Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Semestre d'automne 2004/2005

L305 : ANALYSE COMPLEXE

J'ai réuni en ces 74 pages les feuilles distribuées aux étudiants durant le semestre : une présentation, un résumé du cours, ainsi que les feuilles avec les exercices pour les travaux dirigés. Il y a 236 exercices. Sont aussi joints les sujets du partiel et de l'examen ainsi que leurs corrigés, et le sujet de l'examen de deuxième session.

Jean-François Burnol, le 31 mai 2005.

MATH 305 (Troisième année de Licence)
Semestre d'automne 2004/2005
Université Lille 1

« Analyse Complexe et Séries de Fourier »

Responsable : J.-F. Burnol

Ce cours est, en fait, un cours d'Analyse Complexe ; les séries de Fourier y seront employées comme outil, avec les rappels nécessaires, pour prouver certains des théorèmes les plus importants. La théorie des séries de Fourier en elle-même ne fera l'objet que de quelques compléments ; nous parlerons aussi des intégrales de Fourier, qui peuvent souvent être évaluées grâce à l'analyse complexe.

L'analyse complexe fournit des outils d'une puissance quasi-miraculeuse, en particulier le fameux théorème des résidus. L'énoncer et le prouver est bien sûr l'objectif mais si nous n'y parvenons qu'à la fin, cela signifiera un échec. Car il s'agit aussi de se familiariser avec certaines fonctions remarquables comme la fonction Gamma d'Euler, ou la fonction Thêta de Jacobi, et donc de développer une certaine culture en analyse qui aille au-delà de cosinus, sinus, exponentielle, logarithme !

Nous parlerons de certaines notions de géométrie ou de topologie, mais il s'agit avant tout d'un cours d'analyse ; donc, nous ferons des estimations, nous calculerons des limites, des intégrales, nous ferons des permutations de sommes, etc... Autrement dit même si c'est sans contexte l'une des branches des mathématiques les plus riches en *idées* merveilleuses, c'est aussi la plus riche en *objets* merveilleux. Contrairement à d'autres sujets mathématiques enseignés à l'université, on n'a jamais fini d'apprendre l'analyse complexe. Elle reste toujours un domaine magique, infiniment vaste.

Une part importante de travail personnel est indispensable. Cela commence par préparer à l'avance des séances de T.D. la résolution des problèmes qui vous auront été distribués. Que ce soit pour l'acquisition des notions du cours, pour la résolution des problèmes, ou pour s'exercer sur des exercices plus élémentaires, je vous recommande principalement les ouvrages suivants pour votre travail à la B.U. (attention au fait que la terminologie est par endroit un peu différente de celle de mon cours) :

– *B.V. Chabat (ou Shabat) : Introduction à l'analyse complexe, tome 1. Editions Mir, Moscou.* Nombreux exemplaires à la B.U. Un exposé clair et rigoureux, élégant, avec une belle iconographie et des précisions historiques intéressantes. Quelques exercices. Surtout pour le cours.
– *M. Spiegel : Variables complexes : cours et problèmes. Série Schaum.* Très nombreux exemplaires à la B.U. Environ 25 euros en librairie. Moins rigoureux et moins avancé que le Chabat. Des centaines d'exercices. Surtout pour les exercices.
– *J. Dieudonné : Calcul Infinitésimal. Hermann, éd.* Nombreux exemplaires à la B.U. Clair et rigoureux. Montre comment rédiger avec précision une démonstration, intéressant et varié dans ses thèmes.

En fait le mieux pour apprendre l'analyse complexe, c'est bien d'apprendre l'analyse tout cours : je me sens donc obligé de discuter brièvement de

– *R. GODEMENT : Analyse Mathématique, en quatre volumes, Springer-Verlag.* Quelques exemplaires (3 ou 4) à la B.U. Coûte en librairie 45 euros par tome. Il y a énormément de choses à dire sur ce Traité. Je ne parlerai (brièvement) que des aspects mathématiques (le livre contient, entre autres, de longues prises de position sur des questions de société, en particulier l'emploi des mathématiques par le « complexe militaro-scientifico-industriel »). Il y a des aspects très positifs : les sujets sont exposés dans un ordre reflétant leur développement historique, qui est souvent rappelé (mais de nombreux jugements de valeurs péremptoires et douteux finissent par faire douter le lecteur de la valeur des « rappels historiques »), donc certaines questions sont traitées plusieurs fois successivement ; le livre n'est en rien un livre scolaire, et ne cherche pas à être « pédagogique ». Comme il se doit les développements en séries sont abordés très tôt, même dans le champ complexe (tome I) ; les bases des fonctions holomorphes sont développées avec l'analyse harmonique et les distributions (tome II) ; les théorèmes de Cauchy sont immédiatement suivis d'un intéressant chapitre d'applications (tome III) ; la notion de surface de Riemann est développée dès le tome III. Le tome IV se conclut sur un très alléchant voyage au sein des fontions modulaires. Mais d'autres points posent problème. J'ai déjà mentionné les nombreuses remarques péremptoires. L'attitude vis-à-vis de la théorie de l'intégration est incompréhensible. De nombreux énoncés classiques sont « pollués »par l'emploi de fonctions « réglées » (une notion à l'utilité quasi-nulle) dans les énoncés, alors que souvent l'énoncé (par exemple pour les théorèmes de convergence de séries de Fourier) vaut plus généralement pour les fonctions intégrables au sens de Riemann, et ne prend sa véritable formulation qu'avec l'intégrale de Lebesgue. Un chemin dans le plan complexe est une « primitive d'une fonction réglée », au lieu d'être pris C^1 par morceaux, pour ensuite le prendre simplement continu, si l'on veut. Au lieu de développer l'intégrale de Lebesgue le plus tôt possible, ce qui est très faisable, le lecteur développe l'impression qu'il s'agit d'une chose terrible, tellement terrible que sa présentation en est reléguée au dernier volume, qui est par ailleurs un volume de niveau Master Recherche, Deuxième Année. Parler des distributions et des fonctions analytiques très tôt est excellent ; reléguer l'exposé de la théorie de l'intégrale de Lebesgue (que je n'ai pas lu car vu ce qui est dit avant, j'ai peur de trop tordre mon cerveau à sa lecture) dans le dernier tome (d'un niveau nettement plus avancé que les trois premiers) est incompréhensible. Si vous avez une vocation, un talent, une passion pour les mathématiques, vous pourrez apprendre énormément de choses dans ce Traité. Mais méfiez-vous de ne pas le prendre pour argent comptant.

Un petit voyage sur Internet vous permettra de voir qu'en langue française il n'y a que quelques rares ouvrages disponibles. Ceux étiquetés « Licence Mathématique », bien que sérieux, sont vraiment trop limités dans leur ambition (pour ce que j'ai pu en voir). Par contre en langue anglaise, il y a littéralement des dizaines et des dizaines d'ouvrages. Certains sont mauvais, certains sont excellents. J'en citerai trois, pour ceux parmi vous qui désireront en apprendre plus, soit pendant soit après le semestre :

- *E. STEIN et R. SHAKARCHI : Complex Analysis, Princeton University Press 2003.* Excellent. À acquérir avec le tome intitulé Fourier Analysis. On attend avec impatience le tome suivant qui exposera l'intégrale de Lebesgue.
- *M. ABLOWITZ et A. FOKAS : Complex variables : introduction and applications, 2ᵉ ed. Cambridge University Press, 2003.* Excellent, dans un style moins rigoureux que le cours de Stein. Très accessible au début, très avancé sur la fin, mais tout en restant accessible.
- *E. WHITTAKER et G. N. WATSON : A Course of Modern Analysis, 4ᵉ ed., 1927. Dernière réimpr. : 1996. Cambridge University Press.* Le classique des classiques. La première édition date de 1902, la dernière de 1927. Un peu daté peut-être et difficile pour l'étudiant moderne dans la façon dont les bases de l'analyse sont présentées dans la première partie. Les exercices nécessitent de réfléchir (beaucoup. . .) et les séries sont loin d'être toutes absolument convergentes. On ressent des frissons le long de la colonne vertébrale en feuilletant la deuxième partie. Pour des générations et des générations d'ingénieurs la référence ultime. C'était avant les ordinateurs qui calculent tout, avant la disparition du calcul mental à l'école primaire. Quelques exemplaires à la B.U. : allez le voir et comparez aux textes étiquetés « Licence Mathématique ».

MATH 305[1] (Troisième année de Licence)
Semestre d'automne 2004/2005
Université Lille 1

ANALYSE COMPLEXE
Bilan et perspectives aux deux-tiers du semestre

Déjà huit semaines de cours derrière nous, et il n'y en a donc plus que quatre. Les points fondamentaux de la théorie ont été exposés mais la structure d'ensemble est en attente de consolidation.

Je propose ici un résumé des points essentiels déjà développés, et une avant-première du cours qui est prévu pour les quatre dernières semaines.

Avant cela, je reviens sur mes conseils bibliographiques. Au début du semestre je me suis limité à citer, d'une part, deux ou trois ouvrages disponibles en nombreux exemplaires à la bibliothèque universitaire, et d'autre part, trois autres références remarquables en langue anglaise ; j'avais aussi proposé une critique littéraire d'un traité récent en quatre volumes par un mathématicien français connu. Cette critique et les livres en langue anglaise étaient cités pour les plus motivés, et aussi dans la perspective de la quatrième année.

Je rajoute aujourd'hui deux ouvrages en français, que l'on peut commander chez son libraire, et dont j'ai le sentiment qu'ils pourront vous être utiles :

– par Jean-François Pabion : Éléments d'Analyse Complexe, Licence Mathématiques, éd. Ellipses, 1995 (isbn : 2-7298-9500-0).
  En fin de compte ce livre correspond bien au contenu de mon cours, et en tout cas à ce qu'il est humainement possible de faire en environ douze semaines de deux heures. Il ne contient pas d'exercices, ou plutôt les exercices sont appelés « exemples » et sont entièrement traités dans le corps du texte. Le seul petit reproche que j'ai porte sur les définitions de « simplement connexe » et de « homologue à zéro » à la fin du livre ; je préfère les voir comme des caractérisations dont l'équivalence avec les définitions standard constituent des théorèmes que l'on peut d'ailleurs admettre à ce niveau. Le seul autre petit reproche porte sur le fait justement que l'auteur se limite à un contenu proche de ce que l'on a le temps d'enseigner en un semestre (ou ce que l'on avait le temps avant le LMD et son découpage de l'enseignement en micro-unités). Mais ce défaut, qui explique que je n'ai pas cité ce livre dans un premier temps, constitue aussi une qualité.

– par Bernard Candelpergher : Fonctions d'une variable complexe, éd. Armand Colin, 1995 (isbn : 2-200-21594-0).
  Le livre débute par un court exposé de la théorie, avec environ soixante-dix exercices, entièrement résolus. Puis il propose trente problèmes d'approfondissement, très intéressants, avec leurs solutions complètes. Cette deuxième partie amène la théorie à un niveau plus élevé, et rendra l'ouvrage extrêmement utile aussi pour la quatrième, voire, la cinquième année.

1. Responsable : J.-F. Burnol

Résumé du cours pour les huit semaines écoulées (je ne reprends pas tout, le but n'est pas de rédiger un polycopié, mais un résumé aide-mémoire) :

1

Le cours débute par des rappels sur la fonction exponentielle et par l'étude du logarithme. Deux notions de « détermination continue du logarithme » sont définies : le long d'un chemin γ ne passant pas par l'origine, ou dans un ouvert U ne contenant pas l'origine. Dans les deux cas il y a unicité à une constante dans $2\pi i\mathbf{Z}$ près ; l'existence n'est garantie que dans le premier cas. Cela mène à la notion $\Delta_\gamma \log z$ de la variation du log le long du chemin γ. Lorsque γ est un lacet $\frac{1}{2\pi i}\Delta_\gamma \log z$ est entier et s'appelle « indice de l'origine par rapport au lacet γ », et est noté $\mathrm{Ind}(0,\gamma)$. On introduit la notion d'homotopie : pour des chemins à extrémités fixes, ou pour des lacets. Dans les deux cas on prouve le premier théorème significatif du cours : la variation du log est invariante par homotopie.

2

Le calcul infinitésimal et intégral fait son entrée avec la possibilité, pour des chemins de classe C^1, ou continu et C^1 par morceaux, de représenter $\Delta_\gamma \log z$ par $\int_\gamma \frac{dz}{z}$. Mais pour accéder à ce genre de formule, il faut d'abord définir ce qu'est une forme différentielle ω, puis définir $\int_\gamma \omega$. Cette discussion repose sur la notion de différentiablité d'une fonction $F(x,y)$ au point $z_0 = x_0 + iy_0$, à valeurs complexes. Sa différentielle dF est une application $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{C}$; l'espace, disons W, de ces applications $\mathbf{R}$-linéaires est lui-même un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension 2, de base (dx, dy) et $dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)dy$. Une « forme différentielle » ω sur un ouvert D est une application de D vers W. On l'écrit donc $\omega = Pdx + Qdy$, avec P et Q deux fonctions à valeurs complexes sur D. Si F admet des dérivées partielles continues sur l'ouvert D alors elle est différentiable en tout point de D et $dF = Pdx + Qdy$ avec $P = \frac{\partial F}{\partial x}$ et $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. Une autre $\mathbf{C}$-base de W est donnée par $dz = dx + idy$ et par $\overline{dz} = d\overline{z} = dx - idy$ et l'on a

$$dF = \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\overline{dz}\ ,$$

pour certains opérateurs différentiels $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ et $\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

La notion fondamentale du Cours est la notion de $\mathbf{C}$-dérivabilité : f est $\mathbf{C}$-dérivable au point z_0 si $f'(z_0) = \lim_{h\to 0}(f(z_0+h) - f(z_0))/h$ existe. C'est le cas si et seulement si f est différentiable au point z_0 et si sa différentielle, comme application linéaire $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ est $\mathbf{C}$-linéaire : $df_{z_0}(\left[\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right])$ doit dépendre $\mathbf{C}$-linéairement de $h+ik$, c'est-à-dire, doit être de la forme $A\cdot(h+ik)$ pour un certain $A \in \mathbf{C}$ (qui sera $f'(z_0)$). Cette dernière condition est équivalente à la condition de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\,\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

que l'on écrit aussi $(\overline{\partial} f)(z_0) = 0$, ou encore sous une forme faisant intervenir les parties réelles et imaginaires de f.

La $\mathbf{C}$-dérivabilité d'une fonction en un seul point z_0 n'a aucun intérêt : on définit donc la notion d'holomorphie en disant qu'une fonction est holomorphe au point z_0 si elle est définie et $\mathbf{C}$-dérivable en tout point z d'un voisinage ouvert de z_0 (c'est-à-dire en tout z avec $|z - z_0| < r$ pour un certain $r > 0$). L'Analyse Complexe, qui était appelée dans le passé simplement « La Théorie des Fonctions » est (au moins dans un premier temps) l'étude des fonctions holomorphes.

On définit l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ pour γ de classe C^1 par morceaux et pour $\omega = Pdx + Qdy$ avec P et Q continues. Cette intégrale a une importante propriété d'invariance par reparamétrisation (préservant le sens de parcours). On a aussi besoin d'une autre notion : l'intégrale par rapport à l'élément d'arc ds (« $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$ », noté aussi $|dz|$), pour faire des majorations. On prouve $\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ et aussi la formule fondamentale

$$\Delta_\gamma \log z = \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

pour les chemins C^1 par morceaux.

On démontre la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\partial R} Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

pour l'intégrale sur le bord orienté d'un rectangle R (on fait la démonstration lorsque R est parallèle aux axes de coordonnées). On a supposé P et Q de classe C^1 et l'on a admis que l'intégrale double d'une fonction continue ne dépend pas de l'ordre des intégrations simples.

3

Supposons que f est holomorphe sur le rectangle R. Supposons de plus que f' est une fonction continue, alors comme conséquence de la formule de Green-Riemann, on prouve :

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

pour l'intégrale sur le bord orienté du rectangle. En fait, par une autre méthode découverte par Goursat vers 1900, le résultat peut être établi sans supposer la continuité de f'. Ce théorème fondamental s'appelle donc « théorème de Cauchy-Goursat ». Dans certains livres on le prouve pour les triangles plutôt que pour les rectangles, mais le cas des rectangles suffit déjà pour développer la théorie. En effet on en déduit par des découpages, en remplaçant f par $(f(z) - f(a))/(z - a)$, la formule intégrale de Cauchy pour tout a dans l'intérieur du rectangle :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

De cette formule on déduit que $f(a + h)$ pour $|h|$ petit est la somme d'une série entière convergente $\sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n$. Donc :

TOUTE FONCTION HOLOMORPHE EST ANALYTIQUE

Répétons que nous l'avons prouvé sous l'hypothèse C^1 pour f mais que grâce à Goursat, l'holomorphie sans autre hypothèse suffit. L'on établit par ailleurs (ou l'on sait déjà) que toute somme $g(z)$ d'une série entière est dérivable au sens complexe un nombre infini de fois dans son disque de convergence et que la série entière est en fait la série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n$ de g. Donc

TOUTE FONCTION HOLOMORPHE EST ANALYTIQUE,
TOUTE FONCTION ANALYTIQUE EST HOLOMORPHE, ET
TOUTE FONCTION HOLOMORPHE EST INFINIMENT DÉRIVABLE

La formule intégrale de Cauchy pour $f(a)$ s'accompagne de formules importantes pour les dérivées :

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

On peut donc dire qu'avec les fonctions holomorphes les dérivées se calculent en faisant des intégrales, ou, si l'on préfère, les intégrales se calculent en faisant des dérivées !

Un nouveau développement de la théorie résulte de la considération d'autres contours que les bords de rectangle. Tout d'abord pour un disque D on établit aussi

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

On a choisi de faire cette démonstration en mettant en avant une autre façon d'exprimer les conditions de Cauchy-Riemann : si f est C^1 pour que f soit holomorphe il est nécessaire et suffisant que $\omega = f(z)dz$ soit une forme « fermée » : $\omega = Pdx + Qdy$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. On note qu'une forme « exacte », c'est-à-dire de la forme $\omega = dF$, est automatiquement fermée et l'on prouve réciproquement :

Toute forme fermée sur un disque est exacte sur ce disque

En particulier $f(z)dz$ étant fermée est exacte et donc d'intégrale nulle sur tout lacet tracé dans le disque, en particulier sur tout cercle dans ce disque. Donc pour toute fonction holomorphe sur (un voisinage ouvert de) $|z| \leq R$ on a $\int_C f(z)dz = 0$ pour le cercle $C = \{|z| = R\}$. Comme l'on sait que f est analytique la fonction $(f(z) - f(a))/(z-a)$ (définie comme valant $f'(a)$ en $z = a$) est holomorphe et l'on obtient alors les formules de Cauchy pour un disque D de bord le cercle orienté C :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \qquad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Il résulte de ces considérations que pour une fonction f holomorphe sur un ouvert U, le rayon de convergence du développement en série de f au point a de U est au moins égal à la distance de a au complémentaire de U. Les « inégalités de Cauchy » sont : $|f^{(n)}(z_0)| r^n \leq n! \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$.

4

Une première conséquence notable des formules intégrales de Cauchy est l'important « théorème de Liouville » : une fonction entière qui est bornée est constante. En l'appliquant à $f(z) = 1/P(z)$ pour P un polynôme, on en déduit que si $\deg(P) \geq 1$ alors P a au moins une racine complexe (théorème de d'Alembert-Gauss, aussi appelé « théorème fondamental de l'algèbre »).

Une deuxième conséquence en est la formule de la moyenne

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta\,,$$

dont on peut aussi déduire le théorème (principe) du maximum, sous sa forme locale d'abord : *si $|f|$ a un maximum local en z_0 alors f est une constante au voisinage de z_0.*

L'aspect « analytique » des fonctions holomorphes a comme conséquence plusieurs théorèmes fondamentaux : le « théorème d'unicité analytique » (aussi appelé principe du prolongement analytique) : *si les points d'un ouvert connexe où deux fonctions holomorphes prennent les mêmes valeurs ont un point d'accumulation dans cet ouvert alors les deux fonctions sont partout identiques* et le « principe des zéros isolés », que l'on peut exprimer de plusieurs façons équivalentes, par exemple : *une fonction holomorphe dans un ouvert connexe, non constante, n'a qu'un nombre fini de zéros dans tout compact inclus dans cet ouvert.* On peut aussi donner la version globale du principe du maximum : *si f est holomorphe sur $\overline{\Omega}$ (avec Ω borné, c'est important), alors $\forall z \in \Omega$ $|f(z)| \leq \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$, avec inégalité stricte sauf si f est constante (pour ce dernier point on doit faire aussi l'hypothèse que Ω est connexe)* . Tous ces théorèmes sont fondamentaux que ce soit pour les considérations théoriques comme dans les cas pratiques. Le théorème d'unicité analytique est assez extraordinaire : si vous avez deux « formules » qui donnent le même résultat dans un petit coin, alors, si elles définissent des fonctions holomorphes, on sait a priori que les deux formules (des intégrales, par exemple, ou des sommes infinies, ou des produits infinis, ou l'une d'un type et la seconde d'un autre type) doivent donner le même résultat partout !

