| \le \Lambda|u - v|$. Soit f une fonction 2π-périodique et Λ-Lipschitzienne. Montrer :

$$\forall N \ge 1 \qquad |(K_N * f)(0) - f(0)| \le \frac{3\pi\Lambda}{2N}$$

9. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. Montrer :

$$\forall N \ge 1\ \forall x \qquad |(K_N * f)(x) - f(x)| \le \frac{3\pi \sup|f'|}{2N}$$

10. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. En utilisant le résultat précédent, montrer(*) :

$$\|D_N * f - f\|_2 = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$$

11. Donner une autre preuve, qui n'utilise pas les résultats précédents, de $\|D_N * f - f\|_2 = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$ pour f 2π-périodique et de classe C^1. Montrer d'ailleurs par cette autre preuve le résultat plus fin $\|D_N * f - f\|_2 = o(\frac{1}{N})$.

12. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. Montrer :

$$\|F_N * f - f\|_\infty = \mathcal{O}(\frac{\log N}{N}) .$$

On n'aura pas besoin des résultats précédents, mais il s'agit d'adapter aux noyaux de Fejér F_N la méthode qui a été suivie ici pour les noyaux K_N.(**)

Exercice

On considère une fonction 2π-périodique f qui vaut e^x pour $0 < x < 2\pi$.

13. Déterminer les coefficients $c_k \in \mathbb{C}$ de sa série de Fourier $\sum c_k e^{ikx}$.

14. En déduire la formule $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi}$.

(*) il s'agit bien de D_N et non pas K_N dans la formule. On rappelle que $u_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ signifie $\exists C\ \forall n \ge 1\ |u_n| \le \frac{C}{n}$. Et $\|g\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}}$.

(**) ce résultat améliore considérablement le $\mathcal{O}(N^{-\frac{1}{3}})$ qui avait été obtenu en Cours par une méthode plus grossière. On rappelle que $\|g\|_\infty$ est la borne supérieure essentielle qui, lorsque g est continue, coïncide avec $\sup|g|$.

| Université Lille 1 - UFR de Mathématiques |
| Troisième année de Licence - MATH 312 - 2004/2005 |

EXAMEN DU 31 MARS 2005
durée : 2 heures
CORRIGÉ - CORRIGÉ - CORRIGÉ

Problème

On rappelle les formules

$$D_n(x) = \sum_{-n\le k\le n} e^{ikx} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$F_n(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_{n-1}(x)}{n} = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{n\sin^2(\frac{x}{2})} \qquad (n \ge 1)$$

$$\sum_{0\le j<n} j = 1 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\sum_{0\le j<n} j^2 = 1^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(2n^2-3n+1)}{6} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

On pourra à chaque question admettre les résultats des précédentes.

1. Exprimer $D_n(x)$ en fonction des $\cos(kx)$, $0 \le k \le n$, et justifier les inégalités $D_n(x) \le D_n(0)$ et $0 \le F_n(x) \le F_n(0)$.

(1 pt) On a $D_n(x) = \sum_{-n\le k\le n} e^{ikx} = 1 + \sum_{1\le k\le n}(e^{ikx} + e^{-ikx}) = 1 + 2\sum_{1\le k\le n}\cos(kx)$. Donc $D_n(x) \le 1 + 2\sum_{1\le k\le n} 1 = 1 + 2n = D_n(0)$. En prenant la moyenne des $D_k(x) \le D_k(0)$ pour $0 \le k < n$ on obtient $F_n(x) \le F_n(0)$. De plus $F_n(x) \ge 0$ par la formule $\frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{n\sin^2(\frac{x}{2})}$ (valable telle quelle pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et par continuité en $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui donne $F_n(x) = F_n(0) = n$).

2. Montrer $0 \le F_N(x) \le \min(N, \frac{1}{N}\frac{\pi^2}{x^2})$ pour tout $x \in]0,\pi]$ et tout $N \ge 1$.

(1 pt) On a $F_N(0) = N$, et donc $F_N(x) \le N$ pour tout x, par la question précédente. Pour $0 < x \le \pi$ on a $0 < \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{2}$. En utilisant l'inégalité connue $\sin(y) \ge \frac{2}{\pi}y$ pour $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ (inégalité qui découle de la concavité de sinus sur cet intervalle), on a $\sin(\frac{x}{2}) \ge \frac{2}{\pi}\frac{x}{2} = \frac{x}{\pi}$ pour $0 < x \le \pi$ d'où

$0 \leq F_N(x) \leq \frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} \leq \frac{1}{N}\frac{\pi^2}{x^2}$. Les deux majorations combinées donnent $F_N(x) \leq \min(N, \frac{1}{N}\frac{\pi^2}{x^2})$.

