Université des Sciences et Technologies Lille 1
Licence de Mathématiques, S5 (2004/2005)
MATH 305 (Resp. : J.-F. Burnol)

Partiel du 20 novembre 2004 – durée : 2 heures

CORRIGÉ

1

1.1. Les conditions de Cauchy-Riemann sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

1.2. On doit avoir sur U : $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = 2\beta x$. Donc $\beta = 1$ (comme U est ouvert il y a au moins un point dans U avec $x \neq 0$). De plus $\frac{\partial u}{\partial y} = 2\alpha y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2\beta y$, donc $\alpha = -\beta = -1$. Réciproquement si $\alpha = -1$ et $\beta = 1$ les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites (d'ailleurs on a alors $f(z) = z^2$).

1.3. On a $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ donc v ne dépend pas de y, c'est-à-dire, v est une fonction de x seulement : $v(x, y) = B(x)$. On a de plus $\frac{\partial u}{\partial y} = A'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -B'(x)$. Notons $D(x, y)$ cette valeur commune. Comme $D(x, y) = A'(y)$, D ne dépend pas de x. Comme $D(x, y) = -B'(x)$, D ne dépend pas de y. Donc D est une constante. Comme $A'(y) = D$ on a $A(y) = Dy + a_0$ et comme $B'(x) = -D$ on a $B(x) = -Dx+b_0$. Au final $f(z) = Dy+a_0+i(-Dx+b_0) = a_0 + ib_0 + D(y - ix) = c + i\lambda z$ avec $c = a_0 + ib_0 \in \mathbf{C}$ et $\lambda = -D \in \mathbf{R}$ (pour un ouvert plus général que le carré $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ il faudrait rajouter une hypothèse de connexité ; car c et λ peuvent être différents d'une composante connexe à l'autre).

2

2.1. Si $3 < R < R'$ on peut appliquer le théorème des résidus à l'anneau $R \leq |z| \leq R'$; comme il n'y a pas de singularité dans cet anneau, $u_m(R') - u_m(R) = 0$. On peut aussi rappeler un théorème du cours démontré avant le théorème des résidus et qui affirme l'indépendance de $\int_{|z|=r} f(z)dz$ par rapport à r pour une fonction f holomorphe sur un anneau. On a $|P(z)| \geq (R - 1)(R - 2)(R - 3) \geq (R - 3)^3$ sur $|z| = R > 3$. Donc $|u_m(R)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{R^m}{(R-3)^3} 2\pi R$ qui tend vers zéro lorsque $R \to \infty$ pour $m + 1 < 3$, donc en particulier pour $m < 0$. Donc $u_m(R) = 0$ pour $m < 0$ et $R > 3$.

2.2. Les singularités sont en $z = 0$ (car $m < 0\,!$), et bien sûr aussi en 1, 2, 3. Par le théorème des résidus on a pour $R > 3$:

$$u_m(R) = \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 0) + \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 1) + \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 2) + \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 3)$$

Donc, compte tenu de la question précédente, pour $m < 0$:

$$0 = \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 0) + \frac{1}{2} + \frac{2^m}{-1} + \frac{3^m}{2}$$

et ainsi $\text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 0) = -\frac{1}{2} + 2^m - \frac{3^m}{2}$ pour $m < 0$.

2.3. Si l'on écrit $\frac{1}{P(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ au voisinage de l'origine, on a :

$$c_n = \text{Rés}(\frac{1}{P(z)} \frac{1}{z^{n+1}}; 0)$$

donc, par la question précédente :

$$c_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}$$

Cela donne par exemple $c_0 = -1/6$ et $c_1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{18} = -\frac{22}{72} = -\frac{11}{36}$ ce qui est correct : $(-6 + 11z + \dots)^{-1} = -\frac{1}{6}(1 + \frac{11}{6}z + \dots)$. Le rayon de convergence est exactement 1 puisque c'est la distance de 0 à la plus proche singularité ($z = 1$).