Dans ces énoncés la notion d'« ouvert connexe » est importante (connexe = d'un seul tenant). Un espace topologique est connexe si son seul sous-ensemble non vide à la fois ouvert et fermé est lui-même. Pour un ouvert de **C** cela est équivalent à : « deux points quelconques peuvent toujours être reliés par un chemin continu sans sortir de l'ouvert » (connexité par arcs ; cette équivalence nécessite démonstration). Tout ouvert de **C** est une réunion (dénombrable) de composantes connexes qui sont les classes d'équivalence pour la relation « être reliés par un chemin continu ». Plus généralement tout espace topologique est la réunion disjointe de ses composantes connexes qui sont les classes d'équivalence pour la relation « appartenir à un même sous-ensemble connexe (pour la topologie induite) ». Je renvoie au cours de topologie car là cela devient un peu subtil. Indiquons aussi que les sous-ensemble connexes de **R** sont les intervalles, finis ou infinis, contenant ou non leurs extrémités. L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.

5

Les fonctions holomorphes dans une couronne (un anneau) $\mathcal{A} : \{r_1 < |z| < r_2\}$ ont la propriété que $\int_{|z|=r} f(z)dz$ est indépendant de r (sens direct de parcours). Nous le démontrons par la méthode des séries de Fourier (après avoir exprimé Cauchy-Riemann en coordonnées polaires). Il y a alors à nouveau des intégrales de Cauchy, pour f holomorphe sur $\overline{\mathcal{A}}$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{A}} \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{A}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

La notation $\partial\mathcal{A}$ est un peu subtile : elle désigne le bord orienté de $\mathcal{A}$, qui comporte donc deux cercles, le plus grand parcouru dans le sens direct, le petit dans le sens rétrograde. Donc $\partial\mathcal{A}$ a comme support le bord topologique de $\mathcal{A}$ (qui est parfois aussi noté $\partial\mathcal{A}$) mais est un plus subtil car il y a la donnée supplémentaire de l'orientation. Les intégrales ci-dessus sont donc la différence entre l'intégrale sur le cercle extérieur et celle sur le cercle intérieur (direct).

Pour f holomorphe sur $\mathcal{A}$: $\{r_1 < |z| < r_2\}$, on a une représentation unique comme série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \quad (r_1 < r < r_2)$$

Toute série de ce type qui converge simplement vers f est en fait la série de Laurent et converge uniformément sur tout anneau fermé inclus dans $\mathcal{A}$.

Si l'on exprime $f(re^{i\theta})$ par la série de Laurent en calculant les coefficients sur le cercle de rayon r on constate que la série de Laurent n'est pas autre chose qu'une série de Fourier (complexe).

En écrivant $f(z) = \sum_{n<0} a_n z^n + \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ on représente (de manière unique) f comme la somme d'une fonction analytique pour $|z| > r_1$, nulle à l'infini, et d'une fonction analytique pour $|z| < r_2$.

On peut aussi considérer le cas $r_1 = 0$. Cela correspond à la situation d'une fonction holomorphe sur un disque épointé $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. On dit que f a une singularité isolée en z_0. La « partie principale » $\sum_{n<0} a_n(z-z_0)^n$ de la série de Laurent, aussi appelée partie singulière, correspond à l'évaluation en $1/(z-z_0)$ de la série entière $\sum_{k\geq 1} a_{-k}T^k$ de rayon de convergence infini.

On distingue trois types de singularités isolées :

(1) la fausse singularité, ou singularité effaceable. La partie principale de la série de Laurent est nulle. On peut donc prolonger f par continuité en z_0 et f ainsi prolongée est holomorphe en z_0. Par un théorème de Riemann cela se produit si et seulement si f est bornée au voisinage de z_0.

(2) la singularité polaire : la partie principale n'est pas nulle mais ne comporte qu'un nombre fini de termes. On caractérise ce cas par $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$. On définit l'ordre du pôle z_0 par le plus grand entier n tel que $1/(z-z_0)^n$ est présent dans la partie principale.

(3) la singularité essentielle : la partie principale a un nombre infini de termes non nuls. Par le théorème de Casorati-Weierstrass les valeurs prises par f sont alors partout denses dans **C**. On a énoncé aussi le (grand) théorème de Picard.

Dans tous les cas on définit le « résidu de f en z_0 » par la formule $\text{Rés}(f, z_0) = a_{-1}$. Si la singularité est non-existante (fausse), le résidu est nul ; mais bien sûr un résidu nul ne vaut pas dire que l'on n'a pas une vraie singularité. Dans tous les cas :

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz$$

pour tout r tel que f est holomorphe pour $|z - z_0| \leq r$, $z \neq z_0$. Dans le cas d'un pôle simple on a aussi :

$$\text{Rés}(f, z_0) = \lim_{z - z_0} (z - z_0) f(z)$$

et d'ailleurs si cette limite existe cela prouve que l'on a soit une fausse singularité soit un pôle simple. On dispose de formules aussi pour un pôle d'ordre n, $n > 1$.

6. Théorème des résidus

On va énoncer la forme classique du théorème des résidus, comme conséquence du théorème de Green-Riemann, pour un domaine général Ω (domaine = ouvert connexe). Mais on a besoin d'admettre plusieurs choses, outre la formule de Green-Riemann, dont la discussion détaillée est trop longue et délicate pour qu'on puisse le faire sérieusement à ce niveau.

Il y a tout d'abord le Théorème de Jordan : *toute courbe γ continue fermée simple sépare le plan en exactement deux composantes connexes, dont une, V, est bornée, et pour tout $z \in V$ on a Ind(z, γ) indépendant de z et valant soit $+1$ (on dit que γ est parcouru dans le sens direct) soit -1 (on dit que γ est parcouru dans le sens rétrograde).* Dans cet énoncé courbe « fermée » signifie « lacet » et n'a rien à voir avec « fermé » en topologie ; « simple » signifie que le lacet n'a aucune self-intersection : on dit que l'on a une courbe, ou un contour, de Jordan. L'« intérieur » du contour est par définition la composante connexe bornée unique du complémentaire. Même si l'on simplifie considérablement la situation en supposant que γ est de classe C^1 par morceaux (certaines courbes continues remplissent des aires planes de mesure positive, ce qui est impossible si la courbe est différentiable) la preuve du théorème de Jordan est assez délicate.

Ensuite il y a la notion de « domaine Ω à bord régulier » : c'est un ouvert connexe borné dont le bord topologique est la réunion disjointe des supports d'un nombre fini de courbes de Jordan de classe C^1 par morceaux et de dérivées non-nulles. L'une de ses courbes doit alors contenir dans son intérieur toutes les autres, qui elles sont mutuellement extérieures. Le bord orienté $\partial\Omega$ est défini comme la réunion formelle du contour extérieur parcouru dans le sens direct et des contours intérieurs parcourus dans le sens rétrogade. Autrement dit $\int_{\partial\Omega} \omega$ vaut $\int_\Gamma \omega - \sum_j \int_{\gamma_j} \omega$ avec Γ est le contour extérieur et les γ_j les contours intérieurs, tous parcourus dans le sens direct.

Finalement il y a l'énoncé même du théorème de Green-Riemann, qui après tous ses préparatifs, s'écrit en une ligne :

$$\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Il est valable au moins pour P et Q de classe C^1 sur Ω, et continues sur $\overline{\Omega}$. Si l'on admet comme intuitivement évidents les préliminaires topologiques précédents, alors on peut faire la preuve en découpant Ω en sous-domaines, qui après rotations, sont de la forme $x_1 \leq x \leq x_2$, $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$, et pour lesquels la preuve est aussi facile que pour un rectangle.

Cela dit, on a donc

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = 0$$

pour toute fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}$. Puis, comme d'habitude les formules intégrales de Cauchy :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a} dz \qquad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

On notera que pour $a \notin \overline{\Omega}$ toutes ces intégrales donnent 0.

Enfin, pour f holomorphe sur $\overline{\Omega} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$, avec $z_j \in \Omega$ (pas sur le bord), le Théorème des résidus affirme :

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{1\leq j\leq m} \text{Rés}(f, z_j)}$$

Les formules intégrales précédentes sont des cas particuliers du théorème des résidus. Le théorème des résidus permet aussi l'évaluation d'intégrales sur des contours infinis, par exemple on complète un segment $[-R, R]$ en un lacet par un demi-cercle dans le demi-plan supérieur, ou en le bord d'un rectangle de base $[-R, R]$; on évalue l'intégrale sur le contour par le théorème des résidus et on montre que lorsque $R \to \infty$ les parties ajoutées ont une contribution qui tend vers 0.

7

Les formules intégrales de Cauchy permettent de démontrer des théorèmes sur l'holomorphie de fonctions définies par des intégrales ou par des limites de suite.

Soit $g(z, t)$ une fonction pour $z \in U$, $a \leq t \leq b$. On suppose que g est Riemann intégrable en t pour chaque z, et est holomorphe en z pour chaque t, et est bornée lorsque z est dans un compact et $a \leq t \leq b$. Alors $G(z) = \int_a^b g(z, t)dt$ est holomorphe en z et l'on peut dériver sous le signe somme (on prouve en passant que $\frac{\partial}{\partial z} g(z, t)$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$). Par exemple le théorème s'applique lorsque g est continue en le couple (z, t).

Supposons maintenant que $g(z, t)$ n'est définie que pour $a < t \leq b$. On supposera que $g(z, t)$ est holomorphe en $z \in U$ pour chaque t, et est Riemann intégrable pour z fixé, sur $[a', b]$ pour tout $a' > a$. Sous l'hypothèse d'une majoration $|g(z, t)| \leq k(t)$ indépendante de z, avec k bornée sur tout intervalle $[a', b]$, $a' > a$ et avec $\int_a^b k(t)\, dt < \infty$, les intégrales impropres $G(z) = \int_a^b g(z, t)dt$ sont convergentes et l'on prouve que $G(z)$ est holomorphe et que l'on peut dériver sous le signe somme (l'intégrale impropre obtenue est garantie convergente). L'énoncé analogue vaut pour des intervalles infinis : si les intégrales impropres sont dominées indépendamment de z, il y a holomorphie et l'on peut dériver sous le signe somme.

Pour prouver ces résultats on a aussi établi l'important « Théorème de Weierstrass » : *si $f_n \to f$ simplement sur l'ouvert U, uniformément sur tout* *compact $K \subset U$, et si les f_n sont holomorphes alors : f est holomorphe sur U, $f_n' \to f'$ sur U, et cela uniformément sur tout compact $K \subset U$.*

Cela termine le résumé des huit premières semaines. Voici ce qui est prévu pour les quatre semaines suivantes :

(1) Théorème de Mittag-Leffler, théorème de factorisation de Weierstrass, produits infinis. Illustration sur $1/\sin(\pi z)$, $\operatorname{cotg}(\pi z)$, sur $\sin(z)$. Produits infinis pour la fonction Gamma (la fonction Gamma a déjà été rencontrée en feuille de TD, et fera l'objet d'une feuille spéciale).

(2) Invariance par homotopie de $\int_\gamma \omega$ pour ω fermée ; ouverts simplement connexes, existence de primitive, de $\log f$ pour $f \neq 0$. Caractérisation de la simple connexité (= complémentaire connexe ; admis). La formule des résidus générale $2\pi i \sum_j \mathrm{Ind}(z_j, \gamma)\mathrm{Rés}(f, z_j)$ pour un cycle qui « ne tourne pas autour du complémentaire » (prouvée pour un lacet homotopiquement trivial, admis en général).

(3) Principe de la variation de l'argument, théorème de Rouché. Propriété conforme des fonctions holomorphes ; théorème de l'invariance du domaine ; formule d'inversion de Lagrange.

(4) Études des homographies $\frac{az+b}{cz+d}$. Le plan complété, cercles-droites. Équivalence conforme des demi-plans et des disques. Automorphismes du plan, des demi-plans, des disques. Énoncé du théorème d'uniformisation de Riemann.

Une profonde lacune de ce cours est qu'il n'y aura pas eu de discussion des fonctions harmoniques et du noyau de Poisson. Cela est regrettable, car si les formules de Cauchy montrent que l'on peut reconstruire f à partir de ses valeurs sur le bord, on accède à un niveau plus profond de compréhension lorsque l'on réalise que la donnée de $\mathrm{Re}(f)$ sur le bord suffit à elle seule à déterminer f (à une constante imaginaire pure près ; la partie réelle détermine donc la partie imaginaire, et vice versa).

De plus, le faible volume horaire n'a pas permis, à l'exception de la fonction Gamma, et encore, on a renoncé à lui consacrer un cours exclusif en amphi, n'a pas permis donc une chose essentielle, à savoir : se familiariser avec des fonctions complexes remarquables, comme la fonction thêta, ou les fonctions elliptiques, ou les fonctions modulaires. Il aurait été aussi très important de faire des développements asymptotiques d'intégrales dépendant d'un paramètre complexe (fonctions de Bessel, fonction d'Airy).

MATH 305[1] (Troisième année de Licence)
Semestre d'automne 2004/2005
Université Lille 1

FEUILLE 1

1

1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes (ou réels). Que signifie en symboles formels la phrase « (u_n) est une suite de Cauchy » ? Quelle est la principale chose à savoir dans ce contexte ?

1.2. Soit $(u_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes (ou réels), dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E (quelconque). Que signifie la phrase « pour tout x, $(u_n(x))$ est une suite de Cauchy, uniformément par rapport à $x \in E$ » ? Montrer qu'alors chaque suite converge vers une limite $u(x)$, et que la convergence vers $u(x)$ est uniforme par rapport à $x \in E$ (que signifie cette dernière phrase ?)

1.3. Soit $I = [x_0, x_1]$, $J = [y_0, y_1]$, $x_0 < x_1$, $y_0 < y_1$. Soit $g(x, y)$ une fonction conjointement continue en $(x, y) \in I \times J$. Soit $G(x) = \int_{y_0}^{y_1} g(x, y)dy$. Montrer que G est une fonction continue de x.

1.4. On suppose maintenant que $g(x, y)$ admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point (à droite en $x = a$, à gauche en $x = b$), et que la fonction $\frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$ est conjointement continue sur $I \times J$. Montrer que G est une fonction dérivable de x et que

$$G'(x) = \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} g(x, y)\, dy$$

On utilisera le théorème des accroissement finis et la continuité uniforme de $\frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$ sur $I \times J$.

1.5. Retrouvez le résultat précédent sous les mêmes hypothèses en utilisant une intégrale double et le théorème (supposé connu) d'interversion pour les intégrales doubles de fonctions continues.

1.6. On veut généraliser les résultats précédents à des intégrales de Riemann « impropres ». On suppose dorénavant que $J =]0, +\infty[$, que pour tout x, $g(x, y)$ est une fonction Riemann intégrable de y sur tout intervalle $[a, A]$, $0 < a < A < \infty$ et que $\int_0^\infty g(x, y)\, dy$ existe en tant que $\lim_{\epsilon\to 0, A\to\infty} \int_\epsilon^A g(x, y)\, dy$. Une telle limite existe (pourquoi ?) dès que l'on peut trouver une fonction $k(y)$ positive avec $\int_0^\infty k(y)\, dy < \infty$ et $|g(x, y)| \leq k(y)$. Si l'on peut trouver une telle fonction $k(y)$ *indépendante* de x, on dira que l'intégrale impropre $G(x) = \int_0^\infty g(x, y)\, dy$ est **normalement convergente** (ou que la convergence est dominée). Montrer que, si

(1) pour tout x, $g(x, y)$ est une fonction Riemann intégrable de y pour tout intervalle $[a, A]$, $0 < a < A < \infty$,
(2) $G(x) = \int_0^\infty g(x, y)\, dy$ est normalement convergente par rapport à x,
(3) $g(x, y)$ est continue en x, uniformément par rapport à $y \in [a, A]$ pour tout $0 < a < A < \infty$,

alors $G(x)$ est une fonction continue de x.

1. Responsable : J.-F. Burnol

1.7. On rajoute aux hypothèses précédentes

(1) La dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)$ existe, est continue en x uniformément par rapport à $y \in [a, A]$, pour tout $0 < a < A < \infty$, (par exemple c'est le cas si $\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)$ est conjointement continue en (x,y)),

(2) et $\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)$ est pour tout x une fonction Riemann intégrable de y sur tout intervalle $[a, A]$, $0 < a < A < \infty$,

(3) et les intégrales impropres $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}g(x,y)\,dy$ sont normalement convergentes.

Prouvez alors

$$G'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}g(x,y)\,dy$$

On utilisera le théorème des accroissements finis à l'intérieur de l'intégrale exprimant $(G(x+h) - G(x))/h$.

2

Dans ce problème, on travaille uniquement avec des nombres réels.

2.1. Pour tout $n \geq 1$, entier, et tout nombre réel $s > 0$ prouvez

$$\frac{1}{s\,n^s} = \int_n^\infty \frac{dt}{t^{s+1}}$$

On pose $u_m = \int_m^{m+1} \frac{dt}{t^{s+1}}$ et on note $a_{n,m} = u_m$ pour $m \geq n$, $a_{n,m} = 0$ pour $m < n$. En appliquant le théorème sur les séries doubles à $\sum_{n,m\geq 1} a_{n,m}$ prouvez la formule

$$\frac{1}{s}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \int_1^\infty \frac{[t]}{t}t^{-s}\,dt$$

On a noté $[t]$ la fonction « partie entière de t ». Quelle hypothèse faites vous sur s ? Dorénavant on notera pour $s > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

2.2. Prouvez que la fonction $\zeta(s)$ est une fonction infiniment dérivable de s, pour $s > 1$.

2.3. On note $\{t\}$ la fonction $t - [t]$ (« partie fractionnaire de t »). Montrez la formule

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t}t^{-s}\,dt$$

REMARQUE : cette formule pourrait permettre de définir $\zeta(s)$ pour $0 < s < 1$. On parlera de ce point bien plus longuement à l'avenir.

2.4. Prouvez

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\,dt$$

On notera γ cette limite.

2.5. En travaillant à partir de l'intégrale prouvez :

$$\gamma = \lim_{N\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \log(N)$$

On appelle γ la constante d'Euler (ou Euler-Mascheroni).

2.6. On pose pour tout $\epsilon > 0$:

$$E(\epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\epsilon}}{n}$$

Que vaut exactement $E(\epsilon)$? Que vaut $\lim_{\epsilon\to 0}(E(\epsilon) + \log(\epsilon))$?

2.7. On pose pour tout $\epsilon > 0$:

$$F(\epsilon) = \sum_{n\in\mathbf{N}, 1\leq n\leq 1/\epsilon} \frac{e^{-n\epsilon}-1}{n} + \sum_{n\in\mathbf{N}, n>1/\epsilon} \frac{e^{-n\epsilon}}{n}$$

En comparant à des sommes de Riemann, prouvez :

$$\lim_{\epsilon\to 0} F(\epsilon) = \int_0^1 \frac{e^{-u}-1}{u}\,du + \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

2.8. En comparant les deux derniers résultats, prouvez :

$$\gamma = -\int_0^1 \frac{e^{-u}-1}{u}\,du - \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

2.9. En utilisant des intégrations par parties, déduire du résultat précédent :

$$\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-u}\log(u)\,du$$

2.10. On définit pour tout $s > 0$:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt$$

Il s'agit de la fonction Gamma d'Euler. Montrer qu'elle est infiniment dérivable par rapport à $s > 0$ et que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

2.11. Prouvez : $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, déterminer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ et donner un équivalent de $\Gamma(s)$ lorsque $s \to 0$. Déterminer $\Gamma'(n)$ pour tout $n \geq 1$.

2.12. Montrez que pour tout $s > 0$ on a $\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^{\infty} e^{-nt}t^{s-1}\,dt$. Justifiez la formule suivante :

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^t-1}t^{s-1}\,dt$$

Quelle hypothèse faites vous sur s ?

2.13. Prouvez pour $s > 1$:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)t^{s-1}\,dt + \int_1^{\infty} \frac{1}{e^t-1}t^{s-1}\,dt$$

REMARQUE : cette formule pourrait permettre de définir $\zeta(s)$ pour $0 < s < 1$. On parlera de ce point bien plus longuement à l'avenir.

2.14. On note

$$\beta = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)dt + \int_1^{\infty} \frac{1}{e^t-1}\,dt$$

Évaluez directement toutes les intégrales (par exemple après un changement de variable $u = e^t$) et prouvez $\beta = 0$.

2.15. En utilisant ce qui a été démontré sur $\Gamma(s)$ donnez une deuxième démonstration de

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

pour $s \to 1^+$. Rappelez la signification des symboles O et o.

3

Dans ces exercices, la lettre z désigne généralement un nombre complexe.

3.1. On considère la fonction de Bessel d'ordre ν (avec $\nu \in \mathbf{N}$) définie par la formule :

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Quel est le rayon de convergence de la série entière intervenant dans cette formule ?

3.2. Donnez leurs rayons de convergence et prouvez que :

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ ne converge en aucun point du cercle $|z| = 1$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en tout point du cercle $|z| = 1$ **sauf** en $z = 1$.

Pour le dernier point on pourra écrire $z^n = S_n - S_{n-1}$ avec $S_{-1} = 0$, $S_0 = 1$ et faire une « sommation par parties » pour donner une autre expression des sommes partielles de la série, permettant de prouver leur convergence.

3.3. Montrez qu'un entier $k \geq 1$ s'écrit de manière unique sous la forme $2^n(2m+1)$, $n \geq 0$, $m \geq 0$. Puis prouvez pour $|z| < 1$:

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z}\ .$$

On justifiera les interversions de séries. Prouvez aussi :

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} + \cdots = \frac{z}{1-z}\ .$$

4

4.1. On veut montrer qu'un lacet γ dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ est connu à homotopie de lacets près lorsque l'on connaît $N = \mathrm{Ind}(0, \gamma) \in \mathbf{Z}$, au cas où cela n'a pas été déjà fait en cours. Montrer que γ est homotope au lacet $c_N : [0,1] \to \mathbf{C}$, $c_N(t) = e^{2\pi i\, Nt}$. Ind. : on prendra une première homotopie $H(t,u) = |\gamma(t)|^{-u}\gamma(t)$ pour se ramener à $|\gamma(t)| = 1$ pour tout t, puis on définira une deuxième homotopie par

$$H(t,u) = \exp(i\theta(0) + i(1-u)(\theta(t) - \theta(0)) + i\, u\, 2\pi N t)\ ,$$

avec θ une détermination continue de l'argument le long de γ (existence prouvée en cours ; vérifiez que H est une homotopie de *lacets*), puis une troisième homotopie pour ramener le point de départ en 1.