3. On considère un polynôme trigonométrique P(x) du type $\sum_{0\leq k\leq N} v_k \cos(kx)$. Montrer $\int_{-\pi}^{\pi} P^2(x)\frac{dx}{2\pi} = v_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq k\leq N} v_k^2$.

(1 pt) L'intégrale en question vaut

$$\sum_{0\leq k\leq N}\ \sum_{0\leq l\leq N} v_k v_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)\frac{dx}{2\pi}$$

On a $\cos(kx)\cos(lx) = \frac{1}{2}(\cos((k+l)x) + \cos((k-l)x))$. Comme $k \geq 0$ et $l \geq 0$ on a $k + l > 0$ sauf pour $k = l = 0$, donc sauf dans ce cas la contribution de $\cos((k+l)x)$ est nulle ; et par ailleurs celle du terme comportant $\cos((k-l)x)$ sera nulle pour $k \neq l$ et aura pour valeur $\frac{1}{2}v_k^2$ pour $k = l$. D'où la formule demandée.

4. Que valent les v_k dans l'expression $F_N(x) = \sum_{0\leq k\leq N} v_k \cos(kx)$? (ils dépendent aussi de N)

(1 pt) On peut rédiger cela de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N}\sum_{0\leq j<N}(1 + 2\sum_{1\leq k\leq j}\cos(kx)) \\ &= 1 + 2\frac{1}{N}\sum_{1\leq k\leq j<N}\cos(kx) \\ &= 1 + 2\frac{1}{N}\sum_{1\leq k<N}(N-k)\cos(kx) \end{aligned}$$

car $\sum_{k\leq j<N} 1 = N - k$ lorsque $k \leq N$. Ainsi $v_0 = 1$ et $v_k = 2(1 - \frac{k}{N})$ pour $1 \leq k \leq N$ (on a inclus $k = N$ mais de toute façon son coefficient est nul).

5. On note $\lambda_N = \int_{-\pi}^{\pi} F_N^2(x)\frac{dx}{2\pi}$. Prouver $\lambda_N = \frac{2}{3}N + \frac{1}{3}\frac{1}{N}$.

(1 pt) En tenant compte des deux dernières questions, on obtient $\lambda_N = 1 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq k\leq N} 4(1 - \frac{k}{N})^2 = 1 + \frac{2}{N^2}\sum_{1\leq k\leq N}(N-k)^2 = 1 + \frac{2}{N^2}\sum_{0\leq m\leq N-1} m^2 = 1 + \frac{2}{N^2}\frac{N(2N^2-3N+1)}{6} = 1 + \frac{2N^2-3N+1}{3N} = \frac{2N^2+1}{3N} = \frac{2}{3}N + \frac{1}{3}\frac{1}{N}$.

6. On pose $K_N(x) = \frac{1}{\lambda_N}F_N^2(x)$. Que vaut $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\frac{dx}{2\pi}$? Prouver pour tout $x \in]0, \pi]$ et tout $N \geq 1$:

$$0 \leq K_N(x) \leq \min(\frac{3}{2}N, \frac{3}{2N^3}\frac{\pi^4}{x^4})$$

(1 pt) L'intégrale vaut 1 ; et aussi il est clair que $K_N(x) \geq 0$ pour tout x. On

observe ensuite que $\lambda_N \geq \frac{2}{3}N$, et donc $0 < \lambda_N^{-1} \leq \frac{3}{2N}$. Ainsi, par la question 2 : $0 \leq K_N(x) \leq \frac{3}{2N}\min(N^2, \frac{1}{N^2}\frac{\pi^4}{x^4}) = \min(\frac{3}{2}N, \frac{3}{2N^3}\frac{\pi^4}{x^4})$.

