Université des Sciences et Technologies Lille 1
Licence de Mathématiques, 2004-2005, Semestre 5
MATH 305 – Analyse Complexe (Resp. : J.-F. Burnol)

Examen du 12 janvier 2005 – durée : 3 heures

Ni Documents ni Calculatrices

Une réponse non justifiée par une démonstration n'est pas une réponse valable. Dans tout le sujet un nombre complexe $z = x + iy$ peut aussi être noté (x, y) et l'on peut écrire indifféremment $f(z)$ ou $f(x, y)$.
Le sujet comporte quatre problèmes indépendants. Barème indicatif : $6 + 6 + 5 + 4$.

1

Soit $U = \{1 < |z| < 2\}$ et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On note $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$.

1.1. Quelles sont les équations de Cauchy-Riemann ? Montrer que u vérifie l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1.2. On suppose que l'on peut écrire $u(x, y) = \psi(x^2 + y^2)$ pour une certaine fonction $\psi :]1, 4[\to \mathbf{R}$, de classe C^2. Montrer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\psi'(x^2 + y^2) + 4x^2\psi''(x^2 + y^2) ,$$

et donner la formule analogue pour $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

1.3. En déduire que ψ vérifie l'équation différentielle :

$$\psi'(t) + t\psi''(t) = 0 \qquad \text{sur }]1, 4[.$$

Quelle est la dérivée de $t\psi'(t)$? Prouver qu'il existe deux constantes C et A avec $\psi(t) = C \log(t) + A$.

1.4. Que valent $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, et $\frac{\partial v}{\partial y}$? Prouver (on utilisera $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} f$) :

$$f'(z) = \frac{2C}{x + iy}$$

1.5. Compte tenu de la question précédente que vaut $\int_{|z|=\frac{3}{2}} f'(z)\, dz$, le cercle étant parcouru dans le sens direct ? Prouver alors $C = 0$. En déduire que f est constante.

1.6. On suppose maintenant que U est $\{1 < |z| < 2\} \setminus] - 2, -1[$. Existe-t-il une fonction holomorphe *non constante* $f : U \to \mathbf{C}$ telle que $\mathrm{Re}(f)$ soit une fonction de $x^2 + y^2$? (Justifier)

TOURNEZ LA PAGE

2

2.1. Déterminer $\int_C (z^3+8)^{-1}\,dz$ pour chacun des contours C suivants, tous parcourus dans le sens direct :

(1) Le carré de sommets $(0,0)$, $(10,0)$, $(10,10)$, $(0,10)$.

(2) Le cercle $\{|z|=1\}$.

(3) Le cercle $\{|z|=3\}$.

2.2. Déterminer $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5+e^{ix}}{3+e^{ix}} \frac{1}{x^2+1}\,dx.$

2.3. Déterminer

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\, \frac{x-i}{x+i}\, \frac{1}{x^2+1}\,dx \quad \text{et} \quad L = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix}\, \frac{x-i}{x+i}\, \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Pour la deuxième intégrale on utilisera un contour passant par le demi-plan inférieur. Attention au sens de parcours et au pôle double.

3

3.1. On pose $w = \phi(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Quelle est l'image par ϕ de $]-1,+1]$?

3.2. Exprimer z en fonction de w. Montrer que ϕ est une bijection (holomorphe) de $U = \mathbf{C} \setminus [-1,+1]$ sur $\Omega \setminus \{1\}$ avec $\Omega = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$.

3.3. En déduire que $f(z) = \exp(\frac{1}{4} \operatorname{Log} \phi(z))$ est bien définie et est une fonction analytique sur U telle que $f(z)^4 = \frac{z-1}{z+1}$ et $f(2) > 0$. Montrer que f est unique avec ces propriétés. Exprimer $f(z)$ explicitement en fonction des coordonnées polaires de $w = \phi(z)$.

3.4. Prouver $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1$. Montrer que la fonction $g(h) = f(\frac{1}{h})$, pour $0 < |h| < 1$, est une fonction analytique qui présente en $h = 0$ une fausse singularité. En déduire qu'elle est donnée par une série entière $1 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots$. En calculant $g(h)^4$ établir que $c_1 = -\frac{1}{2}$ et $c_2 = +\frac{1}{8}$.

3.5. Montrer que la série de Laurent de f sur la couronne $1 < |z| < \infty$ est une série entière en $\frac{1}{z}$. Que valent $\int_{|z|=10} f(z)dz$ et $\int_{|z|=10} z f(z)dz$, le cercle étant parcouru dans le sens direct ?

4

4.1. Montrer que les racines du polynôme $P(z) = z^{111} + 3z^{50} + 1$ vérifiant $|z| < 1$ sont simples et qu'il y en a exactement 50. Ind. : on montrera que le polynôme $Q(z) = z^{111} + 3z^{50} = z^{50}(z^{61}+3)$ vérifie $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$ pour $|z| = 1$.

4.2. Prouver l'identité $|1 - \frac{1}{2}z|^2 - |\frac{1}{2} - z|^2 = \frac{3}{4}(1 - |z|^2)$ et justifier l'implication :

$$|z| \le 1 \implies \left| \frac{\frac{1}{2} - z}{1 - \frac{1}{2}z} \right| \le 1$$

Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$. On suppose $\forall z\ |f(z)| \le 1$ et $f(\frac{1}{2}) = 0$. En considérant la fonction $g(z) = f\left(\frac{1-2z}{2-z}\right)$ montrer $|f(\frac{3}{4})| \le \frac{2}{5}$.