4.2. Dans cet exercice on considère le lacet $\gamma = C_1 \cdot C_2 \cdot C_1^{(-1)} \cdot C_2^{(-1)}$ dans $\mathbf{C} \setminus \{+1, -1\}$ avec $C_1(t) = 1 + \exp(i(2\pi t - \pi))$, $C_2(t) = -1 + \exp(2\pi i\, t)$ $(0 \leq t \leq 1)$. Montrer que ce lacet $\gamma : [0,4] \to \mathbf{C}$ est homotopiquement trival dans $\mathbf{C} \setminus \{+1\}$ et aussi dans $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$, mais pas dans $\mathbf{C} \setminus \{+1, -1\}$. Comme cet exercice est assez subtil, on suivra les indications suivantes : on notera θ_1 la détermination continue de l'argument de $\gamma(t) - 1$ avec $\theta_1(0) = -\pi$, θ_2 la détermination continue de l'argument de $\gamma(t) + 1$ avec $\theta_2(0) = 0$. On note $\Gamma(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$. En étudiant Γ, prouvez qu'il est un lacet et que $\mathrm{Ind}((0,\pi), \Gamma) = +1$. Montrez que si γ était homotopiquement trivial dans $\mathbf{C} \setminus \{+1, -1\}$ alors Γ le serait dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,\pi)\}$. Conclure.

4.3. Un chemin part du coin supérieur gauche d'un carré et termine (en restant dans le carré plein) au coin inférieur droit. Un autre chemin part du coin supérieur droit et termine au coin inférieur gauche. Montrer qu'il existe au moins un point du carré plein par lequel passent les deux chemins (pas forcément au même moment).

MATH 305[1] (Troisième année de Licence)
Semestre d'automne 2004/2005
Université Lille 1

FEUILLE 2

5

5.1. Soit $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbf{C}$ un lacet ($\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$) et $a \in \mathbf{C}$ n'appartenant pas à l'image de γ. Alors $\mathrm{Ind}(a, \gamma)$ est défini comme valant $\mathrm{Ind}(0, \gamma_a)$ avec $\gamma_a(t) = \gamma(t) - a$. On se donne un chemin $\Gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$ avec $\Gamma(0) = a$, $\Gamma(1) = a'$ et tel que $\Gamma([0, 1]) \cap \gamma([t_0, t_1]) = \emptyset$. Montrer $\mathrm{Ind}(a, \gamma) = \mathrm{Ind}(a', \gamma)$. Ind. : montrer que $H(t, u) = \gamma(t) - \Gamma(u)$ est une homotopie de lacets dans $\mathbf{C}^*$ de γ_a vers $\gamma_{a'}$.

5.2. On considère un lacet $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ ne passant pas par l'origine. On suppose qu'il n'existe qu'un nombre fini de $t \in [a, b]$ avec $\gamma(t) \in \Delta =]-\infty, 0[$. On les note $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$. Pour simplifier on supposera $a = t_0$ et donc $t_N = b$. Montrer que pour $t < t_j$ suffisamment proche de t_j le signe de $\mathrm{Im}(\gamma(t))$ ne dépend pas de t, et de même pour $t > t_j$ suffisamment proche de t_j (préciser ce que l'on fait pour $j = 0$ et $j = N$). Notons μ_j le premier signe et μ'_j le deuxième. Si $\mu_j = +$ et $\mu'_j = -$ on dit que γ traverse Δ en $\gamma(t_j)$ dans le sens direct, si $\mu_j = -$ et $\mu'_j = +$ on dit que γ traverse Δ dans le sens indirect ou rétrograde. Sinon on dit que γ touche mais ne traverse pas Δ. En utilisant le fait que $\mathrm{Log}(\gamma(t))$ est une détermination du logarithme sur chaque $]t_j, t_{j+1}[$, prouver $\Delta_{\gamma_j} \arg(z) = \pi(\mu_{j+1} - \mu'_j)$ avec $\gamma_j = \gamma|[t_j, t_{j+1}]$. En déduire que $\mathrm{Ind}(0, \gamma)$ est égal au nombre de valeurs de t (a et b ne comptent que pour une valeur) pour lesquelles γ traverse Δ, comptées positivement si la traversée est directe, négativement si la traversée est rétrograde.

6

À ce stade du cours, on connaît la définition d'une forme différentielle $\omega = P\,dx + Q\,dy$, l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$, on connait l'invariance par reparamétrisation, on sait $\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$, on connait $dz = dx + i dy$, $\overline{dz}$, même aussi $|dz|$ (qui intervient dans les intégrales par rapport à "l'élément d'arc" $ds = |dz|$, c'est un autre type d'intégrale, distinct des $\int_\gamma \omega$) et on sait exprimer $\mathrm{Ind}(0, \gamma)$ comme une intégrale curviligne, mais on ne dispose pas encore des théorèmes de Cauchy.

6.1. On prend le lacet "carré" $\gamma(t)$ valant $\frac{-1-i}{2} + t$, $0 \le t \le 1$, $\frac{+1-i}{2} + i(t-1)$, $1 \le t \le 2$, $\frac{1+i}{2} - (t-2)$, $2 \le t \le 3$ et $\frac{-1+i}{2} - i(t-3)$, $3 \le t \le 4$. Déterminer (si possible, avec un nombre minimal de calculs) :

(1) $\int_\gamma dx$, $\int_\gamma x\,dx$, $\int_\gamma x^2\,dx$, $\int_\gamma y\,dx$, $\int_\gamma y^2\,dx$, $\int_\gamma y^3\,dx$,

(2) $\int_\gamma x\,dx + y\,dy$, $\int_\gamma x\,dy + y\,dx$, $\int_\gamma x\,dy - y\,dx$,

1. Responsable : J.-F. Burnol

(3) $\int_\gamma dz$, $\int_\gamma z\,dz$, $\int_\gamma \bar{z}\,dz$, $\int_\gamma z\,\overline{dz}$, $\int_\gamma x\,dz$, $\int_\gamma z\,dx$,
(4) $\int_\gamma z^{-1}\,dz$, $\int_\gamma z^{-2}\,dz$, $\int_\gamma z^n\,dz$, pour $n \in \mathbf{Z}$.

6.2. Avec les mêmes notations on veut évaluer $\int_\gamma \overline{z^n}\,dz$, $n \in \mathbf{Z}$. Justifier les astuces suivantes (que sont I, II, etc...?)

$$\int_\gamma \overline{z^n}\,dz = \overline{\int_\gamma z^n\,\overline{dz}}$$

$$\int_\gamma z^n\,\overline{dz} = \int_I z^n\,dz - \int_{II} z^n\,dz + \int_{III} z^n\,dz - \int_{IV} z^n\,dz$$

Compléter les calculs, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

6.3. On note C le cercle de rayon 1 parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C z^n\,dz$ et $\int_\gamma z^n\,dz$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, et vérifier qu'il y a toujours égalité. Calculer $\int_C \overline{z}^n\,dz$ et $\int_\gamma \overline{z}^n\,dz$ et trouver les cas d'inégalités.

6.4. Soit C un cercle de centre quelconque, parcouru dans le sens direct, et ne passant pas par l'origine. Calculer $\int_C z^n\,dz$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ dans le cas où C encercle l'origine, et dans le cas où C n'encercle pas l'origine (pour $n \neq -1$ utiliser une primitive, sinon la notion d'indice).

6.5. Soit $0 < a < b$ et soit C le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Montrer :

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz = 2\pi i \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{a-b} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Il suffira de réduire en élément simples, et d'utiliser la notion d'indice. Ou encore, on fera des développements en séries, pour se ramener par étapes aux intégrales $\int_C z^n dz$, $n \in \mathbf{Z}$.

6.6. Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct. Calculer

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} \quad (n \in \mathbf{N})$$

En déduire $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^{2n} t\,dt$ et $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^{2n} t\,dt$. Donner aussi $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^{2n+1} t\,dt$ et $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^{2n+1} t\,dt$. Que valent $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,dt$ et $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\,dt$?

7

7.1. Calculer les dérivées partielles de $\operatorname{Log} z$ en partant de l'expression :

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\,2\operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

et vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour $\operatorname{Log} z$.

7.2. Montrer qu'il existe une fonction continue $f(z)$ unique dans $\Omega = \mathbf{C}$ privé de $]-\infty,-1] \cup [+1,+\infty[$ vérifiant $f(0) = +1$ et $\forall z\ f(z)^2 = 1 - z^2$. On pourra utiliser les fonctions Log et exp de manière appropriée et on en profitera pour établir que $f(z)$ est dérivable au sens complexe. Que vaut $f(i)$ et plus généralement $f(it)$ pour $t \in \mathbf{R}$? Que vaut $f'(z)$?

7.3. (suite). On note $\sqrt{1-z^2}$ la fonction de l'exercice précédent. Montrer :

$$\forall z \in \Omega \quad \sqrt{1-z^2} + iz \notin \quad]-\infty, 0]$$

7.4. (suite). Pour $-1 < x < 1$, $x = \sin(\theta)$, $-\pi/2 < \theta < +\pi/2$, on a $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \sqrt{1-x^2} + ix$, et donc $i\theta = \mathrm{Log}(\sqrt{1-x^2} + ix)$. Cela suggère de définir, pour tout $z \in \Omega$:

$$A(z) = \frac{1}{i}\ \mathrm{Log}(\sqrt{1-z^2} + iz)$$

Vérifier que $A(z)$ est correctement définie et montrer :

$$\forall z \in \Omega \quad \sin(A(z)) = z\ .$$

On notera donc dorénavant $\mathrm{Arcsin}\, z = A(z)$. Montrer que Arcsin est dérivable au sens complexe et que :

$$\forall z \in \Omega \quad \mathrm{Arcsin}'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

7.5. Exprimer $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial r}$ et de $\frac{\partial}{\partial \theta}$ (question de cours de calcul différentiel). Montrer qu'en coordonnées polaires les équations de Cauchy-Riemann pour $f = u + iv$ prennent la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Comment cela s'exprime-t-il avec $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$? Établir à nouveau que $\mathrm{Log}\, z$ vérifie ces équations.

7.6. Le théorème des accroissements finis est-il valable pour les fonctions holomorphes ?

7.7. On considère la fonction de Bessel $J_0(z)$ de première espèce, d'indice 0, qui est définie par :

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\ .$$

Établir que $w = J_0$ vérifie l'équation différentielle (pour $z \neq 0$) :

$$w'' + \frac{1}{z} w + w = 0\ .$$

Se restreignant alors à $z = x > 0$ réel et positif on pourrait naïvement penser que $J_0(x)$ se comporte pour $x \to +\infty$ comme $A\cos(x) + B\sin(x)$ pour A et B bien choisis. En fait c'est $\sqrt{x}\ J_0(x)$ qui a ce comportement. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par $\sqrt{x}\ J_0(x)$?

8. Problèmes supplémentaires

8.1. Soit $I = [t_1, t_2]$, $t_1 < t_2$. On considère un chemin (continu) $\gamma : I \to \mathbf{C}^*$. On a défini en cours la notion de détermination (continue) du logarithme le long de γ : c'est une fonction $l : I \to \mathbf{C}$, continue, et telle que $\exp(l(t)) = \gamma(t)$ pour tout t. Supposons que γ soit un *lacet*, c'est à dire que $\gamma(t_2) = \gamma(t_1)$. On peut alors, pour tout u fixé dans I, considérer le chemin γ_u défini sur I par $\gamma_u(t) = \gamma(t - t_1 + u)$ pour $t_1 \leq t \leq t_2 + t_1 - u$, $\gamma_u(t) = \gamma(t - t_2 + u)$ pour $t_2 + t_1 - u \leq t \leq t_2$. Donner en utilisant l une détermination l_u du log le long de γ_u. En déduire que $\mathrm{Ind}(0, \gamma) = \mathrm{Ind}(0, \gamma_u)$. Retrouver ce dernier résultat par un argument d'homotopie.

8.2. On se donne deux lacets γ_1 et γ_2 dans $\mathbf{C}$ vérifiant

$$\forall t \quad |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t)|$$

Montrer que les lacets γ_1 et γ_2 ne passent pas par l'origine et qu'ils font le même nombre de tours autour de l'origine, c'est-à-dire $\mathrm{Ind}(0, \gamma_1) = \mathrm{Ind}(0, \gamma_2)$. Indication : on trouvera une homotopie de lacets dans $\mathbf{C}^*$ reliant γ_1 à γ_2.

Note : il existe un théorème que nous verrons plus tard sur les fonctions analytiques, le théorème de Rouché, que l'on peut déduire très rapidement de ce résultat. Du coup ce résultat est parfois aussi appelé Théorème de Rouché.

8.3. Soit $0 < a < b < c$ et soit C le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} dz$ selon la valeur de r. On décomposera en éléments simples.

8.4. Le théorème de Weierstrass en analyse réelle dit que toute fonction continue sur un intervalle fermé peut être uniformément approchée par des polynômes. Toute fonction continue sur le cercle unité $|z| = 1$ peut-elle être uniformément approchée par des polynômes en z ? Quel est le bon énoncé dans ce cas (justifié par les théorèmes de deuxième année sur les séries de Fourier) ?

8.5. Exprimer le Laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ en coordonnées polaires.

8.6. Soit $\Omega' = \mathbf{C} \setminus [-1, +1]$. Montrer qu'il existe une fonction unique $g(z)$ définie sur Ω', continue, telle que $g(z)^2 = 1 - z^2$, et telle que $g(2) = +i\sqrt{3}$. On pourrait la noter $\sqrt{}_{[-1,1]^c}(1 - z^2)$, ou plus simplement $\sqrt{}(1 - z^2)$. Quel est le rapport entre $g(z)$ et la fonction $\sqrt{1 - z^2}$ qui a été définie dans un exercice précédent (dans $\Omega = \mathbf{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [+1, +\infty[)$) ?

MATH 305[1] (Troisième année de Licence)
Semestre d'automne 2004/2005
Université Lille 1

FEUILLE 3

Note 1 : certains livres utilisent l'expression "fonction analytique" dans une acceptation un peu subtile, liée au formalisme de Weierstrass[2] pour la notion de prolongement analytique. Pour nous une "fonction analytique" c'est une fonction définie sur un ouvert et qui est partout localement la somme d'une série entière. D'après le cours cela équivaut au fait que la fonction soit "holomorphe", c'est-à-dire partout dérivable au sens complexe (je rappelle aussi qu'une fontion est dite holomorphe sur un ensemble, pas forcément ouvert, si elle est définie et holomorphe sur un ouvert contenant cet ensemble). Les termes "fonction analytique" et "fonction holomorphe" seront donc utilisés dans les énoncés de manière interchangeable.

Note 2 : on considèrera les notions développées dans les exercices comme faisant partie intégrante du Cours ; elles seront considérées acquises pour les feuilles de TDs ultérieures. Il est bien entendu qu'il n'y a pas le temps de tout faire, sauf à y passer trois voire quatre semaines ; il est donc tout aussi évident que vous devrez vous débrouiller pour maîtriser le reste par vous même.

Note 3 : cette feuille porte sur ce moment du cours où l'on est juste au bord d'établir le théorème des résidus. On dispose des formules intégrales de Cauchy[3] pour des disques, des rectangles, des anneaux (séries de Laurent[4]). Cela permet d'anticiper sur les applications du théorème général.

9. Séries de Taylor et de Laurent

9.1. Déterminer les séries de Taylor[5] à l'origine de $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{(1-z)^2}$, $\frac{1}{(1-z)^3}$, $\frac{1}{(1-z)^4}$. Déterminer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$.

9.2. Déterminer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{v_n}$ où u_n est une progression arithmétique de raison a et de premier terme x et v_n est une progression géométrique de raison q et de premier terme y.

9.3. On se donne un polynôme de degré $n \geq 1$ avec $P(0) = a_0 \neq 0$, $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ que l'on factorise sous la forme

$$P(z) = a_0(1 - z/r_1) \ldots (1 - z/r_n) \ .$$

Donner la série de Taylor à l'origine de $\frac{P'(z)}{P(z)}$. En déduire des relations de récurrence permettant d'évaluer les quantités

$$A_k = \frac{1}{r_1^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{r_n^{k+1}}$$

pour $k \in \mathbf{N}$ en fonction des coefficients du polynôme.

1. Responsable : J.-F. Burnol
2. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 1815 Ostenfelde - 1897 Berlin
3. Augustin Louis Cauchy 1789 Paris - 1857 Sceaux
4. Pierre Alphonse Laurent 1813 Paris - 1854 Paris
5. Brook Taylor 1685 Edmonton - 1731 Londres

9.4. On se donne un polynôme de degré $n \geq 1$, $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ que l'on factorise sous la forme $P(z) = a_n(z - r_1)\ldots(z - r_n)$. Donner la série de Laurent à l'origine de $\frac{Q'(w)}{Q(w)}$ avec $Q(w) = P(z)$, $z = 1/w$. En déduire des relations de récurrence permettant d'évaluer les quantités

$$B_k = r_1^k + \cdots + r_n^k$$

pour $k \in \mathbf{N}$ en fonction des coefficients du polynôme.

9.5. Déterminer en tout $z_0 \neq 1$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{z-1}$.

9.6. Déterminer en tout $z_0 \neq 1,\ 2$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$. On aura intérêt à réduire en éléments simples. De plus on demande d'indiquer le rayon de convergence *avant* de déterminer explicitement la série de Taylor.

9.7. Déterminer en tout point z_0 où elle est définie la série de Taylor de la fonction $\frac{1}{z^3-1}$. On déterminera son rayon de convergence en fonction de z_0.

9.8. Déterminer les séries de Laurent à l'origine des fonctions suivantes :

(1) $f(z) = \frac{1}{z}$
(2) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
(3) $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$

9.9. Déterminer la partie singulière et le terme constant des séries de Laurent à l'origine pour les fonctions :

(1) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$
(2) $f(z) = \frac{1}{\sin z - \operatorname{sh} z}$
(3) $f(z) = \frac{1}{z \sin(z) \operatorname{sh}(z)}$

9.10. Donner les séries de Laurent de $1/(z-1)(z-2)$ dans chacune des trois régions annulaires $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < \infty$.

9.11. Que pensez vous du calcul suivant de Johann Bernoulli[6] pour déterminer $\ln(-x)$, $x > 0$:

$$2\ln(-x) = \ln((-x)^2) = \ln(x^2) = 2\ln(x) \quad \Rightarrow \quad \ln(-x) = \ln(x)$$

De plus, insiste Johann, on a

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{(-1)}{-x} = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln(x)$$

donc $\ln(-x)$ et $\ln(x)$ sont la même fonction. Commentez ces deux raisonnements et leur conclusion. On pourra s'appuyer sur les épaules de géant de Euler[7], ou, par défaut, si les 72 volumes[8] de ses Œuvres (pas encore complètement éditées d'ailleurs) ne sont pas encore disponibles dans votre bibliothèque de quartier, sur les épaules de votre cours d'Analyse Complexe.

6. Johann Bernoulli, 1667 Bâle - 1748 Bâle
7. Leonhard Euler, 1707 Bâle - 1783 St Petersbourg
8. ce n'est pas une blague, il y en a vraiment au moins 72 à l'heure actuelle...

9.12. Déterminer en tout $z \in \Omega$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction $\operatorname{Log} z$ (Ω étant l'ouvert habituel complémentaire de l'axe réel négatif). Soit z_0 avec $\operatorname{Re}(z_0) < 0$. Soit R_0 le rayon de convergence pour z_0 et soit $f(z)$ la somme de la série dans $D(z_0, R_0)$. A-t-on $f(z) = \operatorname{Log} z$ dans $D(z_0, R_0)$?

9.13. Quelles sont les images par $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ de $|z| < 1$, de $|z| = 1$, de $|z| > 1$? Existe-t-il une fonction analytique, même continue, « $l(z) = \log \frac{1}{z-1}$ », normalisée par $l(2) = 0$, dans $|z| > 1$? Donner le meilleur substitut possible, et un développement en série convergent pour $|z| \to \infty$.

9.14. On considère la fonction analytique $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ dans l'ouvert U complémentaire de $\pi\mathbf{Z}$. Vérifier que la fonction $\sin(z)$ ne s'annule jamais dans U. Déterminer en fonction de z_0 le rayon de convergence du développement en série de Taylor en tout $z_0 \in U$ donné. Remarque : il est déconseillé de chercher à résoudre ce problème en déterminant explicitement la série de Taylor.

