Université des Sciences et Technologies Lille 1
Licence de Mathématiques, 2004-2005, Semestre 5
MATH 305 – Analyse Complexe (Resp. : J.-F. Burnol)

Examen du 12 janvier 2005 – durée : 3 heures

Corrigé

1

Soit $U = \{1 < |z| < 2\}$ et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On note $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$.

1.1. Quelles sont les équations de Cauchy-Riemann ? Montrer que u vérifie l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

En les utilisant on obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ d'où l'équation de Laplace.

1.2. On suppose que l'on peut écrire $u(x, y) = \psi(x^2+y^2)$ pour une certaine fonction $\psi :]1, 4[\to \mathbf{R}$, de classe C^2. Montrer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\psi'(x^2 + y^2) + 4x^2\psi''(x^2 + y^2) ,$$

et donner la formule analogue pour $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Il suffit de dériver une fois : $\frac{\partial}{\partial x}u = \psi'(x^2+y^2)2x$, puis une deuxième fois : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi''(x^2 + y^2)2x2x + \psi'(x^2 + y^2)2$ ce qui donne la formule demandée après réarrangement. La formule analogue, avec une démonstration analogue est : $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\psi'(x^2 + y^2) + 4y^2\psi''(x^2 + y^2)$.

1.3. En déduire que ψ vérifie l'équation différentielle :

$$\psi'(t) + t\psi''(t) = 0 \qquad \text{sur }]1, 4[\,.$$

Quelle est la dérivée de $t\psi'(t)$? Prouver qu'il existe deux constantes C et A avec $\psi(t) = C \log(t) + A$.

Comme u doit vérifier l'équation de Laplace on doit avoir pour tout (x, y) avec $z = x + iy$ dans le domaine de définition de f : $0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\psi'(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)\psi''(x^2+y^2)$. Les valeurs prises par x^2+y^2 parcourent exactement l'intervalle $]1, 4[$, et donc pour tout $t \in]1, 4[$ on doit avoir $4\psi'(t)+4t\psi''(t) = 0$ d'où l'équation différentielle demandée. La fonction $t\psi'(t)$ a comme dérivée $\psi'(t) + t\psi''(t)$. Cette dérivée est identiquement nulle, donc

$t\psi'(t)$ est une constante C. Mais alors ψ est une primitive de Ct^{-1} et donc $\psi(t) = C\log(t) + A$, avec A une constante d'intégration.

1.4. Que valent $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, et $\frac{\partial v}{\partial y}$? Prouver (on utilisera $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} f$) :

$$f'(z) = \frac{2C}{x+iy}$$

☯ Comme $u(x,y) = \psi(x^2+y^2) = C\log(x^2+y^2)+A$, on a $\frac{\partial}{\partial x}u = C\frac{2x}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y}u = C\frac{2y}{x^2+y^2}$. Par les équations de Cauchy-Riemann, on a $\frac{\partial}{\partial x}v = -C\frac{2y}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y}v = C\frac{2x}{x^2+y^2}$. Comme $f' = \frac{\partial}{\partial x}(u+iv)$ on en déduit $f' = 2C\frac{x-iy}{x^2+y^2} = 2C(x+iy)^{-1}$.

1.5. Compte tenu de la question précédente que vaut $\int_{|z|=\frac{3}{2}} f'(z)\,dz$, le cercle étant parcouru dans le sens direct ? Prouver alors $C = 0$. En déduire que f est constante.

☯ Cette intégrale vaut $\int_{|z|=\frac{3}{2}} 2C\frac{dz}{z} = 2C2\pi i = 4C\pi i$. Mais par ailleurs il s'agit de l'intégrale le long d'un lacet d'une fonction dérivée, et donc elle vaut 0. Donc $C = 0$. Donc $f' = 0$ et ainsi f est constante (car $1 < |z| < 2$ est connexe).

1.6. On suppose maintenant que U est $\{1 < |z| < 2\} \setminus]-2,-1[$. Existe-t-il une fonction holomorphe *non constante* $f : U \to \mathbf{C}$ telle que $\mathrm{Re}(f)$ soit une fonction de x^2+y^2 ? (Justifier)

☯ Oui, il suffit de prendre $f(z) = \mathrm{Log}(z)$. On a $\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$.

2

2.1. Déterminer $\int_C (z^3+8)^{-1}\,dz$ pour chacun des contours C suivants, tous parcourus dans le sens direct :

(1) Le carré de sommets $(0,0)$, $(10,0)$, $(10,10)$, $(0,10)$.