2.4. Lorsque $m \geq 0$ il n'y a pas de singularité en $z = 0$ et donc le théorème des résidus donne pour $R > 3$:

$$u_m(R) = \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 1) + \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 2) + \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 3)$$

Soit :

$$u_m(R) = \frac{1}{2} - 2^m + \frac{3^m}{2}$$

Remarquons que cette formule confirme que $u_0(R)$ et $u_1(R)$ sont nuls ($m + 1 < 3$). Par un théorème du cours les coefficients a_n de la série de Laurent de $1/P(z)$ dans l'anneau $|z| > 3$ sont donnés par la formule :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{1}{P(z)} \frac{1}{z^{n+1}}\, dz$$

c'est-à-dire $a_n = u_m(R)$ pour $m = -n - 1$ et $R > 3$. Ainsi $a_n = 0$ pour $n \geq 0$ et

$$a_n = \frac{1}{2} - 2^{-n-1} + \frac{1}{2} 3^{-n-1}$$

pour $n < 0$. Ou encore, avec $n = -k$, $k \geq 1$:

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} 2^k + \frac{1}{6} 3^k\right) \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

pour $|z| > 3$. Le premier terme non nul est pour $k = 3$. Attention au fait que la somme débute avec $k = 1$ pas avec $k = 0$. On peut retrouver plus directement ce résultat en faisant une décomposition en éléments simples.

3

3.1. Il existe une constante R telle que $|z\gamma(t)| \leq R$ pour $t \in [0,1]$, puisque z est fixé, et que γ est bornée, car continue sur le compact $[0,1]$. On a $e^Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{n!}$ avec convergence uniforme sur le disque $\{|Z| \leq R\}$, donc $e^{z\gamma(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(t)^n}{n!} z^n$ avec convergence uniforme par rapport à $t \in [0,1]$. On peut permuter la sommation et l'intégration en cas de convergence uniforme et cela donne la formule de l'énoncé pour $F(z)$. On a représenté F comme la somme d'une série entière : comme cette série converge pour tout z, c'est que son rayon de convergence est infini. Donc F est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$, autrement dit F est une fonction entière.

3.2. Si l'on écrit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ on a

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n \ .$$

Or :

$$(n+1)a_{n+1} = (n+1)\left(\int_0^1 g(t)\frac{\gamma(t)^{n+1}}{(n+1)!}dt\right) = \int_0^1 g(t)\gamma(t)\frac{\gamma(t)^n}{n!}dt$$

donc F' est obtenu à partir de $(g\gamma, \gamma)$ comme F l'est à partir de (g, γ). Donc $F'(z) = \int_0^1 g(t)\gamma(t)e^{z\gamma(t)}dt$. Par récurrence on prouve alors $F^{(N)}(z) = \int_0^1 g(t)(\gamma(t))^N e^{z\gamma(t)}dt$, et donc par des combinaison linéaires :

$$P(\frac{d}{dz})F(z) = \int_0^1 g(t)P(\gamma(t))e^{z\gamma(t)}dt$$

pour tout polynôme. Autrement dit on peut « dériver sous le signe somme ».

3.3. Par définition, l'intégrale curviligne vaut :

$$f(z) = \int_0^1 \frac{1}{P(\gamma(t))} e^{z\gamma(t)}\gamma'(t)dt$$

qui est de la forme étudiée précédemment avec $g(t) = \gamma'(t)/P(\gamma(t))$ (comme on a supposé γ de classe C^1, g est bien continue). Donc $f(z)$ est une fonction entière et ses dérivées s'obtiennent en dérivant sous le signe somme. Par exemple

$$f'(z) = \int_0^1 \frac{\gamma(t)}{P(\gamma(t))} e^{z\gamma(t)}\gamma'(t)dt = \int_\gamma \frac{w}{P(w)} e^{zw} dw$$

où l'on est revenu à la forme « intégrale curviligne ». Ainsi :

$$P(\frac{d}{dz})f(z) = \int_\gamma \frac{P(w)}{P(w)}\, e^{zw} dw = \int_\gamma e^{zw}\, dw \ .$$

Si l'on suppose maintenant que γ est un lacet, compte tenu du fait que $w \mapsto e^{zw}$ admet une primitive (pour $z \neq 0$ on prend $w \mapsto e^{zw}/z$; pour $z = 0$, on prend $w \mapsto w$ comme primitive de $w \mapsto 1$), la dernière intégrale est nulle. Donc $P(\frac{d}{dz})f(z) = 0$.