9.15. Série binomiale de Newton. Montrer $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$ lorsque $-\pi < \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) < +\pi$. Montrer $\operatorname{Log}(1 + h + k + hk) = \operatorname{Log}(1 + h) + \operatorname{Log}(1 + k)$ lorsque $|h| < 1$, $|k| < 1$.
Soit $a \in \mathbf{C}$. On considère sur le disque $D(0, 1)$ la fonction analytique $f_a(z) = \exp(a \operatorname{Log}(1 + z))$. Montrer pour $a \in \mathbf{Z}$: $f_a(z) = (1 + z)^a$. Pour $a = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$ montrer $f_a(z)^q = (1 + z)^p$. Montrer $f_{a+b} = f_a f_b$. On notera donc dorénavant $f_a(z) = (1 + z)^a$. Que vaut $f_a'(z)$? Donner explicitement la série de Taylor de f_a à l'origine (formule de Newton [9]) et déterminer son rayon de convergence. La formule $\exp(a \operatorname{Log}(1 + z))$ définit une fonction analytique, que nous noterons aussi $(1 + z)^a$, dans $\mathbf{C} \setminus \{] - \infty, -1]\}$. Que valent $\lim_{\epsilon \to 0^+} f_a(z + i\epsilon)$ et $\lim_{\epsilon \to 0^+} f_a(z - i\epsilon)$ pour $-\infty < z < -1$?

9.16. Une série non prolongeable. On considère la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$. Quel est son rayon de convergence ? On note $f(z)$ sa somme. Que vaut $\lim_{t \to 1} f(t)$? (on ne considère que des valeurs réelles positives de t ; on minorera f par des sommes finies). Plus généralement que vaut $\lim_{t \to 1} f(tw)$, lorsque w est une racine 2^Nième de l'unité et t tend vers 1 par valeurs réelles inférieures à 1 ? Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur $D(0, 1) \cup \{w\}$, où $|w| = 1$, qui coïncide avec f sur $D(0, 1)$. Pour tout $z_0 \in D(0, 1)$ déterminer le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0.

9.17. Une singularité non isolée. Montrer que la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n z - 1}$$

est analytique dans $U = \mathbf{C} \setminus \{0, 2^{-n}, n \in \mathbf{N}\}$ (on montrera que la série converge normalement sur tout sous-ensemble de U qui est à une distance strictement positive de $\{2^{-n}, n \in \mathbf{N}\}$, et on invoquera un théorème de Weierstrass si il a été vu en cours ; sinon on montrera que les séries des dérivées partielles ont la même propriété ce qui permet de calculer les

9. Isaac Newton 1643 Woolsthorpe - 1727 Londres

dérivées partielles de f terme à terme et donc d'établir les équations de Cauchy-Riemann [10]). La fonction f possède-t-elle un développement en série de Laurent à l'origine ? Quelle est la série de Fourier de la fonction $f(Re^{i\theta})$ pour $R > 0$, $R \neq 2^{-n}, n \in \mathbf{N}$ (on utilisera des séries doubles) ? Que vaut $\int_{|z|=R} f(z)dz$ (sens direct de parcours) en fonction de R ?

9.18. Singularités effaceables. Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé $D(a,r) \setminus \{a\}$. On suppose que f est bornée au voisinage de a. Montrer que la fonction $h(z) = (z-a)^2 f(z)$, $h(a) = 0$, est holomorphe sur $D(a,r)$. Soit $c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$ sa série de Taylor. Montrer $c_0 = c_1 = 0$. En déduire qu'en posant $f(a) = c_2$ la fonction f est holomorphe sur $D(a,r)$ y-compris en a. Note : ce « théorème de Riemann de la singularité effaceable (ou apparente) » aura probablement été aussi montré en cours, lors de la discussion des séries de Laurent.

10. Nombres de Bernoulli

10.1. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$, $f(0) = 1$ est analytique dans $\mathbf{C} \setminus \{2k\pi\, i | k \in \mathbf{Z}, k \neq 0\}$. Que vaut $\lim_{z\to 2\pi i} |f(z)|$? Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor de f en $z = 0$? On écrira dorénavant cette série sous la forme

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!} \;,$$

ce qui définit les nombres de Bernoulli [11] $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, …, $B_{16} = -\frac{3617}{510}$, …

10.2. Vérifier que $\frac{1}{e^z-1} + \frac{1}{2}$ est une fonction impaire et en déduire que les nombres de Bernoulli d'ordres impairs sont nuls, sauf B_1.

10.3. On se donne un paramètre $x \in \mathbf{C}$ quelconque et on considère la série de Taylor à l'origine de la fonction analytique $f(x,z) = \frac{ze^{xz}}{e^z-1}$. Quel est son rayon de convergence ? On écrit la série sous la forme :

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{z^k}{k!} \;.$$

Montrer que $B_k(x)$ est un polynôme unitaire de degré k que l'on explicitera en fonction des nombres de Bernoulli et des coefficients du binôme. En déduire, pour $k \geq 1$:

$$B_k'(x) = kB_{k-1}(x)$$

10.4. Prouver en utilisant la définition de $B_k(x)$:

$$B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$$

Montrer $f(x,z) = f(1-x,-z)$ et en déduire

$$B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$$

10. Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826 Breselenz - 1866 Selasca

11. Jacob (Jacques) Bernoulli 1654 Bâle - 1705 Bâle

10.5. Les nombres et polynômes de Bernoulli apparaissent dans la solution[12] fournie par Jacob Bernoulli au problème d'évaluer les sommes de puissances $1^k + 2^k + \cdots + n^k$. Quelle formule proposez vous ?

11. Un théorème d'Abel

11.1. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série convergente de nombres complexes, de somme S. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est au moins 1. On notera $f(z)$ sa somme dans $D(0,1)$.

11.2. En évaluant les sommes partielles par une sommation par parties (sommation d'Abel[13]) prouver que l'on a $\lim_{r\to 1} f(r) = S$, où la limite est prise par valeurs réelles inférieures à 1 de r.

11.3. Soit $R < 1$ et soit S_R l'ensemble fermé comprenant le disque fermé $\overline{D}(0,R)$ ainsi que tous les segments $[z,1]$ que l'on peut former d'un point de ce disque vers 1. Faites un petit joli dessin, et donner la valeur de l'angle que fait en 1 cet ensemble, en fonction de R.

11.4. En reprenant la technique de sommation d'Abel, montrer que les polynômes $\sum_0^N a_n z^n$ convergent uniformément sur S_R lorsque $N \to \infty$ (on pourra montrer qu'ils sont uniformément de Cauchy). En déduire que la fonction $g(z)$ définie sur S_R par $g(z) = f(z)$ pour $|z| < 1$, $g(1) = S$ est continue sur S_R et donc que $\lim_{z\to 1, z\in S_R} f(z) = S$.

11.5. Utiliser le théorème d'Abel pour sommer $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$; trouver d'autres exemples intéressants.

12. Deux séries de Fourier remarquables

12.1. Soit Ω l'ouvert habituel sur lequel est défini $\operatorname{Log} z$. Justifier pour tout $z \in \Omega$

$$\operatorname{Log}(z) = \int_0^1 \frac{z-1}{1+t(z-1)} dt \,,$$

et donner une formule intégrale explicite pour le reste $R_N(z)$ dans :

$$\operatorname{Log}(z) = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{N-1}\frac{(z-1)^N}{N} + R_N(z) \,.$$

12.2. On suppose $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$ pour un certain $\delta \in]0,1[$. Prouver

$$|R_N(z)| \leq \frac{1}{\delta}\frac{|z-1|^{N+1}}{N+1}$$

On minorera $|1 + t(z-1)|$ par δ.

12.3. En déduire que la série de Taylor de Log au point 1 est uniformément convergente sur le compact $\{|z-1| \leq 1, \delta \leq \operatorname{Re}(z)\}$.

---

12. dans *Ars Conjectandi* paru en 1713 de manière posthume ; la notation ancienne (disons B_n^*) est reliée à la moderne par $B_n^* = (-1)^{n-1} B_{2n}$, $n \geq 1$.

13. Niels Henrik Abel, 1802 Frindoe - 1829 Froland

12.4. Pour $-\pi < \phi < +\pi$ on pose $z = 1 + e^{i\phi}$. Déterminer les coordonnées polaires $|z|$ et $\mathrm{Arg}(z)$ de z en fonction de ϕ. Déduire de ce qui précède les identités suivantes, pour tout $\phi \in]-\pi, +\pi[$:

$$\log(2\cos\frac{\phi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos k\phi}{k}$$
$$\frac{\phi}{2} = \sum_{k=1}(-1)^{k-1}\frac{\sin k\phi}{k}$$

et le fait que ces séries sont uniformément convergentes sur tout intervalle $[-\pi+\epsilon, +\pi-\epsilon]$ $(0 < \epsilon < \pi)$.

12.5. Ces séries sont célèbres pour illustrer la différence entre convergence simple et convergence uniforme, et aussi le fait qu'une somme infinie de fonctions continues n'est pas forcément continue. Théorème typique : On se donne une suite de fonctions $f_n(x)$ sur $]a, b]$ qui convergent uniformément sur $]a, b[$ vers une fonction $f(x)$. De plus on suppose les f_n toutes continues en b (à gauche). Alors les deux limites $\lim f_n(b)$ et $\lim_{x\to b} f(x)$ existent [14] et sont égales (pour la preuve on montre que la suite $(f_n(x))$ est uniformément de Cauchy sur $]a, b]$ et donc uniformément convergente sur $]a, b]$). Les séries de la question précédente sont-elles uniformément convergentes sur $]-\pi, +\pi[$?

12.6. Rappelons que $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ est le premier polynôme de Bernoulli. Notons $B_1^*(x)$ la fonction 1-périodique qui coïncide avec B_1 sur $]0, 1[$ et qui vaut 0 sur $\mathbf{Z}$. En posant $\phi = 2\pi x - \pi$ pour $0 < x < 1$ montrer :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad B_1^*(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k\pi x)}{k\pi}\ .$$

Vérifier la compatibilité avec l'énoncé de deuxième année dit “Théorème de Dirichlet” (en fait le vrai théorème prouvé par Dirichlet [15] est plus fort) portant sur la convergence simple de la série de Fourier [16] d'une fonction $f(x)$ 1-périodique et de classe C^1 sauf (peut-être) en un nombre fini de points où elle-même et sa dérivée admettent des limites à gauche et à droite.

12.7. **. Pendant que j'y suis je rappelle l'énoncé important : « *toute fonction 1-périodique continue sur $\boldsymbol{R}$ et de classe C^1 par morceaux est la limite de sa série de Fourier avec convergence uniforme* ». Vérifiez que vous avez cela dans vos notes de cours des années précédentes, sinon allez chercher un bouquin avec une démonstration (en voici une très abrégée : $\left|\sum_{m\le|k|\le n} c_k e^{ikx}\right|^2 \le 2\sum_m^n \frac{1}{k^2}\sum_{m\le|k|\le n}|kc_k|^2$ plus inégalité de Bessel [17] pour f').

12.8. **. Si vous établissez l'énoncé important suivant sans aide et sans indications, c'est que vous êtes très fort(e) : « *il existe une constante $A < \infty$ telle que pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ et tout $M \in \boldsymbol{N}$ on a* $\left|\sum_{k=1}^{M}\frac{\sin(2k\pi x)}{k\pi}\right| \le A.$ » Voici une question plus simple : l'énoncé est-il vrai avec des cosinus à la place des sinus ?

14. lorsque l'on dit qu'une limite existe il est presque toujours entendu que l'on exclut le cas d'une limite infinie, et c'est bien ce qui est sous-entendu ici.
15. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805 Düren - 1859 Göttingen
16. Jean Baptiste Joseph Fourier 1768 Auxerre- 1830 Paris
17. Friedrich Wilhelm Bessel 1784 Minden - 1846 Königsberg

13

13.1. On rappelle que l'on a obtenu pour $-\pi < \phi < +\pi$:

$$\log(2\cos\frac{\phi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos k\phi}{k} \quad \text{et} \quad \frac{\phi}{2} = \sum_{k=1}(-1)^{k-1}\frac{\sin k\phi}{k} ,$$

et le fait que ces séries sont uniformément convergentes sur tout intervalle $[-\pi + \epsilon, +\pi - \epsilon]$ $(0 < \epsilon < \pi)$.

(1) Montrer $\frac{\pi^2}{16} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\phi}{2} d\phi = \sum_{k \text{ impair}} \frac{1}{k^2} - 2\sum_{k\equiv 2(4)} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}S$ avec $S = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}$. En déduire $S = \pi^2/8$.

(2) Montrer $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} + S$ et en déduire $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(3) Montrer, pour $0 < \epsilon < \pi$: $\int_0^{\pi-\epsilon} \log(2\cos\frac{\phi}{2})d\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\epsilon)}{k^2}$ et en déduire

$$\int_0^{\pi} \log(2\cos\frac{\phi}{2})d\phi = 0$$

(4) Plus généralement que vaut $\int_0^{\pi} \cos(n\phi)\log(2\cos\frac{\phi}{2})d\phi$ pour $n \in \mathbf{N}$?

(5) Que valent $\int_0^1 \log\sin\frac{\pi x}{2}dx$ et $\int_0^1 \log\cos\frac{\pi x}{2}dx$? On peut aussi obtenir ce résultat classique par une astuce ad hoc.

13.2. Le deuxième polynôme de Bernoulli est $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. On a $B_2'(x) = B_1(x)$. Vérifier $\int_0^1 B_2(x)dx = 0$. Soit $B_2^*(x)$ la fonction 1-périodique qui coïncide avec B_2 sur $[0, 1[$. Montrer que B_2^* est paire, continue, C^1 par morceaux. Quelle est sa série de Fourier ? Retrouver $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

14. Développement en fractions de $\frac{\pi}{\sin \pi z}$

Le but de ce problème est d'établir la formule importante :

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \lim_{\substack{N\to+\infty \\ M\to+\infty}} \sum_{\substack{-M\leq n\leq N \\ n\neq 0}} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$$

pour tout z complexe, non-entier bien sûr.

14.1. Montrer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$ en regardant d'abord les sommes partielles d'ordre pair. En déduire l'existence de la limite pour N et M tendant indépendamment vers l'infini dans l'équation ci-dessus, et le fait que l'on peut donc se contenter de prouver :

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}\right) = 0$$

14.2. Notons

$$g_N(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} - \sum_{-N\leq n\leq N}(-1)^n\frac{1}{z-n}$$

Montrer que g_N s'étend par continuité et est une fonction holomorphe sur le carré plein $\mathcal{R}_N$: $\{|x| \leq N + \frac{1}{2}, |y| \leq N + \frac{1}{2}\}$. En déduire par la formule intégrale de Cauchy pour un rectangle :

$$g_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \frac{g_N(w)}{w-z}dw$$

où C_N est le bord de $\mathcal{R}_N$ parcouru dans le sens direct, dès que N est suffisamment grand pour que z soit dans l'intérieur du carré.

14.3. En utilisant une décomposition en éléments simples et la notion d'indice d'un lacet autour d'un point, montrer

$$\int_{C_N} \frac{1}{w-n}\frac{1}{w-z}dw = 0 \ ,$$

pour n et z tous deux dans l'intérieur de $\mathcal{R}_N$. En déduire :

$$g_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \frac{\pi}{\sin \pi w}\frac{1}{w-z}dw$$

pour z dans l'intérieur du carré $\mathcal{R}_N$.

14.4. Montrer que g_N est impaire et donc $g_N(0) = 0$. Montrer

$$g_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \frac{\pi}{\sin \pi w}\frac{z}{w(w-z)}dw$$

pour z dans l'intérieur du carré $\mathcal{R}_N$.

14.5. On rappelle l'identité $\sin(w) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) + i\cos(x)\operatorname{sh}(y)$ pour $w = x+iy$. Montrer $|\sin w|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ ($x, y \in \mathbf{R}\dots$). En déduire $|\sin(\pi w)| = \operatorname{ch}(\pi y) \geq 1$ sur les bords verticaux du carré et $|\sin(\pi w)| \geq \operatorname{sh}(\pi(N+\frac{1}{2})) \geq \operatorname{sh}(\pi\frac{1}{2}) = 2.301\dots \geq 1$ sur les bords horizontaux.

14.6. Montrer alors pour $N + \frac{1}{2} > |z|$: $|g_N(z)| \leq \frac{4|z|}{N+\frac{1}{2}-|z|}$, et conclure la preuve de

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$$

avec d'ailleurs convergence uniforme pour $|z|$ borné.

14.7. **. Reprendre la même technique et prouver aussi :

$$\forall z \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{Z} \quad \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{-N\leq n\leq N}\frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

avec une convergence uniforme pour $|z|$ borné.

14.8. ** Formules d'Euler pour $\zeta(2k)$. En utilisant une série double déduire du résultat précédent l'expression des coefficients du développement de Laurent de $\pi\operatorname{cotg}(\pi z)$ à l'origine en fonction des $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$. Puis exprimer $\operatorname{cotg}(\pi z)$ en fonction de $1/(e^{2\pi iz}-1)$ et en déduire l'expression de sa série de Laurent en fonction des nombres de Bernoulli B_{2k}, $k \geq 1$. En comparant les deux résultats, obtenir les formules d'Euler évaluant les $\zeta(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli.

14.9. **. Donner pareillement via un argument de série double la série de Laurent de $\frac{1}{\sin(z)}$ à l'origine en fonction des valeurs aux entiers pairs de $\zeta(s)$ et aussi en fonction des nombres de Bernoulli.

14.10. **. Donner le développement en série à l'origine de la fonction tangente $\operatorname{tg} x = T_1 x + T_3\frac{x^3}{3!} + T_5\frac{x^5}{5!} + \dots$ à l'aide des nombres de Bernoulli. Montrer (c'est peut-être difficile, je n'y ai absolument pas réfléchi) que les « nombres tangents » $T_1 = 1$, $T_3 = 2$, $T_5 = 16$, …de ce développement sont des nombres entiers.

14.11. **. Les « nombres d'Euler » sont ceux qui donnent le développement en série à l'origine de la fonction $1/\operatorname{ch}(x)$:

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}$$

Montrer que les nombres d'Euler d'ordres impairs sont nuls. Quel est alors le développement en série de $1/\cos x$? Quelle est la représentation comme fraction rationnelle « infinie » de $1/\cos x$? Exprimer les sommes infinies alternées $1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \dots$ à l'aide des nombres d'Euler. En déduire que les coefficients (« nombres sécants[18] ») de $1/\cos x = 1 + 1\frac{x^2}{2!} + 5\frac{x^4}{4!} + \dots$ sont tous positifs. Montrer aussi (c'est peut-être difficile, je n'y ai pas réfléchi) que les nombres d'Euler sont des nombres entiers, qui sont impairs.

14.12. * Le triangle sécante-tangente.** On construit un triangle de nombres entiers ainsi : la première ligne ne comporte que « 1 », les lignes sont construites alternativement de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche (règle du laboureur) en débutant par un 0 puis chaque nouveau coefficient est la somme de celui qui le précède dans sa ligne et de celui qui le précède dans la ligne précédente.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & 2 & & 2 & & & & \\
 & & & 5 & & 5 & & 4 & & 2 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 5 & & 10 & & 14 & & 16 & & 16 & & \\
 & 61 & & 61 & & 56 & & 46 & & 32 & & 16 & & 0 & \\
0 & & 61 & & 122 & & 178 & & 224 & & 256 & & 272 & & 272 \\
 & & & & & & & \cdots & & & & & & &
\end{array}$$

Alors, les entrées non-nulles à gauche 1, 1, 5, 61, …sont les nombres sécants, et les entrées non-nulles à droites les nombres tangents 1, 2, 16, 272.… Je n'ai absolument pas réfléchi et n'ai a priori aucune idée de la démonstration. À vous de voir.

15. Le produit infini de Euler pour $\sin(z)$

Euler a eu l'idée, totalement géniale, que $\sin(z)$ pouvait se concevoir comme un "polynôme de degré infini", et donc admettre une factorisation mettant en évidence que ses seuls zéros sont les $n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. La formule est la suivante :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad \sin(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2})$$

La notion de produit infini est un peu plus subtile que celle de somme infinie, mais dans les deux cas il s'agit de limites, donc la formule d'Euler se lit : $\forall z \in \mathbf{C} \quad \sin(z) = \lim_{N\to\infty} z \prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2})$. Le cours donnera une discussion générale des produits infinis, et de certains aspects particuliers liés aux fonctions de la variable complexe. On peut se débrouiller sans dans le cas présent. On établira la formule sous la forme :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad \sin(\pi z) = \lim_{N\to\infty} \pi z \prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

18. dans le monde anglo-saxon, la fonction $1/\cos x$ s'appelle la fonction « sécante » et est notée $\sec(x)$. La fonction $1/\sin x$ s'appelle cosécante et est notée $\csc(x)$.

On fixe une fois pour toutes $R > 0$, et on va montrer la formule pour $|z| < R$. En tout cas elle est vraie pour $z = 0$.

15.1. Soit N avec $N > R$ et notons $f_N(z) = \sin(\pi z)/\pi z \prod_{n=1}^{N}(1 - \frac{z^2}{n^2})$, prolongé par continuité en les n, $|n| \leq N$. Montrer que f_N est holomorphe et ne s'annule pas sur $D(0, R)$.

15.2. Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}^*$ le chemin $\gamma(t) = f_N(tz)$. On a donc $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = f_N(z)$, et $\gamma(t) \neq 0$ pour tout t. Par un théorème démontré en cours (lequel ?) on a $\gamma(1) = \gamma(0) \exp\left(\int_\gamma \frac{dw}{w}\right)$. En déduire :

$$f_N(z) = \exp\left(\int_0^1 \frac{f_N'(tz)}{f_N(tz)} z dt\right)$$

15.3. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant la convergence uniforme pour $|z|$ borné du développement en fractions de $\pi \operatorname{cotg}(\pi z)$, montrer que pour N suffisamment grand on a $|f_N'(w)| \leq \epsilon |f_N(w)|$ pour tout $w \in D(0, R)$, puis en déduire

$$N \gg 0 \quad |z| < R \implies \quad |f_N(z)| \leq e^{\epsilon |z|} \leq e^{\epsilon R}$$

15.4. En déduire $\lim_{N\to\infty} f_N(z) = 1$, uniformément sur $D(0, R)$. Conclure la preuve du produit infini de Euler pour $\sin(z)$.