(2) Le cercle $\{|z| = 1\}$.

(3) Le cercle $\{|z| = 3\}$.

☯ Le dénominateur z^3+8 s'annule en $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = -2$, $z_3 = \overline{z_1} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$ (voir la figure). Le résidu en z_j vaut $\frac{1}{3z_j^2} = \frac{z_j}{3(-8)} = -\frac{1}{24}z_j$.

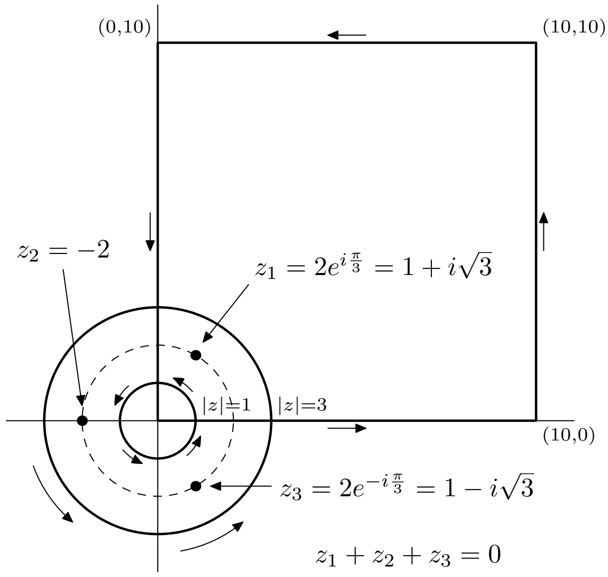
(1) dans ce cas seul z_1 est encerclé par le contour et l'intégrale vaut donc $2\pi i\frac{-1}{24}2e^{i\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{6}\,e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

(2) L'intégrale vaut 0 car aucune singularité n'est à l'intérieur du contour.

(3) L'intégrale peut être prise sur n'importe quel cercle centré en l'origine et de rayon $R > 2$. On a pour $R > 2$:

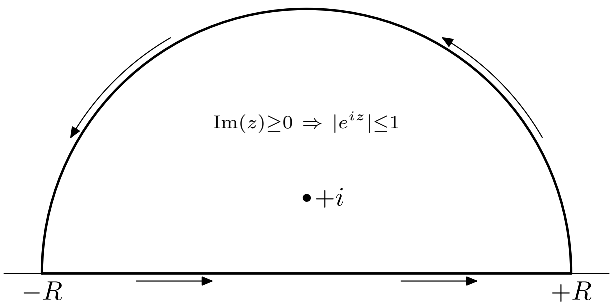
$$\left|\int_{|z|=R} (z^3+8)^{-1}\,dz\right| \leq \frac{1}{R^3-8}\,2\pi R$$

et donc en faisant tendre R vers $+\infty$ on obtient que le résultat demandé est 0. On peut aussi remarquer que la somme des résidus fait intervenir $z_1+z_2+z_3$ qui vaut zéro car le polynôme T^3+8 se factorise en $(T-z_1)(T-z_2)(T-z_3) = T^3 - (z_1+z_2+z_3)T^2 + \dots$.



2.2. Déterminer $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5+e^{ix}}{3+e^{ix}} \frac{1}{x^2+1}\, dx$.

☯ On considère le contour $\mathcal{C}_R$ qui comporte l'intervalle $[-R, +R]$ suivi du demi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur. La contribution de ce



demi-cercle (disons, pour $R > 1$) est majorée en module par :

$$\frac{6}{2}\frac{1}{R^2-1}\pi R\,,$$

puisque $|e^{iz}| \leq 1$ dans le demi-plan supérieur et donc $\left|\frac{5+e^{iz}}{3+e^{iz}}\right| \leq \frac{5+1}{3-1}$ (et que le demi-cercle a une longueur d'arc égale à πR). Cela tend vers zéro lorsque $R \to +\infty$. L'intégrale de contour, pour $R > 1$ et par le théorème des résidus, vaut $2\pi i \mathrm{Rés}(f(z), z = i)$ avec $f(z) = \frac{5+e^{iz}}{3+e^{iz}}\frac{1}{z^2+1}$, puisque $z = i$ est l'unique singularité enclose par le contour. Cela donne donc $2\pi i \frac{5+e^{-1}}{3+e^{-1}}\frac{1}{2i} = \pi\frac{5e+1}{3e+1}$. En conclusion :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{5+e^{ix}}{3+e^{ix}} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \pi\frac{5e+1}{3e+1}$$