3.4. On note $z_1, \ldots, z_k$ ceux des zéros de P qui ont un module inférieur strictement à R. L'intégrale vaut alors par le théorème des résidus :

$$2\pi i \sum_{1\le j\le k} \frac{1}{P'(z_j)}\, e^{z_j\, z}\ .$$

Note : par convention une somme indicée par un ensemble vide vaut 0 ; donc la formule vaut aussi si P n'a aucun zéro de module inférieur à R.

4

4.1. Soit $R > 1$. On note C_R le contour, parcouru dans le sens direct, comportant le segment $[-R, +R]$ et le demi-cercle $Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, dans le demi-plan supérieur. Notons $I(R)$ la contribution du demi-cercle à l'intégrale de $\frac{1}{(1+z^2)(2+e^{iz})}dz$. Dans le demi-plan supérieur on a $|e^{iz}| \le 1$ donc $|2+e^{iz}| \ge 1$ et ainsi

$$\left|\frac{1}{(1+z^2)(2+e^{iz})}\right| \le \frac{1}{R^2-1}$$

sur le demi-cercle $|z| = R$, $\mathrm{Im}(z) \ge 0$, $R > 1$. Alors :

$$|I(R)| \le \frac{1}{R^2-1}\,\pi R\ ,$$

et donc $\lim_{R\to\infty} I(R) = 0$. Or par le théorème des résidus l'intégrale le long du contour entier C_R vaut

$$2\pi i\,\mathrm{Rés}(\frac{1}{(1+z^2)(2+e^{iz})}, i) = 2\pi i\,\frac{1}{2i(2+e^{-1})} = \frac{\pi}{2+\frac{1}{e}}$$

En conclusion :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+e^{ix})}\,dx = \frac{\pi}{2+\frac{1}{e}}$$

4.2. On a $\mathrm{ch}(z+i\pi) = (e^{z+i\pi} + e^{-z-i\pi})/2 = -\mathrm{ch}(z)$ car $e^{i\pi} = -1$. Donc $\mathrm{ch}(z + i\,2\pi) = -\mathrm{ch}(z+i\pi) = +\mathrm{ch}(z)$. Pour le calcul de $|\mathrm{ch}(z)|^2$, écrivons $z = x+iy$. On a :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{ch}(z)|^2 = \mathrm{ch}(z)\overline{\mathrm{ch}(z)} &= \frac{1}{4}(e^z + e^{-z})(e^{\overline{z}} + e^{-\overline{z}})\\
&= \frac{1}{4}(e^{z+\overline{z}} + e^{z-\overline{z}} + e^{-z+\overline{z}} + e^{-z-\overline{z}}) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{2iy} + e^{-2iy} + e^{-2x})\\
&= \frac{1}{4}((e^x - e^{-x})^2 + (e^{iy} + e^{-iy})^2) = \mathrm{sh}^2(x) + \cos^2(y)\\
&= \frac{1}{4}((e^x + e^{-x})^2 + (e^{iy} - e^{-iy})^2) = \mathrm{ch}^2(x) - \sin^2(y)\ ,
\end{aligned}$$

la dernière ligne donnant une variante. Une autre méthode est d'utiliser les identités trigonométriques usuelles :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(z) = \cos(iz) = \cos(-y+ix) &= \cos(y)\cos(ix) + \sin(y)\sin(ix)\\
&= \cos(y)\,\mathrm{ch}(x) + i\sin(y)\,\mathrm{sh}(x)\\
\Rightarrow |\mathrm{ch}\, z|^2 &= \cos^2(y)\,\mathrm{ch}^2(x) + \sin^2(y)\,\mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{sh}^2(x) + \cos^2(y)
\end{aligned}$$