7. Prouver (on considérera séparément $0 \leq x \leq \frac{\pi}{N}$ et $\frac{\pi}{N} \leq x \leq \pi$) :

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)|x|\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K_N(x)x\,dx \leq \frac{3\pi}{2N}$$

(1 pt) La fonction $K_N(x)|x|$ est paire donc $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)|x|\frac{dx}{2\pi} = 2\int_0^{\pi} K_N(x)|x|\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K_N(x)xdx$. Notons A_N l'intégrale sur $[0, \frac{\pi}{N}]$ et B_N celle sur $[\frac{\pi}{N}, \pi]$. On a par la question 6 :

$$A_N \leq \frac{1}{\pi}\frac{3}{2}N\int_0^{\frac{\pi}{N}} xdx = \frac{3N}{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{N^2} = \frac{3\pi}{4N}$$
$$B_N \leq \frac{1}{\pi}\frac{3\pi^4}{2N^3}\int_{\frac{\pi}{N}}^{\pi}\frac{1}{x^3}dx \leq \frac{3\pi^3}{2N^3}\frac{1}{2}\frac{1}{(\pi/N)^2} = \frac{3\pi}{4N} ,$$

et donc $A_N + B_N \leq \frac{3\pi}{2N}$.

8. On rappelle que l'on dit d'une fonction f qu'elle est Λ-Lipschitzienne si $\forall u, v$ $|f(u) - f(v)| \leq \Lambda|u - v|$. Soit f une fonction 2π-périodique et Λ-Lipschitzienne. Montrer :

$$\forall N \geq 1 \qquad |(K_N * f)(0) - f(0)| \leq \frac{3\pi\Lambda}{2N}$$

(1,5 pts) En effet $(K_N * f)(0) = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(-t)f(t)\frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)f(t)\frac{dt}{2\pi}$ car K_N est paire. De plus comme $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$ on a $f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)f(0)\frac{dt}{2\pi}$, ainsi

$$(K_N * f)(0) - f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)(f(t) - f(0))\frac{dt}{2\pi} .$$

Il suffit alors d'utiliser $|f(t) - f(0)| \leq \Lambda|t|$ et la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)|t|\frac{dt}{2\pi}$ déterminée à la question 7 pour conclure.

9. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. Montrer :

$$\forall N \geq 1 \;\; \forall x \qquad |(K_N * f)(x) - f(x)| \leq \frac{3\pi \sup|f'|}{2N}$$

(1,5 pts) Par le théorème des accroissements finis, la fonction est Λ-Lipschitzienne avec $\Lambda = \sup|f'|$. Donc par la question précédente : $|(K_N * f)(0) - f(0)| \leq \frac{3\pi\sup|f'|}{2N}$. Soit x_0 fixé et considérons la fonction $g(x) = f(x_0 + x)$, de sorte que $g(0) = f(x_0)$. On fait la remarque que $(K_N * g)(0) = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(-t)g(t)\frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(-t)f(x_0 + t)\frac{dt}{2\pi} = (K_N * f)(x_0)$. De plus la fonction g est aussi Λ-Lipschitzienne avec $\Lambda = \sup|f'|$. Donc, pour tout x_0 on a aussi $|(K_N * f)(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{3\pi \sup|f'|}{2N}$.

10. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. En utilisant le résultat précédent, montrer$^{(*)}$:

$$\|D_N * f - f\|_2 = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$$

(3 pts) Observons tout d'abord que $K_N = \lambda_N^{-1} F_N^2$ est un polynôme trigonométrique de degré $2(N-1)$ ($F_N(x) = \frac{1}{N}e^{-i(N-1)x} + \dots + \frac{1}{N}e^{i(N-1)x}$, donc son carré est de la forme $\frac{1}{N^2}e^{-i2(N-1)x} + \dots + \frac{1}{N^2}e^{2i(N-1)x}$). Par la propriété de meilleure approximation de f en moyenne quadratique par les sommes partielles de sa série de Fourier, on a donc, pour tout $N \geq 1$: $\|D_{2N-2} * f - f\|_2 \leq \|K_N * f - f\|_2$. Par ailleurs pour toute fonction bornée 2π-périodique g on a $\|g\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}} \leq \sup|g|$. Donc $\|K_N * f - f\|_2 \leq \frac{3\pi \sup|f'|}{2N}$ pour f de classe C^1, par la question précédente. Soit M pair et $N = 1 + \frac{M}{2}$, ou M impair et alors $N = 1 + \frac{M-1}{2}$. Dans les deux cas on a $M \geq 2(N-1)$ donc $\|D_M * f - f\|_2 \leq \|D_{2N-2} * f - f\|_2 \leq \|K_N * f - f\|_2 \leq \|K_N * f - f\|_\infty \leq \frac{3\pi \sup|f'|}{2N}$. Le N choisi vérifie $N \geq \frac{M}{2}$ et donc pour $M \geq 1$: $\|D_M * f - f\|_2 \leq \frac{3\pi \sup|f'|}{M} = \mathcal{O}(\frac{1}{M})$.