16

16.1. **. Soit $x \in \mathbf{C}$. On a la série uniformément convergente pour $|z| \leq 2\pi - \epsilon$:

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = 1 + B_1(x)z + B_2(x)\frac{z^2}{2} + \ldots$$

On note C_a le bord orienté du carré $\mathcal{R}_a$ centré en l'origine, de côté $2a$.

(1) Montrer pour $0 < a < 2\pi$:

$$B_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} \frac{2}{z^3} dz$$

(2) Soit $N \in \mathbf{N}$ et soit $f_N(z) = \frac{2e^{xz}}{z^2(e^z-1)} + \sum_{|k|\leq N, k\neq 0} \frac{e^{2k\pi i x}}{2k^2\pi^2} \frac{1}{z - 2k\pi i}$. Montrer que f_N s'étend par continuité en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}_{2\pi(N+\frac{1}{2})} \setminus \{0\}$. En déduire par le théorème de Cauchy-Goursat [19] pour des rectangles $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} f_N(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2\pi(N+\frac{1}{2})}} f_N(z)dz$.

(3) En déduire en utilisant la notion d'indice :

$$B_2(x) = \sum_{1\leq k\leq N} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^2\pi^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2\pi(N+\frac{1}{2})}} \frac{2e^{xz}}{z^2(e^z - 1)} dz$$

(4) $\boxed{\text{On suppose } 0 < x < 1.}$ Retrouver le résultat de l'exercice précédent :

$$x^2 - x + \frac{1}{6} = B_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^2\pi^2}$$

Par continuité le résultat vaut aussi en $x = 0$ et $x = 1$. Déterminer alors la valeur de $\zeta(4)$ comme conséquence de l'égalité de Bessel-Parseval [20].

Pour des biographies de mathématiciens :

http ://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

19. Edouard Jean-Baptiste Goursat 1858 Lanzac - 1936 Paris
20. Marc-Antoine Parseval des Chênes 1755 Rosières-aux-Saline - 1836 Paris

MATH 305 [1] (Troisième année de Licence) Semestre d'automne 2004/2005 Université Lille 1

FEUILLE 4

Note 1 : rappelons une fois pour toutes que $\int_{|z|=R} f(z)dz$ est une notation commode, mais abusive, qui désigne l'intégrale pour un parcours du cercle dans le sens trigonométrique (= direct = positif = sens contraire aux aiguilles d'une montre).

Note 2 : la notation $\int_{\mathbf{R}} f(x)dx$ (pour f Riemann intégrable sur tout intervalle borné) n'est utilisée qu'en cas de convergence absolue ; c'est une condition plus stricte que l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ qui signifie par définition $\lim_{\substack{A\to+\infty \\ A'\to-\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx$; cette limite, si elle existe vaut aussi $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$, mais cette dernière peut exister sans que cela soit le cas de la précédente (il n'y a qu'à prendre f impaire). La notation $\int_0^\infty f(x)dx$ signifie $\lim_{A\to\infty} \int_0^A f(x)dx$. Si elle est absolument convergente, et seulement dans ce cas, on peut la noter aussi $\int_{\mathbf{R}^+} f(x)dx$ ou $\int_{[0,\infty[} f(x)dx$. Enfin, pour une intégrale complexe $\int f(z)dz$, la notation $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ est à proscrire en général puisqu'a priori le résultat dépend du chemin suivi pour aller de z_1 à z_2 (il est vrai que cette dépendance n'existe pas lorsque l'on travaille dans un ouvert simplement connexe, comme on le verra plus tard dans le cours) ; on admet par contre $\int_{[z_1,z_2]} f(z)dz$ qui représente l'intégrale prise le long du segment orienté $[z_1, z_2]$. Il y a cependant un léger risque de clash avec la notation $\int_I f(x)dx$ pour une intégrale au sens de Lebesgue sur un intervalle $I = [x_1, x_2]$, puisque $\int_{[1,0]} f(z)dz$ vaut en fait $-\int_{[0,1]} f(x)dx$. Il ne faut donc pas confondre le segment orienté $[1, 0]$ et l'intervalle réel $[0, 1]$. Par ailleurs il est parfois néanmoins utile d'autoriser l'écriture $\int_0^{+i\infty} f(z)dz$ par exemple, pour désigner l'intégrale le long de l'axe imaginaire positif ; il ne s'agit pas d'une intégrale de chemin stricto sensu, car le parcours est infini, et doit se comprendre comme valant $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz$ avec $\gamma_R : [0, R] \to \mathbf{C}$, $t \mapsto it$. Bref, les mathématiques ce n'est pas automatique : les notations ont leurs limites, et il faut savoir ce que l'on écrit.

Note 3 : les notations $\text{Rés}(f(z), z_0)$, $\text{Rés}(f, z_0)$, $\text{Rés}_{z_0}(f)$, $\text{Rés}_f(z_0)$, $\text{Rés}(z_0, f)$, $\text{Rés}(f; z_0)$, $\text{Rés}(z_0; f)$, etc… désignent toutes le résidu en z_0 de la fonction f analytique dans un disque épointé de centre z_0.

17. Calcul des Résidus

17.1. Soit g une fonction analytique ayant un zéro simple en z_0, et f une autre fonction analytique définie dans un voisinage de z_0. Montrer

$$\text{Rés}(\frac{f}{g}, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} .$$

17.2. (suite) Il est utile de connaître par coeur la formule précédente, mais elle est limitée à un zéro simple dans le dénominateur. On suppose maintenant que g a un zéro double en z_0. Montrer :

$$\text{Rés}(\frac{f}{g}, z_0) = \frac{6f'(z_0)g''(z_0) - 2f(z_0)g'''(z_0)}{3(g''(z_0))^2} .$$

Il n'est pas utile de mémoriser cette formule.

1. Responsable : J.-F. Burnol

17.3. (suite) On suppose que g a un zéro d'ordre n : $g(z_0+h) = h^n(c_0+c_1h+\dots)$, $c_0 \neq 0$, et l'on écrit $f(z_0+h) = a_0 + a_1h + \dots$. Montrer :

$$\text{Rés}(\frac{f}{g}, z_0) = d_0a_{n-1} + d_1a_{n-2} + \dots + d_{n-1}a_0 \ ,$$

une somme avec n termes, où les d_k sont obtenus préalablement par le développement :

$$\frac{1}{c_0+c_1h+\dots} = d_0 + d_1h + d_2h^2 + \dots$$

Dans la pratique il peut être plus rapide de faire directement la division suivant les puissances croissantes (comme dans les calculs de développement limités) :

$$\frac{a_0+a_1h+a_2h^2+\dots}{c_0+c_1h+c_2h^2+\dots} = e_0 + e_1h + e_2h^2 + \dots \ ,$$

et l'on a $\text{Rés}(\frac{f}{g}, z_0) = e_{n-1}$.

17.4. Que vaut, en fonction de $R > 0$:

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{2z^2-5z+2} \ ?$$

On précisera les valeurs exclues de R.

17.5. Que vaut en fonction de $R > 0$

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2+1}{z^3-z^2-4z+4} dz \ ?$$

17.6. Déterminer, C désignant tour à tour le cercle $|z-i| = 1$, ou le cercle $|z+i| = 1$, ou encore $|z| = 2$, parcourus dans le sens direct, les valeurs des intégrales :

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\, dz$$

17.7. Même question pour :

$$\int_C \frac{1}{z^3-1}\, dz \qquad \text{et} \qquad \int_C \frac{1}{z^4-1}\, dz \qquad \text{et} \qquad \int_C \frac{1}{z^5-1}\, dz$$

17.8. Soit $P(z) = Az^4 + \dots$ un polynôme de degré au plus 4. Montrer que

$$\int_{|z|=R} \frac{P(z)}{z^5-1}\, dz$$

est indépendant de R pour $R > 1$. En faisant tendre R vers l'infini en déduire que cette valeur constante est $2\pi i A$. Prouver alors via le théorème des résidus :

$$A = \frac{1}{5} \sum_{w^5=1} wP(w)$$

Retrouver par un calcul direct ce résultat.

17.9. Que vaut $\int_{|z|=N} \operatorname{tg}(\pi z)\, dz$, pour $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 1$?

17.10. Montrer pour $a > b > 0$:

$$J(a,b) := \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin\theta}\, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \ .$$

On se ramènera à une intégrale curviligne via $z = e^{i\theta}$, $\sin\theta = (z-z^{-1})/2i$.

17.11. (suite) Pour $b > 0$ fixé, que vaut $J(a,b)$ pour a complexe avec $a \notin [-b,+b]$? On utilisera le théorème d'unicité analytique après avoir expliqué pourquoi $J(a,b)$ est analytique en a dans $\mathbf{C} \setminus [-b,+b]$.

17.12. (suite) Donner deux développements de $J(1,b)$ en série pour $|b| < 1$ et en déduire les valeurs de $\int_0^{2\pi} \sin^n \theta \, d\theta$, $n \in \mathbf{N}$.

17.13. Prouver pour $a > 1$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a + \sin\theta} d\theta = \frac{\sqrt{a^2-1} - a}{\sqrt{a^2-1}}$$

17.14. Déterminer pour A, B, C réels, avec $A^2 > B^2 + C^2$ la valeur de

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + B\sin\theta + C\cos\theta}$$

On aura intérêt comme première étape à poser $B = R\cos\phi$, $C = R\sin\phi$, mais on peut aussi se frotter plus directement au résidu.

17.15. Confirmer par le calcul des résidus la valeur connue (Arctg ... !) :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

On appliquera le théorème des résidus au contour direct comportant le segment $[-R,+R]$ et le semi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur, pour $R \to +\infty$.

17.16. Justifier $\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^2} dx$ pour $\xi \in \mathbf{R}$. Prouver par un calcul de résidu

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\xi|} \ .$$

Suivant le cas $\xi \geq 0$ ou $\xi < 0$ on complètera le segment $[-R,+R]$ par un semi-cercle dans le demi-plan supérieur, ou inférieur, afin que la contribution du semi-cercle tende vers 0 pour $R \to \infty$. On peut aussi observer que l'intégrale est une fonction paire de ξ et que l'on peut donc se restreindre à $\xi \geq 0$.

17.17. Prouver, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} (\pi e^{-|\xi|}) d\xi = \frac{1}{1+x^2} \ .$$

Il suffit d'évaluer séparément $\int_{-\infty}^0$ et $\int_0^\infty$ en utilisant le fait que exp est sa propre primitive (ce calcul n'utilise pas les techniques de la variable complexe). On remarquera que l'on retombe sur la fonction $1/(1+x^2)$, ce qui n'est pas un hasard (formule d'inversion pour l'intégrale de Fourier).

17.18. Déterminer

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+x^4} \, dx \qquad \int_{\mathbf{R}} \frac{1+x^2}{1+x^4} \, dx \qquad \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+x^2+x^4} \, dx$$

17.19. Préciser pourquoi $\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^4} dx$ est une intégrale convergente pour $\xi \in \mathbf{R}$, est une fonction réelle et paire de ξ, et utiliser un calcul de résidus pour établir, pour $\xi \geq 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\xi/\sqrt{2}} \sin(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4})$$

Cette formule est-elle valable pour $\xi < 0$?

17.20. Déterminer

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

Pour ce calcul, on considérera le contour allant le long de l'axe réel de 0 à R puis de R à jR le long d'un cercle puis de jR à 0 par un segment ($j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$). On écrira d'une part chacune des trois contributions à l'intégrale de contour, en faisant attention au sens de parcours, et l'on utilisera d'autre part le théorème des résidus.

18

18.1. Prouver pour $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

en utilisant le secteur angulaire $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq 2\pi/n$, $0 \leq |z| \leq R$, $R \to +\infty$, et en montrant que la contribution de l'arc de cercle tend vers zéro pour $R \to +\infty$.

18.2. Soit $q > 1$, rationnel, $q = n/m$, $n > m \geq 1$. Prouver

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^q} = \int_0^{\infty} \frac{mt^{m-1}}{1+t^n} dt = \frac{\pi/q}{\sin(\pi/q)}$$

en utilisant le même contour que pour $q = n > 1$.

18.3. Montrer que la fonction de $a > 1$

$$J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^a} dx$$

est continue et déduire alors du résultat précédent

$$J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^a} dx = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}$$

pour tout $a > 1$.

18.4. Retrouver cette formule par une application directe du calcul des résidus : on prend $\epsilon > 0$ petit (en fait on veut $2\pi - \epsilon > \frac{2\pi}{a}$) et on note U l'ouvert $\{w = re^{i\phi} : r > 0, -\epsilon < \phi < 2\pi - 2\epsilon\}$, de sorte que $\log(w) := r + i\phi$ est une détermination du logarithme dans cet ouvert, et que la fonction $\exp(a\log(w)) = r^a e^{ia\phi}$ est définie et analytique dans cet ouvert, et vaut x^a sur $]0, \infty[$. En appliquant le théorème des résidus avec le contour comportant le segment $[\delta, R]$, puis l'arc de cercle de R à $\exp(2\pi i/a)R$ puis le segment vers $\exp(2\pi i/a)\delta$ puis l'arc de cercle rétrograde jusque δ, et en faisant tendre δ vers 0 et R vers $+\infty$, prouver pour tout $a > 1$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)} \; .$$

18.5. Justifier le fait que l'intégrale définissant $J(a)$ est en fait absolument convergente et analytique pour $\mathrm{Re}(a) > 1$ et que la formule $J(a) = \pi/a\sin(\pi/a)$ vaut dans ce demi-plan (par le théorème d'unicité analytique).

18.6. On définit $K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt$ pour $0 < p < 1$. Montrer par des changements de variable $K(p) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt$ et aussi $K(p) = aJ(a)$ pour $a = 1/p$. En déduire (pour $0 < p < 1$) :

$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{1/p}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

18.7. Donner une nouvelle preuve de la formule $K(p) = \pi/\sin(\pi p)$ pour $0 < p < 1$ à l'aide du théorème des résidus pour $f(z) = e^{pz}/(1+e^z)$ en utilisant comme contour le rectangle (dans le demi-plan supérieur) de base le segment $[-R, +R]$ et de hauteur 2π, et en passant à la limite $R \to +\infty$. Ainsi on a aussi une nouvelle preuve de $J(a) = \pi/a\sin(\pi/a)$ pour tout $a > 1$.

18.8. Montrer que l'intégrale définissant $K(p)$ est convergente non seulement pour $0 < p < 1$ mais aussi pour tout p complexe avec $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$. Montrer que la formule $K(p) = \pi/\sin(\pi p)$ est valable pour $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$ soit en établissant que $K(p)$ est une fonction analytique de p soit en vérifiant simplement que la preuve donnée dans la question précédente pour $0 < p < 1$ marche aussi pour $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$.

18.9. Déduire de ce qui précède en posant $p = \frac{1}{2} + i\xi$, $\xi \in \mathbf{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\xi t)}{\mathrm{ch}(t/2)}dt = \frac{2\pi}{\mathrm{ch}(\pi\xi)} ,$$

puis, après un changement de variable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\xi u)}{\mathrm{ch}(\pi u)}du = \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi\xi)} .$$

Autrement dit la fonction paire $1/\mathrm{ch}(\pi x)$ est auto-réciproque sous la transformation de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\xi x} f(x)\,dx$.

18.10. On revient à la formule $K(p) = \pi/\sin(\pi p)$. En y séparant parties réelles et imaginaires donner les valeurs exactes des intégrales, en simplifiant au maximum les formules :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\cos(vt)}{1+e^t}dt \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\sin(vt)}{1+e^t}dt$$

pour $0 < u < 1$, $v \in \mathbf{R}$.

18.11. Notons

$$L(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+t}dt .$$

Montrer que $L(z)$ est définie et analytique pour $\mathrm{Re}(z) > 0$ et vérifie $L(z) = \frac{1}{z} - L(z+1)$. 0n définit dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > -M$: $F_M(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{(-1)^{M-1}}{z+M-1} + (-1)^M L(z+M)$ (il y a donc des pôles simples en $0, -1, \ldots, -M+1$). Montrer par récurrence que F_M coïncide avec L dans $\mathrm{Re}(z) > 0$ et avec F_{M-1} pour $\mathrm{Re}(z) > -M+1$. En déduire que L est la restriction à $\mathrm{Re}(z) > 0$ d'une fonction méromorphe F dans $\mathbf{C}$ dont on précisera les parties polaires. En utilisant la formule

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{N-1} t^{N-1} + \frac{(-1)^N t^N}{1+t}$ prouver pour tout z avec $\mathrm{Re}(z) > 0$ et tout $N \in \mathbf{N}$:

$$\left| L(z) - \sum_{0 \leq k < N} \frac{(-1)^k}{z+k} \right| \leq \frac{1}{N + \mathrm{Re}(z)}$$

Prouver[2] alors pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ et tout $N \in \mathbf{N}$ tel que $N + \mathrm{Re}(z) > 0$:

$$\left| F(z) - \sum_{0 \leq k < N} \frac{(-1)^k}{z+k} \right| \leq \frac{1}{N + \mathrm{Re}(z)}$$

En déduire $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{z+k}$ avec convergence uniforme dans tout demi-plan $\mathrm{Re}(z) \geq \sigma > -\infty$ (privé de $-\mathbf{N}$). Prouver :

$$K(p) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = L(p) + L(1-p) \; ,$$

et en déduire par unicité analytique $\pi / \sin(\pi z) = F(z) + F(1-z)$. Retrouver ainsi le développement en fractions de $\pi / \sin(\pi z)$ avec d'ailleurs convergence uniforme pour $|\mathrm{Re}(z)|$ borné (c'est mieux que le “pour $|z|$ borné” de la feuille 3).

19

19.1. Soit Ω un domaine à bord régulier, de bord orienté $\partial\Omega$ (consistant donc en une ou plusieurs courbes de Jordan orientées). Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}$, soient z_1 et z_2 deux points de Ω. Que vaut

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_1)(z - z_2)} \; ?$$

Qu'obtient-on pour $z_2 \to z_1$, z_1 fixé ?

19.2. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq M\,(1 + |z|)^n$ pour un certain M et un certain $n \in \mathbf{N}$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme de degré au plus n :

- en utilisant une formule intégrale de Cauchy pour $f^{(n+1)}(z)$, avec comme contour les cercles de rayon R centrés en l'origine, ou en z si l'on veut,
- en utilisant les formules de Cauchy pour $f^{(m)}(0)$, avec $m \geq n+1$,
- en appliquant le théorème de Liouville à $(f(z) - P(z))/z^{n+1}$ avec P le polynôme de McLaurin-Taylor à l'origine à l'ordre n.

19.3. Soit f une fonction entière vérifiant $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = +\infty$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme :

- en montrant, par un théorème du cours, que $w = 0$ est une singularité polaire de $g(w) = f(1/w)$, et en en déduisant qu'il existe un polynôme P tel que $f(z) - P(z)$ tende vers 0 pour $|z| \to \infty$, puis Liouville,
- ou en montrant que f n'a qu'un nombre fini de zéros z_j, $1 \leq j \leq n$, et en appliquant à $(z - z_1) \ldots (z - z_n)/f(z)$ le résultat de l'exercice précédent, plus quelques réflexions de conclusion pour achever la preuve.

19.4. Montrer que la fonction entière $z + e^z$ tend vers l'infini le long de tout rayon partant de l'origine. D'après l'exercice précédent $z + e^z$ est donc un polynôme. Commentaires ?

2. **Attention !** il ne s'agit certainement pas d'invoquer un prolongement analytique : l'unicité analytique vaut **uniquement** pour les égalités, **pas pour les inégalités.**

MATH 305[1] (Troisième année de Licence)
Semestre d'automne 2004/2005
Université Lille 1

FEUILLE 5

20. Topologie : compacts et connexes

C'est du cours de topologie. C'est pour votre travail personnel, on ne le fera pas en TDs.

20.1. Soit $X \subset \mathbf{C}$ un ensemble quelconque (allez, non vide). Soit $d_X(z) = \inf\{|z - z'|\ ,\ z' \in X\}$. Montrer $|d_X(z_1) - d_X(z_2)| \leq |z_1 - z_2|$, en déduire que la fonction d_X est une fonction continue sur $\mathbf{C}$. Montrer que d_X et $d_{\overline{X}}$ sont la même fonction.

20.2. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ qui contient

(1) soit le disque fermé $\overline{D(0, R)}$,

(2) soit le segment $[-i, +i]$,

(3) soit $0 < r_1 \leq |z| \leq r_2 < \infty$.

Montrer que suivant le cas U contient :

(1) un disque $\overline{D(0, R')}$ avec $R' > R$,

(2) ou un rectangle $\{|x| < \eta, |y| < 1 + \eta\}$, avec $\eta > 0$,

(3) ou $\{r'_1 \leq |z| \leq r'_2\}$ pour un $r'_1 < r_1$ et un $r'_2 > r_2$.

On utilisera le résultat de l'exercice précédent.

20.3. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert non vide. Montrer qu'en posant $z_1 \mathcal{R} z_2$ si il existe un chemin continu dans U allant de z_1 à z_2 on définit une relation d'équivalence sur U. Montrer que si $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$ est un chemin continu à valeurs dans U alors tous les $\gamma(t)$ sont dans la même classe d'équivalence.

20.4. Montrer que les classes d'équivalence sont des ensembles ouverts, qui sont aussi fermés dans U (au sens de la topologie induite ; cela signifie donc qu'il faut montrer que le complémentaire dans U d'une classe d'équivalence est aussi un ouvert).