car $\mathrm{ch}^2 = \mathrm{sh}^2 + 1$, $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Les zéros de $\mathrm{ch}\, z$ sont donc obtenus pour $x = 0$ et $y \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, soit $z = i\frac{\pi}{2} + \pi i\, k$, $k \in \mathbf{Z}$. Soit C_R le contour rectangulaire de base le segment $[-R,R]$ et de hauteur π, dans le sens direct. Par le théorème des résidus :

$$\int_{C_R} \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z}dz = 2\pi i \operatorname{Rés}(\frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z}, i\frac{\pi}{2}) = 2\pi i \, \frac{e^{ai\frac{\pi}{2}}}{\operatorname{sh} i\frac{\pi}{2}} = 2\pi e^{ai\frac{\pi}{2}} \; .$$

Notons I, II, III, et IV les contributions des quatres côtés, le premier étant $[-R,R]$, les suivants étant énumérés dans le sens direct. Alors :

$$III = -\int_{-R}^{+R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{\operatorname{ch}(x+i\pi)}dx = +e^{ai\pi}\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x}dx = e^{ai\pi}\cdot I$$

Sur le deuxième côté on a $|\operatorname{ch} z| \geq \operatorname{sh}(R)$ et $|e^{az}| = e^{\operatorname{Re}(az)} = e^{\operatorname{Re}(a)R - \operatorname{Im}(a)y} \leq e^{\pi|\operatorname{Im}(a)|}e^{|\operatorname{Re}(a)|R}$. D'où la majoration :

$$|II| \leq \pi e^{\pi|\operatorname{Im}(a)|}\, \frac{e^{|\operatorname{Re}(a)|R}}{\operatorname{sh} R} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{R\to+\infty} II = 0 \; ,$$

car $\operatorname{sh} R \sim \frac{1}{2}e^R$ et $|\operatorname{Re}(a)| < 1$. On montre de même $\lim_{R\to\infty} IV = 0$. En conclusion :

$$\lim_{R\to+\infty}(1+e^{i\pi a})\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x}dx = 2\pi\, e^{i\frac{\pi}{2}a} \; ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x}dx = \frac{2\pi}{e^{-i\frac{\pi}{2}a} + e^{i\frac{\pi}{2}a}} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(i\frac{\pi}{2}\, a)} = \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}\, a)} \; .$$

Annexe 1. Apportons quelques commentaires. L'intégrale est une fonction paire de a (comme le confirme sa valeur) et l'on peut aussi écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch} x}dx = \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}\, a)} \; .$$

Limitons nous aux valeurs réelles de a, c'est-à-dire $a \in \,]-1,+1[$. Il n'est pas trop difficile (*cf.* annexe 2) de justifier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch} x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m}x^{2m}}{(2m)!}\frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m}}{(2m)!}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{\operatorname{ch} x}dx \; ,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}\, a)} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}\frac{a^{2m}}{(2m)!} \qquad \text{avec } c_{2m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{\operatorname{ch} x}dx \; .$$

Cela met en évidence $c_{2m} > 0$. Par ailleurs, si l'on utilise le même contour C_R et le théorème des résidus pour c_{2m}, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{\operatorname{ch} x}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+i\pi)^{2m}}{\operatorname{ch} x}dx = 2\pi(-1)^m(\frac{\pi}{2})^{2m} \; ,$$

d'où une relation déterminant c_{2m} comme combinaison linéaire des c_{2k}, $k < m$. Cette relation se simplifie si l'on pose $c_{2m} = \pi(\frac{\pi}{2})^{2m}E_{2m}$. Elle s'écrit :

$$\forall m \geq 0 \quad E_{2m} + 2\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{2m}{2k}4^{k-1}E_{2m-2k} = (-1)^m \; ,$$

ce qui montre par récurrence que les « nombres d'Euler » E_{2m} sont entiers et impairs ($E_0 = 1$). Ce sont les coefficients du développement :

$$\frac{1}{\cos t} = 1 + 1\,\frac{t^2}{2} + 5\,\frac{t^4}{24} + 61\,\frac{t^6}{720} + \cdots + E_{2m}\frac{t^{2m}}{(2m)!} + \ldots$$

De l'identité $\frac{1}{\cos t}\ \cos t = 1$ on obtient une autre relation de récurrence :

$$\forall m \geq 1 \quad E_{2m} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{2m}{2k} E_{2m-2k} = 0 \ ,$$

ce n'est donc *pas la même* que celle écrite ci-dessus. Mais vous pourrez vous amuser (si si) à constater que toutes deux donnent $E_8 = 1385$ après 1, 1, 5, 61. Cette deuxième relation montre également par récurrence que E_{2m} est entier, et si l'on travaille un peu plus, aussi le fait qu'il est impair.