2.3. Déterminer

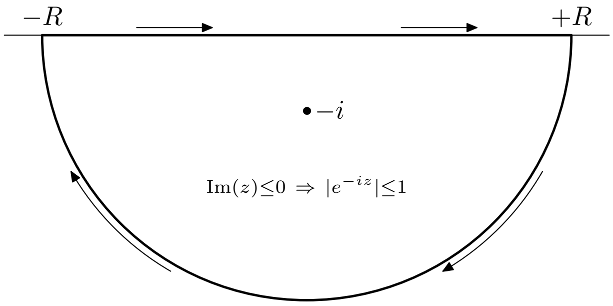
$$K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\, \frac{x-i}{x+i}\, \frac{1}{x^2+1}\, dx \quad \text{et} \quad L = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix}\, \frac{x-i}{x+i}\, \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

Pour la deuxième intégrale on utilisera un contour passant par le demi-plan inférieur. Attention au sens de parcours et au pôle double.

☯ En ce qui concerne la première intégrale : soit $\mathcal{C}_R$ le contour qui comporte l'intervalle $[-R, +R]$ suivi du demi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur. L'intégrale sur ce contour est nulle, car en fait la fonction intégrée n'a pas de singularité dans le demi-plan supérieur. L'intégrale sur le demi-cercle (pour $R > 1$) est majorée en module par $1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{R^2-1}\pi R$, puisque $|e^{iz}| \le 1$ et que $|z-i| \le |z+i|$ dans le demi-plan supérieur. Cela tend vers 0 pour $R \to +\infty$. Donc

$$K = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{ix}\, \frac{x-i}{x+i}\, \frac{1}{x^2+1}\, dx = 0\ .$$

Pour la deuxième intégrale on utilise le contour $\mathcal{D}_R$ qui comporte $[-R, +R]$



suivi du demi-cercle de rayon R dans le demi-plan inférieur, puisque $|e^{-iz}| \le 1$ pour $\mathrm{Im}(z) \le 0$. Ce contour est donc parcouru dans le sens rétrograde. On majore l'intégrale sur le demi-cercle, pour $R > 1$ par : $1 \cdot \frac{R+1}{R-1} \cdot \frac{1}{R^2-1} \cdot \pi R$ qui tend vers zéro pour $R \to +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ix}\, \frac{x-i}{x+i}\, \frac{1}{x^2+1}\, dx = -2\pi i\, \mathrm{Rés}(f(z), -i)\ ,$$

avec $f(z) = e^{-iz}\, \frac{z-i}{z+i}\, \frac{1}{z^2+1}$, qui se simplifie en $f(z) = e^{-iz}(z+i)^{-2}$ et qui a $z = -i$ comme unique singularité dans le demi-plan inférieur. Comme il s'agit d'un pôle double, pour obtenir le résidu nous posons $z = -i + h$, avec h petit. On a alors $f(-i+h) = e^{-1-ih}h^{-2} = e^{-1}(1 - ih + \dots)h^{-2}$ et le résidu vaut $-ie^{-1}$. Le résultat final est donc $L = -\frac{2\pi}{e}$.

3

3.1. On pose $w = \phi(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Quelle est l'image par ϕ de $]-1, +1]$?

☯ La fonction $\phi(t) = \frac{t-1}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1}$ a comme dérivée $\frac{2}{(t+1)^2}$. Elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-1, +1]$ et établit donc une bijection de cet intervalle sur $]\lim_{t\to-1}\phi(t), \phi(1)] =]-\infty, 0]$.

3.2. Exprimer z en fonction de w. Montrer que ϕ est une bijection (holomorphe) de $U = \mathbf{C} \setminus [-1, +1]$ sur $\Omega \setminus \{1\}$ avec $\Omega = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$.

☯ L'identité $w = \frac{z-1}{z+1}$ implique $zw + w = z - 1$; réciproquement $zw + w = z - 1$ implique $z \neq -1$ et $w = \frac{z-1}{z+1}$. Comme $zw + w = z - 1$ équivaut à $z(1 - w) = w + 1$ et que cette identité équivaut à $(z = \frac{w+1}{1-w})$ et $w \neq 1$ on a

$$\forall z, w \in \mathbf{C} \left((z \neq -1) \text{ ET } (w = \frac{z-1}{z+1})\right) \iff \left((w \neq +1) \text{ ET } (z = \frac{w+1}{1-w})\right)$$

Ceci prouve que ϕ est une bijection (qui est analytique bien sûr) entre $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$ et $\mathbf{C} \setminus \{+1\}$. Compte tenu de la réponse à la question précédente il en résulte que ϕ établit une bijection entre $\mathbf{C} \setminus [-1, +1]$ et $\mathbf{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup \{+1\})$.