20.5. Soit V une classe d'équivalence. Montrer qu'il est impossible d'écrire $V = V_1 \cup V_2$ avec V_1 et V_2 deux ouverts non vides disjoints. On dit que V est connexe. Preuve : supposons le contraire. Soit $z_1 \in V_1$ et $z_2 \in V_2$ et soit $\gamma : [0, 1] \to V$ un chemin continu allant de z_1 à z_2. Soit $W_1 = \{0 < t < 1, \gamma(t) \in V_1\}$ et $W_2 = \{0 < t < 1, \gamma(t) \in V_2\}$. Montrer que W_1 et W_2 sont deux ouverts de $\mathbf{R}$ non vides disjoints avec $W_1 \cup W_2 =]0, 1[$. C'est impossible : la fonction f définie comme valant 0 sur W_1 et 1 sur W_2 serait continue (pourquoi ?) mais elle ne vérifie pas le théorème des valeurs intermédiaires.

1. Responsable : J.-F. Burnol

20.6. On a montré que les classes d'équivalence sont ouvertes et fermées dans U. Soit V' une partie de U non vide à la fois ouverte et fermée. Soit $z_0 \in V'$ et soit V la classe d'équivalence de z_0. On a $V = (V \cap V') \cup (V \cap W')$, avec $W' = U \setminus V'$. Comme V est connexe en déduire $V \subset V'$. Ainsi le plus petit ouvert-fermé contenant un point est sa classe d'équivalence et les ouverts-fermés dans U sont des réunions des classes de $\mathcal{R}$-équivalence.

20.7. Montrer que l'on obtient exactement le même résultat en définissant $z_1 \mathcal{R} z_2$ suivant l'une quelconque de ces définitions : il existe un chemin polygonal par morceaux, il existe un chemin de classe C^∞, il existe un chemin affine par morceaux, il existe un chemin constitué de morceaux horizontaux et verticaux, etc..., allant de z_1 à z_2 (tous les chemins sont supposés continus).

20.8. Définition générale d'un ensemble topologique connexe : X est connexe si il n'admet pas de partie propre à la fois ouverte et fermée. Montrer que l'image $f(X) \subset Y$ par une application continue $f : X \to Y$ d'un ensemble connexe est connexe ($f(X)$ est muni de la topologie induite de Y). Un exemple classique d'espace $X \subset \mathbf{C}$ qui est connexe sans être connexe par arcs est la réunion de l'intervalle $[-i, +i]$ et du graphe de $y = \sin(1/x)$, $0 < x \leq 1$. Pour le montrer on a besoin de comprendre ce qu'est une topologie induite, on utilise aussi la notion de compacité. Cependant X n'est pas « connexe par arcs ».

21. Théorème des zéros isolés

Comprendre le théorème des zéros isolés c'est comprendre plusieurs choses. Ce n'est pas assez précis de dire que les zéros d'une fonction analytique sont isolés. Ici aussi on n'a pas trop envie de faire cela en TDs d'Analyse Complexe. Idéalement la Topologie Générale est l'affaire de la deuxième année des études supérieures.

21.1. D'une manière générale que peut-on dire des zéros d'une fonction continue sur un espace topologique X quelconque ? (il y a une seule chose raisonnable à dire).

21.2. Montrer que les propositions suivantes portant sur un sous-ensemble S d'un ouvert U de $\mathbf{C}$ sont équivalentes (cela fait partie du problème de préciser la signification de ses termes) :

(1) S est localement fini.

(2) S est fermé et discret.

(3) les points de S sont isolés dans S et S n'a pas de point d'accumulation dans U.

(4) l'intersection de S avec tout compact $K \subset U$ est finie (ou vide...mais c'est superflu de le dire car un ensemble vide est fini).

(5) l'intersection de S avec tout carré fermé inclus dans U est finie.

(6) l'intersection de S avec tout carré fermé dans U dont les coordonnées des sommets sont des nombres rationnels est finie.

(7) S est fini ou S est infini dénombrable et n'a pas de point d'accumulation dans U.

21.3. Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert U connexe. Montrer que le lieu S de ses zéros vérifie toutes les propriétés équivalentes précédentes. Pourquoi U est-il pris connexe ? Réciproquement, on peut montrer (voir le livre de Chabat) que tout tel S est le lieu des zéros d'une fonction analytique sur l'ouvert connexe U.

21.4. En conclusion dire que les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés n'est pas assez précis : les points de $S = \{\frac{1}{n}, n \geq 1\}$ sont isolés (Justifier). Mais S n'est le lieu des zéros d'aucune fonction analytique définie sur $D(0,1)$ (Justifier). Cependant S est le lieu des zéros d'une fonction analytique définie sur $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ (en trouver une). On remarquera que S est fermé comme sous-ensemble de ce demi-plan, mais n'est pas fermé comme sous-ensemble de $D(0,1)$.

22. Principe du Maximum

22.1. Soit f analytique pour $|z - z_0| \leq R$ et telle que $|f(z_0 + Re^{i\theta})| > |f(z_0)|$ pour tout θ. Montrer que f s'annule au moins une fois dans le disque ouvert $D(z_0, R)$. Indication : on appliquera le principe du maximum à $1/f$. Donner ensuite comme conséquence une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss.

22.2. Refaire l'exercice précédent en utilisant le théorème de Rouché (lorsqu'il aura été vu en cours). Prouver alors aussi que f prend au moins une fois toute valeur w avec $|w| \leq |f(z_0)|$.

22.3. Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leq \frac{1}{n}$ pour $|z| = n$, $n \geq 1$. Montrer que F est identiquement nulle.

22.4. Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leq \frac{1}{\log\log\log\log\log n}$ pour $|z| = 10^{10^{10^{10^{10^n}}}}$ et $n \geq 10!!!!!$. Montrer que F est identiquement nulle.

22.5. Soit z_1, …, z_N des nombres complexes de module 1. Montrer qu'il existe w tel que $|w| = 1$ et $\prod_j |w - z_j| = 1$. Ind : montrer d'abord avec > 1.

22.6. Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$ telle que $f(0) = 1$. Montrer qu'il existe z sur le cercle unité avec $|f(z)| = |1 - z|^{-1}$.

22.7. Montrer que si une fonction entière f a sa partie réelle bornée supérieurement ($\exists A \forall z\ \mathrm{Re}(f(z)) \leq A$) alors elle est constante (considérer $\exp(f)$).

22.8. Montrer la forme globale du principe du Maximum, tel qu'énoncé dans le résumé du cours des huit premières semaines qui vous a été distribué.

22.9. Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,R)$. Montrer que l'application $r \mapsto M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ est une fonction continue de $r \in [0, R[$. Cela n'utilise que la continuité de la fonction f et est un excellent problème de topologie, qui risque d'être très difficile pour vous j'imagine (d'ailleurs la preuve que j'ai en tête s'exprime le plus aisément à l'aide de $\liminf$ et de $\limsup$). Montrer que M_f est une fonction strictement croissante, sauf si f est constante. Ici on utilise de manière cruciale les théorèmes d'analyse complexe, et ça devrait être plus simple. On peut montrer que $\log M_f(r)$ est une fonction convexe de $\log r$ (théorème des trois cercles de Hadamard).

22.10. Soit f une fonction entière injective. Montrer que f est de la forme $az+b$. Pour la preuve : montrer que $f(S^1)$ (S^1 est le cercle unité) est une courbe de Jordan, et en déduire qu'il existe un disque non vide qui n'est pas atteint par les valeurs de f pour $|z| > 1$ (ces valeurs doivent être dans l'une des composantes connexes de $\mathbf{C} \setminus f(S^1)$, car l'image d'un connexe est un connexe, et l'on prendra le disque dans l'autre composante). En déduire (l'étape précédente est superflue si l'on sait que les fonctions analytiques non constantes sont ouvertes) par Casorati-Weierstrass que $f(1/w)$ a une singularité au pire polaire en $w \to 0$, donc que $f(z)$ diffère pour $|z| > 1$ d'un polynôme par une quantité bornée. En déduire que f est un polynôme puis conclure.

23. Théorème des résidus

23.1. Résidu logarithmique. Soit $f(z)$ une fonction analytique qui, soit est définie en z_0 avec un zéro d'ordre m ($m \geq 1$), soit a un pôle en z_0 d'ordre n ($n \geq 1$). Déterminer la nature de la singularité en z_0 de la « dérivée logarithmique » $\frac{f'(z)}{f(z)}$, ainsi que le résidu.

23.2. Résidu à l'infini. Soit f une fonction qui est holomorphe dans une couronne $\{|z| > R\}$. Par définition :

$$\text{Rés}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz$$

avec C_r le cercle $\{|z| = r\}$ parcouru dans le sens direct, pour $r > R$ quelconque. On notera le signe $-$ qui est dû au fait que pour « tourner positivement autour du point à l'infini » il faut en fait parcourir ce cercle dans le sens rétrograde (dans certains livres moins bien inspirés que votre corps professoral, on ne met pas le signe $-$). Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbf{C}$ à l'exception d'un nombre fini de singularités isolées (si elles étaient en nombre infini alors nécessairement elles convergeraient en module vers $+\infty$ et donc la « singularité à l'infini » ne serait pas isolée ; donc dans un style classique on dirait « soit f une fonction dont toutes les singularités, y-compris à l'infini, sont isolées »). Montrer le théorème suivant : *la somme de tous les résidus de f est nulle.*

23.3. Morceaux de Résidus. Soit f présentant en z_0 un **pôle simple**. Soit $C_r(\alpha, \beta)$ l'arc de cercle $w = z_0 + re^{i\theta}$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, parcouru dans le sens croissant des θ et avec $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$. Prouver :

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r(\alpha,\beta)} f(z)\, dz = 2\pi i\, \frac{\beta - \alpha}{2\pi}\, \text{Rés}(f, z_0)$$

Que se passe-t-il si le pôle est d'ordre plus élevé ?

23.4. Lemme de Jordan. Soit f une fonction holomorphe pour $\text{Im}(z) \geq 0$ et telle que $\max_{|z|=R_m, \text{Im}(z)\geq 0} |f(z)| \to_{m\to\infty} 0$, pour une suite $R_m \to +\infty$. Montrer (on utilisera la minoration $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$ pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) :

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\substack{z=R_m e^{i\theta} \\ 0\leq\theta\leq\pi}} f(z) e^{iz}\, dz = 0$$

23.5. En considérant l'intégrale de $\frac{e^{iz}}{z}$ sur un contour allant de $-R$ à $+R$ le long de l'axe réel en contournant 0 par un petit demi-cercle, puis qui revient de $+R$ à $-R$ par le demi-cercle dans le demi-plan supérieur, démontrer $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

23.6. Déterminer les intégrales (semi-convergentes) de Fresnel $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ et $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ en considérant l'intégrale de $\exp(-z^2)$ sur le contour $z = x$, $0 \le x \le R$, $z = R\exp(i\theta)$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, $z = xe^{i\frac{\pi}{4}}$, $R \ge x \ge 0$. On rappelle l'identité $\int_{\mathbf{R}} \exp(-\pi u^2)du = 1$.

23.7. Que vaut $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$? (faire un changement de variable $t = \pi u^2$ pour se ramener à la Gaussienne). En considérant un contour passant par l'axe réel, puis un quart de cercle, puis l'axe imaginaire, puis un petit quart de cercle évitant l'origine prouver :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \exp(i\frac{\pi}{4})\int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}}dx$$

et en déduire les valeurs des intégrales $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ et $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ (qui ne sont que semi-convergentes). Comparer aux intégrales de Fresnel.

23.8. Reprendre l'exercice précédent et déterminer pour $0 < a < 1$ les valeurs des intégrales (semi-convergentes)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^a}dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}dx$$

en utilisant la fonction Gamma. À propos prouver que ces intégrales ne sont que semi-convergentes (*i.e.* pas absolument convergentes).

23.9. Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}$, avec Ω un domaine à bord régulier, à l'exception d'un nombre fini de pôles simples $z_1, \ldots, z_N$ dans Ω, de résidus $c_1, \ldots, c_N$. Prouver en appliquant le théorème des résidus :

$$\forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_N\} \qquad f(z) = \sum_{1\le n\le N} \frac{c_n}{z - z_n} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w - z}dw$$

23.10. Un théorème de Cauchy. Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbf{C}$ à l'exception de singularités isolées qui sont des pôles simples a_n, $1 \le n$, ($n < N$ avec $N = \infty$ si il y a une infinité de pôles) avec des résidus b_n. On suppose de plus qu'il existe une suite croissante R_m, $R_m \to +\infty$, telle que sur les cercles $\{|z| = R_m\}$ on a $|f(z)| \le C \cdot R_m^k$, pour deux constantes C et k, $k \in \mathbf{N}$. On suppose que l'origine n'est pas parmi les pôles simples. Redémontrer pour vous échauffer la formule de l'exercice précédent :

$$|z| < R_m \Rightarrow \qquad f(z) = \sum_{|a_n|<R_m} \frac{b_n}{z - a_n} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R_m} \frac{f(w)}{w - z}dw$$

puis, en notant $P_n(z)$ le polynôme de Taylor de $b_n/(z - a_n)$ à l'origine à l'ordre k, et $P(z)$ celui de f, en déduire :

$$P(z) = \sum_{|a_n|<R_m} P_n(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R_m} f(w)\left(\sum_{0\le j\le k} \frac{z^j}{w^{j+1}}\right)dw$$

Le nombre complexe z étant fixé, montrer :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R_m} f(w) \left(\frac{1}{w-z} - \sum_{0\le j\le k} \frac{z^j}{w^{j+1}} \right) dw = 0 ,$$

la convergence étant uniforme pour $|z|$ borné. Conclure :

$$\forall z \notin \{a_n, 1 \le n < N\}$$
$$f(z) = P(z) + \lim_{m\to\infty} \sum_{|a_n|<R_m} \left(\frac{b_n}{z-a_n} - P_n(z) \right) ,$$

la convergence étant uniforme pour $|z|$ borné.

23.11. Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}$, avec Ω un domaine à bord régulier, à l'exception d'un nombre fini de singularités $z_1, \ldots, z_N$ dans Ω. Soit $g_n(z) = \sum_{1\le j} \frac{a_n(j)}{(z-z_n)^j}$ la partie principale du développement de Laurent de f en la singularité z_n. On sait que le rayon de convergence de $\sum_{1\le j} a_n(j) Z^j$ est infini, donc g_n est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{z_n\}$, tendant vers zéro à l'infini. Prouver **la formule générale de Cauchy** :

$$\boxed{\forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_N\} \qquad f(z) = \sum_{1\le n\le N} g_n(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z} dw}$$

Pour cela, montrer $\text{Rés}(\frac{f(w)}{w-z}, z_n) = \text{Rés}(\frac{g_n(w)}{w-z}, z_n)$ (on écrira $f = f - g_n + g_n$) puis évaluer ce dernier en appliquant le théorème des résidus à l'intégrale de $\frac{g_n(w)}{w-z}$ sur un grand cercle encerclant z_n et z, lorsque le rayon du cercle devient infini.

23.12. Refaire l'exercice 23.10 dans le cas de singularités arbitraires, pas seulement des pôles simples (bien sûr par hypothèse, pas de singularités sur les cercles $|z| = R_m$). La « philosophie » sous-jacente est fondamentale : une fonction est déterminée par ses singularités et ses valeurs au bord. On trouve dans l'Œuvre du mathématicien Bernhard Riemann (1826-1866) plusieurs expressions fascinantes de cette philosophie, et elle imprègne de nos jours jusqu'aux travaux des physiciens sur l'infiniment petit et l'infiniment grand, les particules et le cosmos.

23.13. On suppose $0 < |a_1| \le |a_2| \le \ldots$ et $\lim |a_n| = +\infty$ et $\sum_{n\ge1} \frac{|b_n|}{|a_n|^2} < \infty$. Montrer que

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} \frac{z}{z-a_n}$$

est absolument convergent, uniformément pour $|z| \le R$ distinct des a_n et définit une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ présentant des pôles simples en les a_n de résidus b_n (les nombres complexes a_n sont supposés distincts).

24. Produits infinis

24.1. Produits absolument convergents. Soit u_n, $n \geq 1$ des nombres complexes. Montrer : $1 + \sum_{n=1}^N |u_n| \leq \prod_{n=1}^N (1 + |u_n|) \leq e^{\sum_{n=1}^N |u_n|}$. En déduire que la suite croissante $\prod_{n=1}^N (1+|u_n|)$ a une limite finie si et seulement si la suite croissante $\sum_{n=1}^N |u_n|$ a une limite finie. On suppose maintenant être dans le cas où le produit et la série ont chacun une limite finie. Montrer alors, en supposant de plus que $u_n \neq -1$ pour tout n que la série $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{Log}(1+u_n)$ est absolument convergente, et en déduire que la suite de nombres complexes $\prod_{n=1}^N (1 + u_n)$ a une limite et que cette limite est non nulle. Ainsi un produit absolument convergent est convergent.

24.2. Essayer de montrer que le produit $\prod_{n=1}^\infty a_n$ avec $\forall n\ a_n \neq 0$ converge (au sens donné dans le cours) si et seulement si la série $\sum \mathrm{Log}\, a_n$ converge. Dans un sens c'est facile. On considèrera cette équivalence comme un théorème de cours.

24.3. Montrer que $\prod_{k=1}^\infty (1 + \frac{i}{k})$ diverge tandis que $\prod_{k=1}^\infty \left|1 + \frac{i}{k}\right|$ converge.

24.4. Pour quelles valeurs de p (réel) $\prod_{k=1}^\infty (1 + k^{-p})$ converge ?

24.5. Étant admis que $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$, prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}}$$

et justifier la convergence absolue du produit.

24.6. Étant admis $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$, prouver :

$$\sin(\pi z) = \pi z \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N, k\neq 0}^{+N} \frac{z-k}{-k} ,$$

puis établir pour tout $\alpha \notin \mathbf{Z}$:

$$\sin(\pi(z-\alpha)) = -\sin(\pi\alpha) \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N}^{+N} \left(1 - \frac{z}{\alpha + k}\right)$$

Montrer que le résultat reste valable si l'on remplace dans le produit $-N$ par $-N \pm 1$ ou $+N$ par $+N \pm 1$. En déduire :

$$\cos(\pi z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(\frac{1}{2} + k)^2}\right)$$

avec un produit absolument convergent.

24.7. (suite) On rappelle la formule $\pi \,\mathrm{cotg}(\pi\alpha) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{+N} \frac{1}{\alpha - k}$, pour $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$. Montrer :

$$\frac{\sin(\pi(\alpha - z))}{\sin(\pi\alpha)} = e^{-\pi\,\mathrm{cotg}(\pi\alpha) z} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha+k}\right) e^{\frac{z}{\alpha+k}}$$

avec un produit absolument convergent.

24.8. On suppose $\sum_{n\geq 1}|u_n|^2 < \infty$. Montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \mathrm{Log}(1+u_n)$ sont soit toutes deux convergentes soit toutes deux divergentes. On a supposé $\forall n\ u_n \neq -1$ et Log est la détermination principale. Dans le cas de convergence, montrer qu'elles sont soit toutes deux absolument convergentes, soit toutes deux seulement semi-convergentes.

24.9. Établir la convergence et évaluer les produits infinis suivants :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}$$

Les trois premiers s'obtiennent par des réarrangements simples. Pour le dernier, utiliser le produit infini de $\sin z$.

24.10. Déterminer les régions de convergence absolue des produits infinis suivant en la variable q :

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \qquad \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+q^{2^n}\right)$$

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+c_nq^n) \qquad c_n \in \mathbf{C} \text{ quelconques}$$

Dans chacun des cas donner une expression pour $F'(q)/F(q)$ pour $F(q)$ la fonction définie par le produit (lorsque il y a un ouvert où le produit converge).

24.11. Établir les identités suivantes pour $|q| < 1$:

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^8)\cdots = \frac{1}{1-q}$$

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots} = \prod_{n\geq 1}(1+q^n)$$

Remarque : on peut réarranger comme l'on veut les termes d'un produit absolument convergent, ou même d'un « double produit » $\prod_{n\geq 0, m\geq 0}(1+u_{n,m})$ lorsque $\sum_{n,m}|u_{n,m}| < \infty$; d'ailleurs on ne peut employer la notation $\prod_{n\geq 0,m\geq 0}$ qui ne spécifie pas d'ordre particulier uniquement sous la condition de convergence absolue.

24.12. Soit q un paramètre complexe avec $|q| < 1$. Soit

$$F(z) = (1-z)(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\ldots$$

Montrer que F est une fonction entière. Déterminer les coefficients de son développement en série $\sum_n A_n(q)z^n$ en fonction de q. Indication : utiliser $F(z) = (1-z)F(qz)$ pour obtenir une relation de récurrence sur les $A_n(q)$.

Signalons la très belle formule d'Euler (parfois dite de Euler-Legendre) :

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots = 1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}++--\ldots$$

où seuls les signes + et − apparaissent et où les exposants sont les « nombres pentagonaux » $(3\nu^2 \pm \nu)/2$, $\nu \in \mathbf{N}$.

MATH 305[1] (Troisième année de Licence)
Semestre d'automne 2004/2005
Université Lille 1

FEUILLE 6

Je vous ai gâté(e)s pour Noël. Vous allez me regretter…

25. Derniers exercices

25.1. Soient f et g deux fonctions entières avec $\forall z\ f(z)g(z) = 0$. Montrer que l'une des deux est identiquement nulle.