11. Donner une autre preuve, qui n'utilise pas les résultats précédents, de $\|D_N * f - f\|_2 = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$ pour f 2π-périodique et de classe C^1. Montrer d'ailleurs par cette autre preuve le résultat plus fin $\|D_N * f - f\|_2 = o(\frac{1}{N})$.

(3 pts) On sait par le cours sur l'égalité de Parseval que

$$\|D_N * f - f\|_2^2 = \sum_{|k|>N} |c_k(f)|^2$$

De plus on a la relation connue $c_k(f') = ikc_k(f)$ d'où :

$$\|D_N * f - f\|_2^2 = \sum_{|k|>N} \frac{1}{k^2}|c_k(f')|^2 \leq \frac{1}{N^2} \sum_{|k|>N} |c_k(f')|^2 .$$

On a supposé $N \geq 1$. Par l'inégalité de Bessel pour f' (elle est continue, donc de carré intégrable) on sait $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f')|^2 < \infty$. On a ainsi :

$$\|D_N * f - f\|_2 \leq \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{|k|>N} |c_k(f')|^2} \leq \frac{C}{N} = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$$

avec $C = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f')|^2}$ ($= \|f'\|_2$ par l'identité de Parseval). Compte tenu du fait que $\lim_{N\to\infty} \sum_{|k|>N} |c_k(f')|^2 = 0$ (valable pour toute série convergente), on a même $\lim N\|D_N * f - f\|_2 = 0$ c'est-à-dire $\|D_N * f - f\|_2 = o(\frac{1}{N})$.

$^{(*)}$il s'agit bien de D_N et non pas K_N dans la formule. On rappelle que $u_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ signifie $\exists C\ \forall n \geq 1\ |u_n| \leq \frac{C}{n}$. Et $\|g\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}}$.

12. Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. Montrer :

$$\|F_N * f - f\|_\infty = \mathcal{O}(\frac{\log N}{N}) \ .$$

On n'aura pas besoin des résultats précédents, mais il s'agit d'adapter aux noyaux de Fejér F_N la méthode qui a été suivie ici pour les noyaux K_N.(*)

(3 pts) Notons $A_N = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{N}} F_N(x)x dx$ et $B_N = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{N}}^{\pi} F_N(x)x dx$. On a, par les inégalités de la question 2 :

$$A_N \leq \frac{1}{\pi} N \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{N^2} = \frac{\pi}{2N}$$
$$B_N \leq \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{N}\int_{\frac{\pi}{N}}^{\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{N}\log(N)$$

donc $A_N + B_N \leq \frac{\pi(1+2\log(N))}{2N}$. On a par ailleurs

$$(F_N * f)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)(f(x-t) - f(x))\frac{dt}{2\pi} \qquad \text{donc :}$$

$$|(F_N * f)(x) - f(x)| \leq \sup|f'| \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)|t|\frac{dt}{2\pi} \leq \frac{\pi(1+2\log(N))\sup|f'|}{2N}$$

et ainsi $\|F_N * f - f\|_\infty = \mathcal{O}(\frac{\log N}{N})$. Ceci termine la preuve.

Nous ajoutons qu'un raisonnement plus poussé permet de transformer le $\mathcal{O}$ en un o : nous venons d'établir qu'il existe une constante absolue C telle que pour tout $N \geq 2$ et toute f de classe C^1 on a

$$\|F_N * f - f\|_\infty \leq C\frac{\log N}{N}\|f'\|_\infty \ .$$

La fonction continue f' peut être approchée à ϵ près par un polynôme trigonométrique $Q(x) = \sum_{|k|\leq m} u_k e^{ikx}$: $\|f' - Q\|_\infty \leq \epsilon$. On a donc aussi $|\int_0^{2\pi} f'(x)\frac{dx}{2\pi} - \int_0^{2\pi} Q(x)\frac{dx}{2\pi}| \leq \epsilon$, or la première intégrale est nulle et la deuxième est u_0. Donc $|u_0| \leq \epsilon$. Donc on remplace Q par $Q_0 = Q - u_0$, et alors $\|f' - Q_0\|_\infty \leq 2\epsilon$. L'avantage de Q_0 c'est qu'on peut l'écrire comme la dérivée du polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{0<|k|\leq m}\frac{u_k}{ik}e^{ikx}$. On a ainsi $\|f' - P'\|_\infty \leq 2\epsilon$. On écrit :