On peut partir des équations $\mathrm{tg}'(t) = 1 + \mathrm{tg}^2(t)$ et $(\frac{1}{\cos t})' = \mathrm{tg}(t)\frac{1}{\cos t}$ pour établir d'autres relations de récurrence qui concernent les dérivées successives en $t = 0$ des fonctions $\mathrm{tg}\, t$ et $\frac{1}{\cos t}$. Cette approche élémentaire permet aussi de montrer assez facilement que les E_{2m} sont entiers, et impairs, et de plus elle établit $E_{2m} > 0$ ce qui est moins accessible par les deux relations de récurrence précédentes (mais qui était évident sur la représentation de c_{2m} par une intégrale).

Annexe 2. Supposons que les fonctions $u_n(x)$ vérifient $u_n(x) \geq 0$ et soit $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. Supposons que la série converge uniformément sur tout intervalle $[0, R]$, $R < \infty$. Alors $\int_0^\infty U(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty u_n(x)\, dx$.

Preuve : On a $U(x) \geq \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ donc $\int_0^\infty U(x)\, dx \geq \sum_{n=0}^{N} \int_0^\infty u_n(x)\, dx$, et l'on passe à la limite pour $N \to \infty$. Dans l'autre sens, par la convergence uniforme, on a pour tout R : $\int_0^R U(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^R u_n(x)\, dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty u_n(x)\, dx$ et l'on passe à la limite pour $R \to \infty$. Précisons que la démonstration marche que $\int_0^\infty U(x)\, dx$ soit finie ou infinie, et que l'on n'a pas supposé $\int_0^\infty u_n(x)\, dx < \infty$.

Dans ce contexte, ceux d'entre vous qui étudient l'intégrale de Lebesgue savent que le *théorème de la convergence monotone* donne le même résultat sans aucune hypothèse de convergence uniforme. Le théorème et sa preuve est donc pour ceux qui ne connaissent que l'intégrale de Riemann (on a donc supposé que les u_n étaient Riemann intégrables sur tout intervalle $[0, R]$, et la convergence uniforme implique que U est Riemann intégrable sur $[0, R]$.)

Toujours pour ceux qui ne disposent pas des théorèmes de Lebesgue, on peut également ajouter que si en plus d'être positives les fonctions u_n sont continues, et si l'on sait aussi a priori que $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est continue, alors cela suffit pour affirmer par le « théorème de Dini » que la convergence est uniforme sur $[0, R]$, pour tout $R < \infty$.

On énonce souvent le théorème de Dini sous la forme : *si sur* $[0, 1]$ *les* $f_n \geq 0$ *sont une* ***suite décroissante de fonctions continues*** *convergeant simplement vers* 0 *alors la convergence est uniforme.* **Preuve très brève :** Soit $\epsilon > 0$. Pour tout x soit $n = n(x, \epsilon)$ le plus petit indice avec $f_n(x) \leq \epsilon$. Soit $U(x)$ un voisinage ouvert de x avec $f_n \leq 2\epsilon$ sur $U(x)$. Les $U(x)$ forment un recouvrement par des ouverts du compact $[0, 1]$, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Soit $x_1, \ldots, x_m$ les points correspondants et $n_1, \ldots, n_m$ les indices associés. Soit $N = \max(n_1, \ldots, n_m)$. Sur $U(x_j)$ on a $f_N \leq f_{n_j} \leq 2\epsilon$. Donc $f_N \leq 2\epsilon$ sur $[0, 1]$. Donc pour tout $n \geq N$ on a $0 \leq f_n \leq 2\epsilon$ sur $[0, 1]$.