25.2. Soit f une fonction continue sur $\overline{D(0,1)}$, holomorphe sur $D(0,1)$, nulle sur le cercle de rayon 1. Montrer que f est identiquement nulle. Plus fort : on ne suppose plus que $f(e^{i\theta})$ est nulle pour tout θ mais seulement pour $0 \leq \theta \leq \pi$. Montrer que f est identiquement nulle. Indication : $f(z)f(-z)$.

25.3. Lemme de Schwarz. Redémontrer le Lemme de Schwarz, à titre d'échauffement (dans un premier temps on suppose f holomorphe sur $|z| \leq 1$, donc pour $|z| < 1 + \eta$, $\eta > 0$, puis on suppose seulement f holomorphe pour $|z| < 1$). Puis démontrer ou en déduire une version améliorée lorsque l'on suppose $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$ et $(|z| < 1 \Rightarrow |f(z)| \leq 1)$.

25.4. Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ telle que $\forall z \exists n\ f^{(n)}(z) = 0$. Montrer que f est polynomiale. Indication : considérer l'ensemble non dénombrable $S = \{|z| \leq \frac{1}{2}\}$, et ses sous-ensembles S_k avec $f^{(k)}(z) = 0$.

25.5. Cercles-Droites et Homographies. Déterminer l'image par $z \mapsto \frac{3z+5}{z+2}$ du cercle unité, du cercle de rayon 2 centré en 1, du cercle de rayon 2 centré en l'origine ; de la droite imaginaire, de la droite d'équation $x = y$, de la droite verticale passant en 3, de la droite verticale passant en -2. On peut procéder, soit en déterminant suffisamment de points, soit plus brutalement par la méthode des équations $Az\overline{z} + Bz + C\overline{z} + D = 0$.

25.6. On sait que $z \mapsto \phi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$, pour $|\alpha| < 1$ est un automorphisme de $D(0,1)$. Trouver deux points échangés par ϕ_α. Deux points distincts étant donnés, montrer qu'il existe un automorphisme les échangeant et que cet automorphisme est unique (on se ramènera au cas où l'un des points est l'origine).

25.7. Trouver l'unique automorphisme (=bijection analytique) du premier quadrant qui échange $1 + i$ et $2 + 2i$. On remarquera que $z \mapsto z^2$ est une bijection analytique du premier quadrant sur le demi-plan supérieur.

1. Responsable : J.-F. Burnol

25.8. Une jolie majoration. On a étudié en cours les facteurs $E_k(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}}$ de Weierstrass. On a montré sans trop se fatiguer que pour $|z| \leq \frac{1}{2}$, on a $|E_k(z) - 1| \leq 2e|z|^{k+1}$. Par une méthode plus raffinée on va prouver :

$$|z| \leq 1 \Rightarrow |E_k(z) - 1| \leq |z|^{k+1}$$

En calculant E_k', montrer que le développement en série de $E_k(z)$ est de la forme $1 - \sum_{n\geq k+1} u_n z^n$ avec certains coefficients $u_n \geq 0$ (dépendants de k, qui lui est fixé). En évaluant en $z = 1$ montrer que $\sum_{n\geq k+1} u_n = \sum_{n\geq k+1} |u_n| = 1$. En déduire l'inégalité ci-dessus. Joli, non ?

25.9. Une variante améliorée du théorème de Rouché. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux assertions « le segment $[z_1, z_2]$ ne contient pas 0 » et « $|z_1 - z_2| < |z_1| + |z_2|$ ». Soient f_1 et f_2 deux fonctions holomorphes sur $\overline{\Omega}$ avec Ω la composante connexe intérieure à un contour de Jordan γ. On suppose que sur γ on a $|f_1 - f_2| < |f_1| + |f_2|$. Montrer que ni f_1 ni f_2 ne s'annulent sur γ et qu'elles ont le même nombre de zéros (comptés avec leurs multiplicités) dans Ω (ou de zéros moins de pôles si l'on autorise des pôles dans Ω).

Nous avons vu en cours le théorème des séries de Lagrange : si $w = F(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ $(c_1 \neq 0)$ alors $z = d_1 w + d_2 w^2 + \ldots$, avec nd_n égal au coefficient de z^{n-1} dans le développement en série de $(z/F(z))^n$ ou encore $nd_n = \text{Rés}(\frac{1}{F(z)^n}, 0)$. De plus on a pour toute fonction $g(z)$ holomorphe au voisinage de l'origine $g(z) = g(0) + e_1 w + e_2 w^2 + \ldots$ avec $ne_n = \text{Rés}(\frac{g'(z)}{F(z)^n}, 0)$.

25.10. Inversion de séries. Déterminer les séries inverses (à l'origine bien sûr) dans les cas suivants : $w = z(z-1)$, $w = z(u+z)$, $w = z(1-z^p)$, $w = z(1+z)^a$, $w = ze^{-z}$. Déterminer leurs rayons de convergence.

25.11. Déterminer les termes du développement en série $1 + aw + \frac{a(a-3)}{2}w^2 + \ldots$ de $(1-z)^a$ en puissance de $w = z(z-1)$ (pour z proche de l'origine).

25.12. Montrer que coefficient de x^{n-1} dans $(x/(e^x - 1))^n$ est $(-1)^{n-1}$. On pourra soit utiliser à rebours la série de Lagrange pour l'inversion $z = \text{Log}(1+w)$ de $w = e^z - 1$, soit remarquer que $(e^x - 1)^{-n} + (e^x - 1)^{-n-1}$ est une dérivée et a donc un résidu à l'origine nul ; puis une récurrence.

25.13. Zéro dépendant d'un paramètre. On considère une petite perturbation dépendant d'un paramètre ϵ de l'équation $z = 0$, soit $z - \epsilon k(z) = 0$ avec $k(z) = k_0 + k_1 z + \ldots$, et $k_0 \neq 0$. Pour $|z|$ petit, on a $k(z) \neq 0$ et l'équation équivaut à $\epsilon = z/k(z)$. Pour $|\epsilon|$ petit il y a donc une solution $z(\epsilon)$ petite unique, par inversion de série. Que donne la formule de Lagrange ? On va utiliser le théorème des résidus pour retrouver ce résultat. On fixe $\rho > 0$ inférieur au rayon de convergence de $k(z)$. En utilisant le théorème de Rouché, montrer que pour $|\epsilon|$ petit il y a exactement un $z(\epsilon)$ avec $|z(\epsilon)| < \rho$ qui vérifie $z - \epsilon k(z) = 0$. De plus en utilisant le théorème des résidus, montrer :

$$z(\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{1 - \epsilon k'(z)}{z - \epsilon k(z)} z \, dz \ .$$

Retrouver par cette méthode la série de Lagrange (développer en série de ϵ et faire les intégrations par parties nécessaires).

26. Fonction Gamma

Les théorèmes disent ce que les mathématiciens professionnels savent déjà ; mais les objets mathématiques remarquables contiennent eux une quantité infinie d'information, qui ne peut être réduite à une liste de théorèmes, aussi longue soit-elle. Ainsi l'étude des mathématiques passe en tout premier lieu par l'étude de tels objets remarquables. En analyse complexe, la fonction Gamma occupe une telle place (en compagnie d'autres entités, dont certaines sont peut-être encore plus merveilleuses ; mais pour les étudier on a besoin de Gamma).

J'ai essayé de vous guider vers les propriétés de base de Gamma ; certainement il ne s'agit plus là de mathématiques élémentaires. Je pense que les aspects les plus difficiles ne sont pas liés à l'analyse complexe mais ont plutôt à voir avec la manipulation des estimations, en général. Ceux qui feront l'effort d'étudier cette longue succession d'exercices en tireront un grand bénéfice. Grosso modo les exercices se suivent, mais il y a aussi des développements annexes, des digressions. Il n'est pas nécessaire de tout comprendre de manière linéaire.

Notre point de départ est la formule $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$ (intégrale eulerienne). Dans une feuille précédente nous avons établi que Γ est analytique pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ et que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma'(1) = -\gamma$.

26.1. Utilisez la formule $\Gamma(s) = s(s+1)\dots(s+N-1)\Gamma(s+N)$, valable a priori pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, pour obtenir un prolongement analytique (nécessairement unique) de la fonction Gamma comme fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec comme singularités des pôles simples en $-n$, $n \in \mathbf{N}$, et résidus $(-1)^n/n!$. Justifier le fait que la formule

$$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1) ,$$

dont un usage constant est fait par la suite, est valable dans $\mathbf{C}$.

26.2. Justifier pour $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s+n} .$$

En écrivant ensuite $\Gamma(s) = (\int_0^1 + \int_1^\infty) e^{-t} t^{s-1} dt$ obtenir une nouvelle preuve du prolongement analytique de Gamma, ainsi que ses pôles et résidus.

Formule de Stirling. La formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

vous est, je l'espère, connue. Comme $\Gamma(x+1) = x!$ pour $x \in \mathbf{N}$ on peut espérer l'équivalent général pour $x \to +\infty$:

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Les étapes qui suivent en apportent une démonstration (et donc une démonstration de la formule de Stirling pour les entiers), suivant la présentation par Liouville (1846) d'une méthode générale de Laplace pour l'évaluation asymptotique de certains types d'intégrales à paramètre.

26.3. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^x$ a un unique maximum en $t = x$. Montrer :

$$\Gamma(x+1) = e^{-x}x^{x+1}\int_0^\infty e^{-x(u-1-\log u)}\,du$$

Faites une étude de fonction de $u - 1 - \log u$ pour $0 < u < \infty$.

26.4. On pose

$$y(u) = \begin{cases} -\sqrt{x}\sqrt{u-1-\log u} & (0 < u \leq 1) \\ +\sqrt{x}\sqrt{u-1-\log u} & (1 \leq u < \infty) \end{cases}$$

Montrer que $u \mapsto y$ est une bijection de classe C^1 de $]0, \infty[$ sur $\mathbf{R}$ avec $y'(u) > 0$. On note $u(y)$ la bijection réciproque. Calculer $u'(y)$ en fonction de x, y, u $(= u(y))$. En déduire :

$$\Gamma(x+1) = e^{-x}x^x\int_{\mathbf{R}} e^{-y^2}\frac{2yu}{u-1}\,dy\ .$$

26.5. On suppose $u > 1$. En partant de $u - 1 - \log u = \int_1^u (1 - \frac{1}{v})dv = \int_0^{u-1} \frac{v}{1+v}dv$ montrer :

$$\frac{1}{2u^2}(u-1)^2 \leq \frac{1}{2u}(u-1)^2 \leq u - 1 - \log u \leq \frac{1}{2}(u-1)^2\ ,$$

et en déduire (comme y est du même signe que $u - 1$) :

$$\sqrt{\frac{x}{2}}\frac{u-1}{u} \leq y \leq \sqrt{\frac{x}{2}}(u-1)\ ,$$

puis enfin :

$$\sqrt{2x} \leq \frac{2yu}{u-1} \leq \sqrt{2x} + 2y\ .$$

26.6. On suppose $0 < u < 1$. Montrer alors par une méthode semblable :

$$\sqrt{2x} + 2y \leq \frac{2yu}{u-1} \leq \sqrt{2x}\ .$$

26.7. Montrer :

$$\Gamma(x+1) = e^{-x}x^x\int_{\mathbf{R}} e^{-y^2}(\sqrt{2x} + \xi(y))dy$$

avec $|\xi(y)| \leq 2|y|$. En déduire (on rappelle $\int_{\mathbf{R}} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$) :

$$|\Gamma(x+1) - e^{-x}x^x\sqrt{2\pi x}| \leq e^{-x}x^x 2\ , \qquad \text{puis :}$$

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x(1 + \eta(x)) \qquad \text{avec } |\eta(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$$

On obtiendra une meilleure estimation de η plus tard, mais cela était déjà suffisant pour établir la formule de Stirling pour x réel tendant vers $+\infty$.

26.8. Déduire de ce qui précède :

$$\log\Gamma(x) = (x - \frac{1}{2})\log(x) - x + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O(x^{-1/2})\ ,$$

pour $x \to +\infty$. On montrera plus tard que le terme d'erreur est en réalité de l'ordre de $\frac{1}{x}$ (en fait équivalent à $\frac{1}{12x}$).

26.9. Déduire de la formule de Stirling réelle :

$$\Gamma(x+n+1) \sim n!n^x \ .$$

Ici et dans la suite $x > 0$ est fixé. C'est n qui tend vers l'infini.

26.10. Montrer que la formule précédente vaut pour tout $x \in \mathbf{R}$, et donner comme application un équivalent pour $n \to \infty$ des coefficients de la série de Newton $(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(a) z^n$, pour a réel. On remarquera (pour $a \notin \mathbf{N}$) que $a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)$ s'écrit aussi $(-1)^n\Gamma(-a+n)/\Gamma(-a)$. Ainsi $(-1)^n u_n(a) \sim n^{-a-1}/\Gamma(-a)$. Il est donc plus commode de dire que les coefficients de $(1-z)^{-a} = \sum v_n(a) z^n$ vérifient $v_n(a) \sim \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}$.

26.11. En utilisant $\Gamma(x) = \Gamma(x+n+1)/x(x+1)\dots(x+n)$ montrer :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Dans le numérateur on peut aussi mettre $(n+1)^x$ à la place de n^x.

26.12. Établir : $\Gamma(x) = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{2}{1})^x(\frac{3}{2})^x\dots(\frac{n+1}{n})^x}{(1+x)(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n})}$ puis

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^x(1+\frac{x}{n})^{-1} \ .$$

Montrer que le produit est absolument convergent.

26.13. On pose :

$$W(x) = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})e^{-\frac{x}{n}}$$

Montrer que le produit est absolument convergent et que

$$W(x)\Gamma(x) = e^{\gamma x}\exp(x\sum_{n=1}^{\infty}(\log(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n})) = 1$$

On observera que $\sum_{n=1}^{N}(\log(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}) = \log(N+1)-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{N}$ a pour limite $-\gamma$ lorsque $N \to \infty$.

Jusqu'à présent on s'est limité à la variable réelle. On passe maintenant à la variable complexe.

26.14. Justifier par un théorème du cours le fait que la fonction

$$W(z) = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$$

est une fonction entière dont les zéros sont les entiers négatifs et sont simples. Montrer que $W(z)\Gamma(z) = 1$ vaut dans tout le plan complexe. En déduire la formule suivante, qui met en évidence que la fonction $\Gamma(z)$ n'a aucun zéro dans le plan complexe :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$$

Cette formule est souvent attribuée à Weierstrass, car il l'a prise comme définition initiale de la fonction Gamma. En fait elle avait été déduite des produits infinis de Euler (26.11), (26.12), par d'autres mathématiciens avant Weierstrass. Montrer que les produits infinis (26.11), (26.12), valent aussi pour $x = z$ complexe, distinct de $-\mathbf{N}$.

26.15. Formule des compléments. Prouver en utilisant les produits infinis :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

Que vaut $\Gamma(\frac{1}{2})$?

26.16. Donner une autre démonstration de la formule des compléments en utilisant pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ une intégrale double :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \iint_{t>0, u>0} e^{-t-u} t^{s-1} u^{-s} dt du$$

dans laquelle on fera le changement de variables $t = t'$, $u = t'v$ de sorte que $dtdu = t'dt'dv$. On verra apparaître $\int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1+v} dv$ que l'on connaît déjà.

26.17. Fonction Bêta. Pour s_1 et s_2 de parties réelles strictement positives, faites le changement de variables $t = xT$, $u = (1-x)T$, pour $0 \leq x \leq 1$, $0 < T < \infty$, dans l'intégrale double :

$$\Gamma(s_1)\Gamma(s_2) = \iint_{t>0, u>0} e^{-t-u} t^{s_1-1} u^{s_2-1} dt du$$

et en déduire :

$$B(s_1, s_2) := \int_0^1 x^{s_1-1}(1-x)^{s_2-1} dx = \frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2)}$$

La fraction donne le prolongement analytique de la fonction Bêta, avec des pôles pour $s_1 \in -\mathbf{N}$ ou $s_2 \in -\mathbf{N}$ ($s_1 + s_2 \notin -\mathbf{N}$) et, ailleurs, des zéros pour $s_1 + s_2 \in -\mathbf{N}$. Souvent on appelle Bêta « première intégrale Eulerienne » et Gamma « deuxième intégrale Eulerienne », à moins que ce ne soit l'inverse.

26.18. Montrer qu'un produit infini du type :

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+a_1)\cdots(n+a_k)}{(n+b_1)\cdots(n+b_l)}$$

est convergent si et seulement si $k = l$ et $\sum_i a_i = \sum_j b_j$. Bien sûr on suppose qu'aucun b_j n'est un entier strictement négatif. Montrer qu'en cas de convergence le produit infini vaut :

$$P = \frac{\Gamma(b_1+1)\cdots\Gamma(b_k+1)}{\Gamma(a_1+1)\cdots\Gamma(a_k+1)}$$

Ind. : le terme général doit tendre vers 1 ce qui n'est possible que si $k = l$. Ensuite écrire $n + a = n(1+\frac{a}{n})e^{-\frac{a}{n}}e^{+\frac{a}{n}}$, etc..., ce qui à la fois donnera la formule finale et prouvera que la convergence équivaut à $\sum_i a_i = \sum_j b_j$. Cette formule permet donc de déterminer tous les produits infinis du type $\prod_{n=1}^{\infty} F(n)$ avec F une fraction rationnelle.

26.19. Justifier par un théorème du cours :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n})$$

La dérivée logarithmique $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ est souvent notée $\psi(z)$. Montrer :

$$\psi(z) = \lim_{M\to\infty}\left(\log M - \sum_{n=0}^{M}\frac{1}{z+n}\right)$$

26.20. Formule de duplication. Déduire de la question précédente

$$\psi(z) + \psi(z+\frac{1}{2}) + 2\log(2) = 2\psi(2z)\ ,$$

et prouver que $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})2^{2z} = c\Gamma(2z)$ pour une certaine constante c, que l'on montrera égale à $2\sqrt{\pi}$ en évaluant en $z = \frac{1}{2}$. Ainsi :

$$\Gamma(2z) = \frac{4^z}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})\ .$$

26.21. Déterminer plus généralement la relation entre $\Gamma(Nz)$ et le produit $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{N})\cdots\Gamma(z+\frac{N-1}{N})$ (formule de multiplication de Gauss ; le cas $N = 2$ est aussi dû à Legendre ; la constante inconnue sera obtenue en posant $z = \frac{1}{N}$ et en utilisant la formule des compléments).

Dans la suite Ω est l'ouvert $\mathbf{C}\setminus]-\infty,0]$.

26.22. Montrer que Ω est un ouvert simplement connexe. Par exemple on utilisera le fait qu'il est "étoilé" par rapport à $z = 1$ pour montrer que tout lacet est homotope au lacet constant en 1.

26.23. Montrer qu'il existe une fonction analytique $f(z)$ sur Ω avec $f(1) = 0$ et $\exp(f(z)) = \Gamma(z)$, et qu'elle est unique. On la notera $\log\Gamma(z)$. L'exercice suivant en donne une autre preuve via une formule explicite a priori pour $\log\Gamma(z)$. **Attention !** : il ne faut surtout pas la noter $\mathrm{Log}\,\Gamma(z)$. On ne pourrait faire une telle chose que si $\Gamma(z)$ ne prenait pas de valeurs réelles négatives. Mais en fait Γ prend de telles valeurs (une infinité de fois sur toute droite verticale $z = \sigma + it$, $|t| \to \infty$).

26.24. Justifier la formule valable pour tout $z \in \Omega$:

$$\log\Gamma(z) = -\gamma z - \mathrm{Log}\, z - \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{Log}(1+\frac{z}{n}) - \frac{z}{n})$$

26.25. Soit $f(u)$ une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$. Justifier :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) &= \int_0^1 f(u)du + \int_0^1 (u-\frac{1}{2})f'(u)du \\ &= \int_0^1 f(u)du + \frac{1}{2}\int_0^1 u(1-u)f''(u)du\end{aligned}$$

26.26. Soit $f(u)$ une fonction de classe C^2 sur $[0,\infty[$ avec $\int_0^\infty |f''(u)|du < \infty$. Montrer :

$$f(0)+f(1)+\cdots+f(n) = \frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(n)+\int_0^n f(u)du + S_f + r_n$$

avec $\lim r_n = 0$ et $|S_f| \leq \frac{1}{8}\int_0^\infty |f''(u)|du$. Indication : on posera $S_f = \sum_{n=0}^\infty u_n$ avec $u_n = \frac{1}{2}\int_0^1 u(1-u)f''(u+n)du$. On montrera la convergence absolue de la série et on posera $r_n = -\sum_{m\geq n} u_m$.

À l'avenir on écrira $o(1)$ pour désigner une suite (ou une fonction) qui tend vers zéro. On a donc :

$$f(0)+f(1)+\cdots+f(n) = \frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(n)+\int_0^n f(u)du + S_f + o(1)$$

pour une certaine constante S_f avec $|S_f| \leq \frac{1}{8}\int_0^\infty |f''(u)|du$.

26.27. Soit $z \in \Omega$, fixé. Montrer :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Log} z + \operatorname{Log}(z+1)+\cdots+\operatorname{Log}(z+n)\\ &\qquad = (n+z+\frac{1}{2})\operatorname{Log}(z+n) - (z-\frac{1}{2})\operatorname{Log} z - n + S(z) + o(1)\end{aligned}$$

pour une certaine constante $S(z)$ avec $|S(z)| \leq \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{du}{|z+u|^2}$.