$$\|F_N * f - f\|_\infty \leq \|F_N * (f-P) - (f-P)\|_\infty + \|F_N * P - P\|_\infty$$
$$\leq C\frac{\log N}{N}\|f' - P'\|_\infty + \|F_N * P - P\|_\infty \ ,$$

(*) ce résultat améliore considérablement le $\mathcal{O}(N^{-\frac{1}{3}})$ qui avait été obtenu en Cours par une méthode plus grossière. On rappelle que $\|g\|_\infty$ est la borne supérieure essentielle qui, lorsque g est continue, coïncide avec $\sup|g|$.

puis en observant que $\|F_N * P - P\|_\infty = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$ (la justification suit) on obtient : $\limsup \frac{N}{\log N}\|F_N * f - f\|_\infty \leq C \, \|f' - P'\|_\infty \leq 2C\epsilon$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on ainsi prouvé

$$\limsup \frac{N}{\log N}\|F_N * f - f\|_\infty = 0 \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. Il reste à étudier $\|F_N * P - P\|_\infty$ pour un polynôme trigonométrique P. Pour $n \geq m$ (avec m le degré de P) on a $D_n * P = P$. Donc pour $N \geq m$ on a $F_N * P = \frac{1}{N}(P_0 + P_1 + \cdots + P_{m-1} + (N-m)P)$, avec la notation $P_k = D_k * P$. Donc $F_N * P - P = \frac{1}{N}\left(P_0 + \cdots + P_{m-1} - mP\right)$, et ainsi

$$\|F_N * P - P\|_\infty \leq \frac{1}{N}\left(\sum_{0\leq k<m} \|P_k - P\|_\infty\right) = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$$

ce qui complète la preuve de l'amélioration de l'inégalité de l'énoncé.

E x e r c i c e

On considère une fonction 2π-périodique f qui vaut e^x pour $0 < x < 2\pi$.

13. Déterminer les coefficients $c_k \in \mathbb{C}$ de sa série de Fourier $\sum c_k e^{ikx}$.

(1 pt) On a $c_k = \int_0^{2\pi} e^{(1-ik)x}\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}[\frac{e^{(1-ik)x}}{1-ik}]_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1-ik)}$.

14. En déduire la formule $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}\pi}{\operatorname{sh}\pi}$.

(1 pt) On applique l'égalité de Parseval :

$$\int_0^{2\pi} e^{2x}\frac{dx}{2\pi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{|1-ik|^2} = \left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+k^2} \ ,$$

d'où :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+k^2} = \frac{e^{4\pi}-1}{4\pi}\frac{4\pi^2}{(e^{2\pi}-1)^2} = \pi\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} = \pi\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} = \frac{\pi \operatorname{ch}\pi}{\operatorname{sh}\pi}$$

On peut aussi à la place appliquer le théorème de Dirichlet en $x = 0$:

$$\frac{1}{2}(e^0 + e^{2\pi}) = \lim_{N\to\infty}\sum_{|k|\leq N}\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1-ik)} = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{|k|\leq N}\frac{1+ik}{1+k^2} \ ,$$

dont on prend la partie réelle :

$$\frac{e^{2\pi}+1}{2}\frac{2\pi}{e^{2\pi}-1} = \lim_{N\to\infty}\sum_{|k|\leq N}\frac{1}{1+k^2}$$

d'où la formule demandée.

```
----------------------------------------------------------------------
|        U n i v e r s i t é  L i l l e  1  -  U F R  d e  M a t h é m a t i q u e s        |
|   T r o i s i è m e  a n n é e  d e  L i c e n c e  -  M A T H  3 1 2  -  2 0 0 4 / 2 0 0 5   |
----------------------------------------------------------------------
```

EXAMEN DU 24 mai 2005

durée : 3 heures

Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés

On pourra à chaque question admettre les résultats des précédentes.

