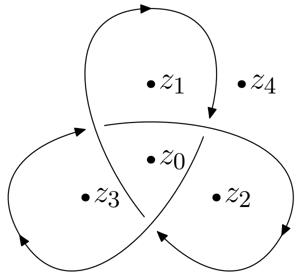
Université des Sciences et Technologies Lille 1
Licence de Mathématiques, Module L305, 2004-2005
L – MATH – S5 – Variables Complexes

Examen du 7 juin 2005 – durée : 3 heures

Ni Documents ni Calculatrices

1. Exercice

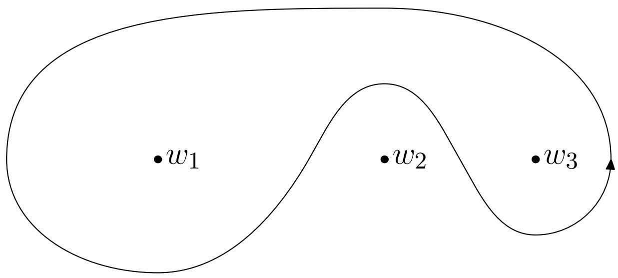


On considère dans le plan complexe un chemin fermé paramétré γ qui parcourt la figure ci-dessus dans le sens indiqué. Pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$ on note

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_j} \quad \text{et} \quad B_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z - z_j)^2}$$

Déterminer, en le justifiant, les valeurs de A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, et de B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. On précisera aussi quel est le nom que l'on donne aux quantités données par les intégrales A_j, $j = 0 \ldots 4$.

2. Exercice



Soit γ le contour, parcouru dans le sens direct, dessiné ci-dessus. Déterminer (avec justification) en fonction de w_1, w_2, w_3 les intégrales suivantes :

$$A = \int_\gamma \frac{dz}{(z - w_1)(z - w_2)(z - w_3)}$$

$$B = \int_\gamma \sin(z)dz$$

$$C = \int_\gamma \frac{dz}{(z - w_1)^2(z - w_3)}$$

TOURNEZ LA PAGE

3. Exercice

3.1. Déterminer $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+i)^3}\, dx.$

3.2. Déterminer $K = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{x^4+2x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+i)^2(x-i)^2}\, dx.$

3.3. Déterminer $L = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x+i)^2}\, dx.$

3.4. Déterminer $M = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x-i)^2}\, dx.$

3.5. Déterminer $N = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx.$

3.6. Déterminer $P = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\, dx.$

4. Exercice

4.1. On pose

$$\phi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$$

Montrer : $\forall \theta \in \mathbf{R} \quad |\phi(e^{i\theta})| = 1$. En déduire

$$|z| < 1 \implies |\phi(z)| < 1$$

4.2. Déterminer l'image par ϕ du disque unité ouvert $D(0,1)$. Montrer que ϕ est une bijection holomorphe de $D(0,1)$ sur lui-même. Déterminer explicitement la fonction réciproque ϕ^{-1}.

4.3. Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage du disque unité fermé. On suppose que f vérifie

$$|w| \leq 1 \implies |f(w)| \leq 8$$

et aussi on suppose

$$f(\frac{3}{4}) = 0$$

En considérant la fonction $\frac{1}{8} f(\phi(z))$ montrer

$$|f(0)| \leq 6$$