Université des Sciences et Technologies Lille 1
Licence de Mathématiques, S5 (2004/2005)
MATH 305 (Resp. : J.-F. Burnol)

Partiel du 20 novembre 2004 – durée : 2 heures

NI DOCUMENTS NI CALCULATRICES

La notation tiendra compte, pour la forme comme pour le fond, du soin apporté à la présentation. Seuls des raisonnements précis et complets apporteront le bénéfice entier des points. Une réponse non justifiée n'est pas une réponse valable.

Dans tout le sujet une fonction f de la variable complexe $z = x + iy$ pourra être notée indifféremment $f(z)$ ou $f(x, y)$.

Le sujet comporte quatre problèmes indépendants. Barème indicatif : 4+5+6+5.

1

Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert non vide et f définie sur U, de classe C^1.

1.1. Rappeler comment s'écrivent en fonction de $u = \mathrm{Re}(f)$ et de $v = \mathrm{Im}(f)$ les conditions de Cauchy-Riemann pour l'holomorphie de f dans U.

1.2. Soient α et β deux nombres réels, et soit f la fonction définie sur U par :

$$f(z) = x^2 + \alpha y^2 + 2i\beta xy$$

Déterminer les valeurs de (α, β) qui font de f une fonction holomorphe.

1.3. Pour cette question $U = \{z = x + iy \mid |x| < 1, |y| < 1\}$. On suppose que $f = u + iv$ est holomorphe sur U et que sa partie réelle u ne dépend que de y : $u(x, y) = A(y)$. Montrer tout d'abord que v ne dépend que de x : $v(x, y) = B(x)$. Puis, montrer que f est de la forme $f(z) = c + \lambda\, iz$ avec $c \in \mathbf{C}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

2

On considère le polynôme $P(z) = (z-1)(z-2)(z-3) = z^3 - 6z^2 + 11z - 6$. Soit C_R le cercle $|z| = R$ parcouru dans le sens direct. Soit $R \neq 1, 2, 3$. On pose pour $m \in \mathbf{Z}$:

$$u_m(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{z^m}{P(z)}\, dz$$

2.1. Montrer que $u_m(R)$ est indépendant de R pour $R > 3$. On suppose $m < 0$; montrer $u_m(R) = 0$ en considérant $R \to \infty$.

2.2. Toujours pour $m < 0$, où sont situées les singularités de $\frac{z^m}{P(z)}$? Obtenir $\mathrm{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 0)$ via le calcul de $u_m(R)$, $R > 3$, par le théorème des résidus.

2.3. Déduire de la question précédente la série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ de $\frac{1}{P(z)}$ à l'origine. Quel est son rayon de convergence ?

2.4. Déterminer $u_m(R)$ pour $m \geq 0$ et $R > 3$ par le théorème des résidus. En déduire la série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ de $\frac{1}{P(z)}$ dans l'anneau $|z| > 3$.

TOURNEZ LA PAGE

3

3.1. Soient g et γ deux fonctions continues $[0,1] \to \mathbf{C}$. On définit pour $z \in \mathbf{C}$: $F(z) = \int_0^1 g(t) e^{z\gamma(t)} dt$. Justifier l'identité :

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 g(t) \frac{\gamma(t)^n}{n!} dt \right) \, z^n$$

et en déduire que F est une fonction entière (= holomorphe sur tout $\mathbf{C}$).

3.2. Quelle est la représentation en série de F' ? En déduire l'identité $F'(z) = \int_0^1 g(t)\gamma(t) e^{z\gamma(t)} dt$ et plus généralement, pour tout polynôme P, $P(\frac{d}{dz})F(z) = \int_0^1 g(t) P(\gamma(t)) e^{z\gamma(t)} dt$.

3.3. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ un chemin de classe C^1 et soit P un polynôme ne s'annulant pas sur $\gamma([0,1]) \subset \mathbf{C}$. Utiliser les résultats précédents pour montrer que

$$f(z) = \int_\gamma \frac{e^{zw}}{P(w)} \, dw$$

est une fonction entière. On suppose de plus que le chemin γ est un lacet ; montrer $P(\frac{d}{dz}) f(z) = 0$.

3.4. On suppose que P n'a que des zéros simples et que γ est le cercle $|w| = R$ parcouru dans le sens direct. Exprimer $f(z)$ en fonction de certains des zéros de P (on précisera lesquels).

4

4.1. Déterminer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+e^{ix})} \, dx$$

en utilisant le théorème des résidus (enfin, ce n'est pas obligatoire ; si vous trouvez une autre méthode (il en existe...), on sera impressionné et on vous donnera même un bonus). On justifiera soigneusement par des inégalités précisément énoncées les estimations menant au résultat final.

4.2. On rappelle $\operatorname{ch} z = (e^z + e^{-z})/2$ et $\operatorname{sh} z = (e^z - e^{-z})/2$. Que valent $\operatorname{ch}(z + i\pi)$ et $\operatorname{ch}(z + i\,2\pi)$? Prouver $|\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{sh}^2(\operatorname{Re}(z)) + \cos^2(\operatorname{Im}(z))$. Quels sont les zéros de la fonction $\operatorname{ch} z$? Déterminer la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} \, dx$$

pour $|\operatorname{Re}(a)| < 1$, par le théorème des résidus (ou toute autre méthode).