P r o b l è m e I

Dans ce problème on considère une fonction 2π-périodique f qui vérifie

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ 0 & (\pi < x < 2\pi) \end{cases}$$

1. Dessiner un graphe de la fonction f. Par quel théorème peut-on affirmer que $\lim_{N \to \infty} S_N(f)(x)$ existe pour tout x ? Comment faut-il définir f(x) en $x = 0$ et en $x = \pi$ pour que l'égalité $f(x) = \lim S_N(f)(x)$ soit valable en tout x ?

2. Déterminer les coefficients $a_n(f)$ $(n \geq 0)$ et $b_n(f)$ $(n \geq 1)$ de la série de Fourier de f, ainsi que les coefficients $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

4. La série de Fourier (disons, << complexe >>) de f est-elle normalement convergente ?

5. On fixe x et l'on considère la fonction $t \mapsto f_x(t) = f(x - t)$. Dessiner les graphes des fonctions $t \mapsto f_x(t)$ sur $[-2\pi, +2\pi]$, pour $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$, puis les graphes des fonctions $t \mapsto f(t)f(x-t)$, pour $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ et les trois mêmes valeurs de x.

6. Déterminer pour tout x la valeur de $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)f(x-t)dt$.

7. Quelle est (sans nouveaux calculs) la série de Fourier << complexe >> de g ? Est-elle normalement convergente ?

8. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

-LA SUITE AU VERSO-

Problème II

Dans ce problème on considère deux fonctions f et g dans $L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$, et l'on considère que f et g sont 2π-périodiques. On note, pour chaque $N \geq 1$, $f_N(x) = f(Nx)$.

9. Montrer que $c_m(f_N)$ vaut 0 si m n'est pas un multiple de N et que $c_m(f_N) = c_{m/N}(f)$ si m est un multiple de N. Il y a plusieurs méthodes pour cette question ; si vous optez pour un calcul direct, alors vous pourrez admettre que $\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\,m\frac{2\pi k}{N}}$ vaut 0 si m n'est pas un multiple de N et vaut N sinon.

10. Montrer que le produit scalaire (f_N, g) est donné par la formule :

$$(f_N, g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_{Nn}(g)}$$

Pourquoi l'écriture $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ est-elle autorisée ?

11. En remarquant qu'à part $c_0(g)$, seuls des coefficients de Fourier $c_k(g)$ avec $|k| \geq N$ apparaissent dans la formule précédente, prouver ensuite :

$$\left|(f_N, g) - c_0(f)\overline{c_0(g)}\right| \leq \|f\|_2 \, \|g - S_{N-1}(g)\|_2$$

12. En remplaçant g par $\bar{g}$ déduire de ce qui précède $\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi} f(Nx)g(x)\frac{dx}{2\pi}$.

Problème III

Soit $H \subset V = L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ un sous espace vectoriel fermé. On suppose de plus que pour tout $g \in H$ les fonctions $e^{ix}g(x)$ et $e^{-ix}g(x)$ sont aussi dans H, autrement dit que $Q(x)g(x)$ est aussi dans H pour tout polynôme trigonométrique Q. On notera P la projection orthogonale sur H.

13. Soit maintenant $f \in H$ la projection orthogonale $P(1)$ sur H de la fonction constante 1. Montrer que $1 - f$ est perpendiculaire à $e^{inx}f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

14. Justifier que la fonction $(1 - f(x))\overline{f(x)}$ est dans L^1 et a tous ses coefficients de Fourier nuls.

15. Montrer qu'il existe une partie mesurable A telle que $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$ c'est-à-dire (au sens du presque partout) $f(x) = 1$ pour $x \in A$, $f(x) = 0$ pour $x \notin A$.

16. Cette question est un peu plus difficile à traiter avec tous les détails : prouver que H est le sous-espace de V des (classes de) fonctions qui s'annulent (presque partout) sur le complémentaire de A. Et, pour conclure, on établira réciproquement que tout sous espace vectoriel ainsi défini est fermé dans V et est stable par multiplication par $e^{\pm ix}$.

Université Lille 1 - UFR de Mathématiques
Troisième année de Licence - MATH 312 - 2004/2005

L - S6 - MATH 312 - Deuxième Session
durée : 3 heures
Documents et calculatrices ne sont PAS autorisés

On pourra à chaque question admettre les résultats des précédentes.

Problème I

Dans ce problème on considère la fonction 2π-périodique $f(x) = |\sin(x)|$.