3.3. En déduire que $f(z) = \exp(\frac{1}{4} \operatorname{Log} \phi(z))$ est bien définie et est une fonction analytique sur U telle que $f(z)^4 = \frac{z-1}{z+1}$ et $f(2) > 0$. Montrer que f est unique avec ces propriétés. Exprimer $f(z)$ explicitement en fonction des coordonnées polaires de $w = \phi(z)$.

☯ Comme ϕ restreinte à U est à valeurs dans l'ouvert Ω sur lequel la fonction Log est définie on peut considérer la fonction composée f qui sera analytique sur U. On a $f(z)^4 = \exp(\operatorname{Log} \phi(z)) = \phi(z) = \frac{z-1}{z+1}$. De plus $f(2) = \exp(\frac{1}{4} \operatorname{Log} \frac{1}{3}) > 0$. Réciproquement, toute autre fonction analytique $g(z)$ avec ces propriétés sera telle que $(g(z)/f(z))^4 = 1$ (on remarque que f ne s'annule pas). Or l'image du connexe U par la fonction continue $g(z)/f(z)$ doit être connexe ; comme elle prend ses valeurs dans un ensemble fini, elle est constante, égale à l'une des quatre racines quatrième de l'unité. Si de plus $g(2) > 0$ alors $g(2)/f(2)$ est aussi positive, et la valeur constante est donc 1. Ainsi $g = f$. Finalement si l'on a $w = re^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < +\pi$, alors par définition $\operatorname{Log}(w) = \log(r) + i\theta$ et donc $f(z) = r^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\theta}{4}}$.

3.4. Prouver $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1$. Montrer que la fonction $g(h) = f(\frac{1}{h})$, pour $0 < |h| < 1$, est une fonction analytique qui présente en $h = 0$ une fausse singularité. En déduire qu'elle est donnée par une série entière $1 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$. En calculant $g(h)^4$ établir que $c_1 = -\frac{1}{2}$ et $c_2 = +\frac{1}{8}$.

☯ Tout d'abord $w = \phi(z) \to 1$ pour $|z| \to \infty$. On sait que Log est une fonction continue donc $\lim_{|z|\to\infty} \operatorname{Log} w = \operatorname{Log}(1) = 0$, et ainsi par continuité de la fonction exponentielle, $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1$. Définissons $g(h) = f(\frac{1}{h})$, pour $0 < |h| < 1$. C'est possible puisqu'alors $|\frac{1}{h}| > 1$ et donc $\frac{1}{h}$ est dans le domaine de définition de f. La fonction g est analytique et vérifie $\lim_{h\to 0} g(h) = 1$. Par le théorème de Riemann de la fausse singularité, la fonction g s'étend en une fonction analytique pour $|h| < 1$ en posant $g(0) = 1$. Elle est donc donnée par une série entière $1 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$ de rayon de convergence au moins égal à 1. En posant $k = g(h) - 1 = c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$ on a $g(h)^4 = (1 + k)^4 = 1 + 4k + 6k^2 + o(h^2) = 1 + 4(c_1 h + c_2 h^2) + 6c_1^2 h^2 + o(h^2) = 1 + 4c_1 h + (4c_2 + 6c_1^2)h^2 + o(h^2)$. Par ailleurs $g(h)^4 = \frac{\frac{1}{h} - 1}{\frac{1}{h} + 1} = \frac{1-h}{1+h} = (1-h)(1-h+h^2+\ldots) = 1 - 2h + 2h^2 + \ldots$. Ainsi $4c_1 = -2$, donc $c_1 = -\frac{1}{2}$ et $4c_2 + \frac{6}{4} = 2$ et donc $4c_2 = \frac{1}{2}$ et $c_2 = \frac{1}{8}$.

3.5. Montrer que la série de Laurent de f sur la couronne $1 < |z| < \infty$ est une série entière en $\frac{1}{z}$. Que valent $\int_{|z|=10} f(z)dz$ et $\int_{|z|=10} zf(z)dz$, le cercle étant parcouru dans le sens direct ?

Pour $1 < |z|$ on a en posant $h = \frac{1}{z}$, $f(z) = g(h) = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 + \cdots = 1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{8z^2} + \ldots$ qui est un développement en puissances positives de $\frac{1}{z}$. Par unicité il s'agit du développement en série de Laurent de f dans la couronne $|z| > 1$. On sait que le coefficient a_j de z^j dans le développement en série de Laurent est $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)z^{-j-1}dz$, pour tout $r > 1$. En prenant $j = -1$ on obtient donc $\int_{|z|=10} f(z)dz = 2\pi i\frac{-1}{2} = -\pi i$ et en prenant $j = -2$ on obtient $\int_{|z|=10} zf(z)dz = 2\pi i\frac{1}{8} = \frac{1}{4}\pi i$.

4

4.1. Montrer que les racines du polynôme $P(z) = z^{111} + 3z^{50} + 1$ vérifiant $|z| < 1$ sont simples et qu'il y en a exactement 50. Ind. : on montrera que le polynôme $Q(z) = z^{111} + 3z^{50} = z^{50}(z^{61} + 3)$ vérifie $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$ pour $|z| = 1$.

Avec les notations de l'énoncé on a $|P(z) - Q(z)| = 1$ et par ailleurs, pour $|z| = 1$, $|Q(z)| = |z^{61} + 3| \geq 3 - 1 = 2 > 1$. Donc $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$ pour $|z| = 1$ et ainsi par le théorème de Rouché P $(= Q + (P - Q))$ et Q ont le même nombre de zéros, comptés avec leur multiplicité dans le disque $|z| < 1$. Or pour $|z| \leq 1$ on a $z^{61} + 3 \neq 0$ et donc Q a un unique zéro, de multiplicité 50. Par ailleurs le polynôme dérivé P' vaut $111z^{110} + 150z^{49} = z^{49}(111z^{61} + 150)$. Pour $|z| \leq 1$ on a $111z^{61} + 150 \neq 0$. Et $z = 0$ n'est pas une racine de P, donc P et P' n'ont aucune racine commune vérifiant $|z| \leq 1$. Les racines de P vérifiant $|z| < 1$ sont donc toutes simples. Il y en a donc exactement 50.

4.2. Prouver l'identité $|1 - \frac{1}{2}z|^2 - |\frac{1}{2} - z|^2 = \frac{3}{4}(1 - |z|^2)$ et justifier l'implication :

$$|z| \leq 1 \implies \left|\frac{\frac{1}{2} - z}{1 - \frac{1}{2}z}\right| \leq 1$$

Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$. On suppose $\forall z\ |f(z)| \leq 1$ et $f(\frac{1}{2}) = 0$. En considérant la fonction $g(z) = f\left(\frac{1-2z}{2-z}\right)$ montrer $|f(\frac{3}{4})| \leq \frac{2}{5}$.

On a $|1 - \frac{1}{2}z|^2 = (1 - \frac{1}{2}z)(1 - \frac{1}{2}\bar{z}) = 1 - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \frac{1}{4}|z|^2$ et $|\frac{1}{2} - z|^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + |z|^2$, ainsi $|1 - \frac{1}{2}z|^2 - |\frac{1}{2} - z|^2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}|z|^2 = \frac{3}{4}(1 - |z|^2)$. Pour $|z| \leq 1$ on en déduit $|1 - \frac{1}{2}z|^2 - |\frac{1}{2} - z|^2 \geq 0$ d'où $|1 - \frac{1}{2}z|^2 \geq |\frac{1}{2} - z|^2$ et donc effectivement $\frac{|\frac{1}{2} - z|^2}{|1 - \frac{1}{2}z|^2} \leq 1$ ce qui donne l'inégalité demandée (on signale en passant que le dénominateur ne peut pas s'annuler pour $|z| \leq 1$). La fonction $g(z) = f\left(\frac{1-2z}{2-z}\right)$ est alors définie et holomorphe en tout point du disque unité fermé, par l'inégalité prouvée et l'hypothèse que f est holomorphe sur le disque unité fermé. En $z = 0$ on a $g(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$. Par le Lemme de Schwarz il en résulte $|g(z)| \leq |z|$ pour $|z| \leq 1$. Cherchons z tel que $g(z) = f(\frac{3}{4})$. Il suffit d'avoir $\frac{1-2z}{2-z} = \frac{3}{4}$, $1 - 2z = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}z$, $-\frac{1}{2} = \frac{5}{4}z$, $z = -\frac{2}{5}$. Donc $|f(\frac{3}{4})| = |g(-\frac{2}{5})| \leq \frac{2}{5}$, ce qu'il fallait démontrer.