1. On rappelle l'identité $2\sin(u)\cos(v) = \sin(v+u) - \sin(v-u)$. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$), et $b_n(f)$ ($n \geq 1$) de f.

2. Justifier la formule, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin(x)| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$.
La série est-elle normalement convergente ?

3. Déduire de la question précédente la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

Problème II

On note $\mathcal{C}^{\infty}_{\text{per}}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques infiniment dérivables.

4. D'une manière générale, lorsqu'une fonction f est de classe C^1 quelle est la relation entre $c_n(f')$ et $c_n(f)$? (justifier). Comment caractérise-t-on sur leurs coefficients de Fourier les fonctions $f \in \mathcal{C}^{\infty}_{\text{per}}$? (ne pas le prouver).

5. On considère une fonction $\phi \in \mathcal{C}^{\infty}_{\text{per}}$ et l'on pose :

$$\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{c_n(\phi)}{2n+1}e^{inx}$$

Montrer que la série est normalement convergente. Quels sont les coefficients de Fourier $c_n(\psi)$ de ψ ? La fonction ψ est-elle infiniment dérivable ?

6. Prouver $\forall x \in \mathbb{R} \quad -2i\psi'(x) + \psi(x) = \phi(x)$.

-LA SUITE AU VERSO-

7. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ (dépendant de ϕ) tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = \left(C + \frac{i}{2} \int_0^x \phi(u) e^{i\frac{u}{2}} du \right) e^{-i\frac{x}{2}}$$

8. En utilisant $\psi(0) = \psi(2\pi)$, prouver l'identité $C = \frac{-i}{4} \int_0^{2\pi} \phi(u)\ e^{i\frac{u}{2}} du$. En observant que $C = \psi(0)$ établir

$$\frac{-i}{4} \int_0^{2\pi} \phi(u)\ e^{i\frac{u}{2}} du = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\phi) \frac{1}{2n+1}$$

On considère maintenant la fonction 2π-périodique $g(u)$ telle que $g(0) = 0$ et

$$g(u) = \frac{\pi i}{2} e^{-i\frac{u}{2}} \qquad \text{pour } 0 < u < 2\pi$$

9. Calculer les coefficients de Fourier $c_n(g)$, $n \in \mathbb{Z}$, et montrer que le résultat de la question précédente est aussi une conséquence de l'identité (sesquilinéaire) de Bessel-Parseval. Que vaut $g(u)$ pour $-2\pi < u < 0$?

10. Prouver que compte tenu de la valeur de C la formule de la question (7) peut se réécrire pour $0 \leq x \leq 2\pi$ sous la forme :

$$\psi(x) = \left(\frac{i}{4} \int_0^x e^{i\frac{u}{2}} \phi(u) du - \frac{i}{4} \int_x^{2\pi} e^{i\frac{u}{2}} \phi(u) du \right) e^{-i\frac{x}{2}} \qquad \text{pour } 0 \leq x \leq 2\pi$$

En déduire l'identité $\psi = g * \phi$.

11. Calculer la fonction $k = g * g$ explicitement. Par ailleurs déterminer les $c_n(k)$. En déduire :

$$0 \leq x \leq 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi(\pi - x)}{4} e^{-i\frac{x}{2}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{(2n+1)^2}$$

Problème III

Dans l'espace de Hilbert $V = L^2(0, 2\pi; \frac{dx}{2\pi})$ on considère le sous-espace vectoriel $H = \{f \in V \mid n < 0 \Longrightarrow (f, e_n) = 0\}$. Comme d'habitude on a noté $e_n(x) = e^{inx}$.

12. Montrer que H est un sous-espace vectoriel fermé et prouver que $(e_n)_{n=0,1,\dots}$ en est une base orthonormée.

13. Déterminer les projections orthogonales des fonctions $f(x) = (2 - e^{ix})^{-1}$ et $g(x) = (1 - 2e^{ix})^{-1}$ sur H.

14. Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ on considère $\Phi_z : V \to \mathbb{C}$, $\Phi_z(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, e_n) z^n$. Trouver l'unique $f_z \in V$ avec $\forall f \in V\ \Phi_z(f) = (f, f_z)$ et déterminer (f_z, f_w) pour tout z, w dans $\mathbb{C}$ tels que $|z| < 1$, $|w| < 1$.

15. Prouver que $H^\perp$ est l'intersection des noyaux des Φ_z, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.