26.28. En déduire alors :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Log} z + \sum_{k=1}^n \operatorname{Log}(1+\frac{z}{k})\\ &= (n+\frac{1}{2})\operatorname{Log}(1+\frac{z}{n}) + z\operatorname{Log}(z+n)\\ &\quad - (z-\frac{1}{2})\operatorname{Log} z - 1 - S(1) + S(z) + o(1)\\ &= z\operatorname{Log}(n) + z - (z-\frac{1}{2})\operatorname{Log} z - 1 - S(1) + S(z) + o(1)\\ &= z\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + (1-\gamma)z - (z-\frac{1}{2})\operatorname{Log} z - 1 - S(1) + S(z) + o(1)\end{aligned}$$

26.29. En comparant avec (26.24) montrer alors :

$$\log\Gamma(z) = (z-\frac{1}{2})\operatorname{Log} z - z + 1 + S(1) - S(z)$$

Je ne veux pas voir de $o(1)$ dans cette formule puisqu'il n'y a plus de n...

26.30. Prouver pour $z = |z|e^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$:

$$\int_0^\infty \frac{du}{|u+z|^2} = \frac{1}{|z|}\frac{\theta}{\sin\theta}\ .$$

Indication : pour $\theta = 0$, on a $z > 0$ et $|u+z|^2 = (u+z)^2$, donc l'intégrale vaut $1/z$. Pour $0 < \theta < \pi$, faites les changements de variables $u = |z|v$, $v + \cos\theta = \sin\theta w$. On notera que $\operatorname{Arctg}\operatorname{cotg}\theta = \frac{\pi}{2} - \theta$ pour $0 < \theta < \pi$. Autre méthode : écrire $|u+z|^2 = (u+z)(u+\overline{z})$ et décomposer en éléments simples.

26.31. On a donc pour $z \in \Omega$:

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \operatorname{Log} z - z + C - S(z)$$

avec une certaine constante C ($= 1 + S(1)$) et un reste $-S(z)$ vérifiant $|S(z)| \leq \frac{1}{8} \frac{1}{|z|} \frac{\theta}{\sin \theta}$. En comparant avec la formule de Stirling réelle montrer $C = \frac{1}{2} \log(2\pi)$. Conclure :

Formule de Stirling complexe

$$\boxed{\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \operatorname{Log} z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + R(z) \qquad |R(z)| \leq \frac{1}{8|z|} \frac{\theta}{\sin \theta}}$$

26.32. Montrer que l'on peut utiliser les majorations suivantes :

$$|R(z)| \leq \begin{cases} \frac{1}{8x} & z = x > 0 \\ \frac{\pi}{16|z|} & \operatorname{Re}(z) \geq 0 \\ \frac{\pi}{8|\operatorname{Im}(z)|} & z \in \Omega \end{cases}$$

En fait on explique dans le paragraphe suivant que pour $x > 0$ on peut montrer $0 < R(x) < \frac{1}{12x}$, et $R(x) \sim \frac{1}{12x}$, et plus généralement $R(z) \sim \frac{1}{12z}$ uniformément pour $|\operatorname{Arg} z| \leq \pi - \epsilon$, $\epsilon > 0$.

26.33. Série de Stirling. Sans démonstration, indiquons que par une étude plus sophistiquée, utilisant la formule sommatoire d'Euler-McLaurin qui donne une relation plus précise entre une somme $f(0) + \cdots + f(n)$ et une intégrale $\int_0^n f(u)du$, on montre que le terme d'erreur $R(z)$ est susceptible d'un développement asymptotique

$$R(z) \approx \frac{B_2}{2z} + \frac{B_4}{3 \cdot 4z^3} + \frac{B_6}{5 \cdot 6z^5} + \ldots$$

qui fait intervenir les nombres de Bernoulli $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ... Le premier terme est donc $\frac{1}{12z}$. La série est divergente mais si on l'arrête à son terme en z^{-2n-1} l'erreur commise est un $O(z^{-2n-3})$. De plus pour $z = x > 0$ les sommes partielles sont alternativement supérieures et inférieures à $R(x)$. Donc pour $x > 0$ on a $R(x) = \frac{\alpha}{12x}$ avec $0 < \alpha < 1$. En particulier :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp(\frac{\alpha(n)}{12n}) \qquad 0 < \alpha(n) < 1, \alpha(n) \to 1$$

La formule est étonnamment précise, même pour n petit. Par exemple, pour $n = 5$, on trouve $\sqrt{2\pi 5} \left(\frac{5}{e}\right)^5 \exp(\frac{1}{60}) = 120,0026\ldots$ (et $\alpha(5) = 0,99868\ldots$).

26.34. À cause du fait que la formule de Stirling pour $\log \Gamma(z)$ a la même forme pour z réel comme pour z complexe, et que pour les valeurs réelles positives $\Gamma(z)$ est grand, on pourrait penser que $\Gamma(z)$ prend plus généralement de grandes valeurs lorsque $|z| \to +\infty$. En fait ce n'est pas le cas. D'ailleurs la fonction $\Gamma(z)^{-1}$ ressemble à $\sin z$ et cette dernière a une croissance exponentielle sur les droites verticales. Cela suggère que $\Gamma(z)$ a une dé-croissance exponentielle sur les droites verticales. Effectivement, c'est le cas. Considérons une demi-bande verticale $z = \sigma + it$, $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, on s'intéresse à ce qui se passe pour $t \to +\infty$ dans cette bande. Par la formule de Stirling complexe (26.31) :

$$\log\Gamma(z) = (z - \frac{1}{2})\operatorname{Log} z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + R(z) \qquad |R(\sigma + it)| \leq \frac{\pi}{8t}$$

On rappelle que $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$ lorsque $|\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)| < \pi$. En écrivant $\sigma + it = it(1 - i\frac{\sigma}{t})$ justifier (pour $t > 0$)

$$\operatorname{Log} z = \log t + i\frac{\pi}{2} - i\frac{\sigma}{t} + E(z)$$

avec un terme d'erreur $E(z)$ vérifiant $|E(z)| \leq Kt^{-2}$ pour $t \geq t_0$, les constantes t_0 et K dépendant de σ_1 et σ_2 (on peut prendre $t_0 = 2M$ et $K = M^2$ avec $M = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|)$). On écrit cela de manière plus brève sous la forme :

$$\operatorname{Log} z = \log t + i\frac{\pi}{2} - i\frac{\sigma}{t} + O(\frac{1}{t^2}) \qquad \text{(pour } t \to +\infty\text{)}$$

avec des constantes implicites dans le grand O qui ne dépendent que de σ_1 et σ_2. Montrer alors avec la même signification des symboles O :

$$\operatorname{Re}\log\Gamma(\sigma + it) = (\sigma - \frac{1}{2})\log t - \frac{\pi}{2}t + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O(\frac{1}{t})$$
$$\operatorname{Im}\log\Gamma(\sigma + it) = t\log t - t + \frac{\pi}{2}(\sigma - \frac{1}{2}) + O(\frac{1}{t})$$

Quelles sont les formules lorsque $t \to -\infty$ au lieu de $+\infty$? Montrer en particulier en conclusion :

$$|\Gamma(\sigma + it)| \underset{\substack{|t|\to\infty \\ \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2}}{\sim} \sqrt{2\pi}|t|^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} ,$$

ce qui signifie que le rapport des deux termes tend vers 1 pour $|t| \to \infty$ uniformément par rapport à $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$. Il y a donc bien la décroissance exponentielle annoncée.

26.35. Prouver la formule des compléments en montrant que la fonction $f(s) = \sin(\pi s)\Gamma(s)\Gamma(1 - s)$ est entière, 1-périodique, et bornée pour $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$.

26.36. Prouver la formule de duplication en montrant que la fonction $f(s) = 4^s\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2})/\Gamma(2s)$ est entière, 1-périodique, et bornée pour $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$.

26.37. Utiliser la formule des compléments pour montrer :

$$|\Gamma(\frac{1}{2} + it)| = \sqrt{\frac{2\pi}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}} \quad \text{et} \quad |\Gamma(1 + it)| = \sqrt{\frac{2\pi t}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}}$$

Université des Sciences et Technologies Lille 1
Licence de Mathématiques, S5 (2004/2005)
MATH 305 (Resp. : J.-F. Burnol)

Partiel du 20 novembre 2004 – durée : 2 heures

NI DOCUMENTS NI CALCULATRICES

La notation tiendra compte, pour la forme comme pour le fond, du soin apporté à la présentation. Seuls des raisonnements précis et complets apporteront le bénéfice entier des points. Une réponse non justifiée n'est pas une réponse valable.

Dans tout le sujet une fonction f de la variable complexe $z = x + iy$ pourra être notée indifféremment $f(z)$ ou $f(x, y)$.

Le sujet comporte quatre problèmes indépendants. Barème indicatif : 4+5+6+5.

1

Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert non vide et f définie sur U, de classe C^1.

1.1. Rappeler comment s'écrivent en fonction de $u = \mathrm{Re}(f)$ et de $v = \mathrm{Im}(f)$ les conditions de Cauchy-Riemann pour l'holomorphie de f dans U.

1.2. Soient α et β deux nombres réels, et soit f la fonction définie sur U par :

$$f(z) = x^2 + \alpha y^2 + 2i\beta xy$$

Déterminer les valeurs de (α, β) qui font de f une fonction holomorphe.

1.3. Pour cette question $U = \{z = x + iy \mid |x| < 1, |y| < 1\}$. On suppose que $f = u + iv$ est holomorphe sur U et que sa partie réelle u ne dépend que de y : $u(x, y) = A(y)$. Montrer tout d'abord que v ne dépend que de x : $v(x, y) = B(x)$. Puis, montrer que f est de la forme $f(z) = c + \lambda iz$ avec $c \in \mathbf{C}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

2

On considère le polynôme $P(z) = (z-1)(z-2)(z-3) = z^3 - 6z^2 + 11z - 6$. Soit C_R le cercle $|z| = R$ parcouru dans le sens direct. Soit $R \neq 1, 2, 3$. On pose pour $m \in \mathbf{Z}$:

$$u_m(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{z^m}{P(z)}\, dz$$

2.1. Montrer que $u_m(R)$ est indépendant de R pour $R > 3$. On suppose $m < 0$; montrer $u_m(R) = 0$ en considérant $R \to \infty$.

2.2. Toujours pour $m < 0$, où sont situées les singularités de $\frac{z^m}{P(z)}$? Obtenir $\mathrm{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 0)$ via le calcul de $u_m(R)$, $R > 3$, par le théorème des résidus.

2.3. Déduire de la question précédente la série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ de $\frac{1}{P(z)}$ à l'origine. Quel est son rayon de convergence ?

2.4. Déterminer $u_m(R)$ pour $m \geq 0$ et $R > 3$ par le théorème des résidus. En déduire la série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ de $\frac{1}{P(z)}$ dans l'anneau $|z| > 3$.

TOURNEZ LA PAGE

3

3.1. Soient g et γ deux fonctions continues $[0,1] \to \mathbf{C}$. On définit pour $z \in \mathbf{C}$: $F(z) = \int_0^1 g(t) e^{z\gamma(t)} dt$. Justifier l'identité :

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 g(t) \frac{\gamma(t)^n}{n!} dt \right) z^n$$

et en déduire que F est une fonction entière (= holomorphe sur tout $\mathbf{C}$).

3.2. Quelle est la représentation en série de F' ? En déduire l'identité $F'(z) = \int_0^1 g(t)\gamma(t) e^{z\gamma(t)} dt$ et plus généralement, pour tout polynôme P, $P(\frac{d}{dz})F(z) = \int_0^1 g(t) P(\gamma(t)) e^{z\gamma(t)} dt$.

3.3. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ un chemin de classe C^1 et soit P un polynôme ne s'annulant pas sur $\gamma([0,1]) \subset \mathbf{C}$. Utiliser les résultats précédents pour montrer que

$$f(z) = \int_\gamma \frac{e^{zw}}{P(w)}\, dw$$

est une fonction entière. On suppose de plus que le chemin γ est un lacet ; montrer $P(\frac{d}{dz})f(z) = 0$.

3.4. On suppose que P n'a que des zéros simples et que γ est le cercle $|w| = R$ parcouru dans le sens direct. Exprimer $f(z)$ en fonction de certains des zéros de P (on précisera lesquels).

4

4.1. Déterminer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+e^{ix})}\, dx$$

en utilisant le théorème des résidus (enfin, ce n'est pas obligatoire ; si vous trouvez une autre méthode (il en existe...), on sera impressionné et on vous donnera même un bonus). On justifiera soigneusement par des inégalités précisément énoncées les estimations menant au résultat final.

4.2. On rappelle $\operatorname{ch} z = (e^z + e^{-z})/2$ et $\operatorname{sh} z = (e^z - e^{-z})/2$. Que valent $\operatorname{ch}(z + i\pi)$ et $\operatorname{ch}(z + i\,2\pi)$? Prouver $|\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{sh}^2(\operatorname{Re}(z)) + \cos^2(\operatorname{Im}(z))$. Quels sont les zéros de la fonction $\operatorname{ch} z$? Déterminer la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x}\, dx$$

pour $|\operatorname{Re}(a)| < 1$, par le théorème des résidus (ou toute autre méthode).

Université des Sciences et Technologies Lille 1
Licence de Mathématiques, S5 (2004/2005)
MATH 305 (Resp. : J.-F. Burnol)

Partiel du 20 novembre 2004 – durée : 2 heures

CORRIGÉ

1

1.1. Les conditions de Cauchy-Riemann sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

1.2. On doit avoir sur U : $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = 2\beta x$. Donc $\beta = 1$ (comme U est ouvert il y a au moins un point dans U avec $x \neq 0$). De plus $\frac{\partial u}{\partial y} = 2\alpha y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2\beta y$, donc $\alpha = -\beta = -1$. Réciproquement si $\alpha = -1$ et $\beta = 1$ les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites (d'ailleurs on a alors $f(z) = z^2$).

1.3. On a $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ donc v ne dépend pas de y, c'est-à-dire, v est une fonction de x seulement : $v(x, y) = B(x)$. On a de plus $\frac{\partial u}{\partial y} = A'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -B'(x)$. Notons $D(x, y)$ cette valeur commune. Comme $D(x, y) = A'(y)$, D ne dépend pas de x. Comme $D(x, y) = -B'(x)$, D ne dépend pas de y. Donc D est une constante. Comme $A'(y) = D$ on a $A(y) = Dy + a_0$ et comme $B'(x) = -D$ on a $B(x) = -Dx+b_0$. Au final $f(z) = Dy+a_0+i(-Dx+b_0) = a_0 + ib_0 + D(y - ix) = c + i\lambda z$ avec $c = a_0 + ib_0 \in \mathbf{C}$ et $\lambda = -D \in \mathbf{R}$ (pour un ouvert plus général que le carré $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ il faudrait rajouter une hypothèse de connexité ; car c et λ peuvent être différents d'une composante connexe à l'autre).

2

2.1. Si $3 < R < R'$ on peut appliquer le théorème des résidus à l'anneau $R \leq |z| \leq R'$; comme il n'y a pas de singularité dans cet anneau, $u_m(R') - u_m(R) = 0$. On peut aussi rappeler un théorème du cours démontré avant le théorème des résidus et qui affirme l'indépendance de $\int_{|z|=r} f(z)dz$ par rapport à r pour une fonction f holomorphe sur un anneau. On a $|P(z)| \geq (R - 1)(R - 2)(R - 3) \geq (R - 3)^3$ sur $|z| = R > 3$. Donc $|u_m(R)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{R^m}{(R-3)^3} 2\pi R$ qui tend vers zéro lorsque $R \to \infty$ pour $m + 1 < 3$, donc en particulier pour $m < 0$. Donc $u_m(R) = 0$ pour $m < 0$ et $R > 3$.

2.2. Les singularités sont en $z = 0$ (car $m < 0$!), et bien sûr aussi en 1, 2, 3. Par le théorème des résidus on a pour $R > 3$:

$$u_m(R) = \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 0) + \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 1) + \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 2) + \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 3)$$

Donc, compte tenu de la question précédente, pour $m < 0$:

$$0 = \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 0) + \frac{1}{2} + \frac{2^m}{-1} + \frac{3^m}{2}$$

et ainsi $\text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 0) = -\frac{1}{2} + 2^m - \frac{3^m}{2}$ pour $m < 0$.

2.3. Si l'on écrit $\frac{1}{P(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ au voisinage de l'origine, on a :

$$c_n = \text{Rés}(\frac{1}{P(z)} \frac{1}{z^{n+1}}; 0)$$

donc, par la question précédente :

$$c_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}$$

Cela donne par exemple $c_0 = -1/6$ et $c_1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{18} = -\frac{22}{72} = -\frac{11}{36}$ ce qui est correct : $(-6 + 11z + \dots)^{-1} = -\frac{1}{6}(1 + \frac{11}{6}z + \dots)$. Le rayon de convergence est exactement 1 puisque c'est la distance de 0 à la plus proche singularité $(z = 1)$.

2.4. Lorsque $m \geq 0$ il n'y a pas de singularité en $z = 0$ et donc le théorème des résidus donne pour $R > 3$:

$$u_m(R) = \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 1) + \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 2) + \text{Rés}(\frac{z^m}{P(z)}; 3)$$

Soit :

$$u_m(R) = \frac{1}{2} - 2^m + \frac{3^m}{2}$$

Remarquons que cette formule confirme que $u_0(R)$ et $u_1(R)$ sont nuls $(m + 1 < 3)$. Par un théorème du cours les coefficients a_n de la série de Laurent de $1/P(z)$ dans l'anneau $|z| > 3$ sont donnés par la formule :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{1}{P(z)} \frac{1}{z^{n+1}} \, dz$$

c'est-à-dire $a_n = u_m(R)$ pour $m = -n - 1$ et $R > 3$. Ainsi $a_n = 0$ pour $n \geq 0$ et

$$a_n = \frac{1}{2} - 2^{-n-1} + \frac{1}{2} 3^{-n-1}$$

pour $n < 0$. Ou encore, avec $n = -k$, $k \geq 1$:

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} 2^k + \frac{1}{6} 3^k \right) \left(\frac{1}{z} \right)^k$$

pour $|z| > 3$. Le premier terme non nul est pour $k = 3$. Attention au fait que la somme débute avec $k = 1$ pas avec $k = 0$. On peut retrouver plus directement ce résultat en faisant une décomposition en éléments simples.

3

3.1. Il existe une constante R telle que $|z\gamma(t)| \leq R$ pour $t \in [0,1]$, puisque z est fixé, et que γ est bornée, car continue sur le compact $[0,1]$. On a $e^Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{n!}$ avec convergence uniforme sur le disque $\{|Z| \leq R\}$, donc $e^{z\gamma(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(t)^n}{n!} z^n$ avec convergence uniforme par rapport à $t \in [0,1]$. On peut permuter la sommation et l'intégration en cas de convergence uniforme et cela donne la formule de l'énoncé pour $F(z)$. On a représenté F comme la somme d'une série entière : comme cette série converge pour tout z, c'est que son rayon de convergence est infini. Donc F est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$, autrement dit F est une fonction entière.

3.2. Si l'on écrit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ on a

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n .$$

Or :

$$(n+1)a_{n+1} = (n+1)\left(\int_0^1 g(t)\frac{\gamma(t)^{n+1}}{(n+1)!}dt\right) = \int_0^1 g(t)\gamma(t)\frac{\gamma(t)^n}{n!}dt$$

donc F' est obtenu à partir de $(g\gamma, \gamma)$ comme F l'est à partir de (g, γ). Donc $F'(z) = \int_0^1 g(t)\gamma(t)e^{z\gamma(t)}dt$. Par récurrence on prouve alors $F^{(N)}(z) = \int_0^1 g(t)(\gamma(t))^N e^{z\gamma(t)}dt$, et donc par des combinaison linéaires :

$$P(\frac{d}{dz})F(z) = \int_0^1 g(t)P(\gamma(t))e^{z\gamma(t)}dt$$

pour tout polynôme. Autrement dit on peut « dériver sous le signe somme ».

3.3. Par définition, l'intégrale curviligne vaut :

$$f(z) = \int_0^1 \frac{1}{P(\gamma(t))} e^{z\gamma(t)}\gamma'(t)dt$$

qui est de la forme étudiée précédemment avec $g(t) = \gamma'(t)/P(\gamma(t))$ (comme on a supposé γ de classe C^1, g est bien continue). Donc $f(z)$ est une fonction entière et ses dérivées s'obtiennent en dérivant sous le signe somme. Par exemple

$$f'(z) = \int_0^1 \frac{\gamma(t)}{P(\gamma(t))} e^{z\gamma(t)}\gamma'(t)dt = \int_\gamma \frac{w}{P(w)} e^{zw}dw$$

où l'on est revenu à la forme « intégrale curviligne ». Ainsi :

$$P(\frac{d}{dz})f(z) = \int_\gamma \frac{P(w)}{P(w)} e^{zw}dw = \int_\gamma e^{zw}\, dw .$$

Si l'on suppose maintenant que γ est un lacet, compte tenu du fait que $w \mapsto e^{zw}$ admet une primitive (pour $z \neq 0$ on prend $w \mapsto e^{zw}/z$; pour $z = 0$, on prend $w \mapsto w$ comme primitive de $w \mapsto 1$), la dernière intégrale est nulle. Donc $P(\frac{d}{dz})f(z) = 0$.

3.4. On note $z_1, \ldots, z_k$ ceux des zéros de P qui ont un module inférieur strictement à R. L'intégrale vaut alors par le théorème des résidus :

$$2\pi i \sum_{1\le j\le k} \frac{1}{P'(z_j)}\, e^{z_j\, z} \, .$$

Note : par convention une somme indicée par un ensemble vide vaut 0 ; donc la formule vaut aussi si P n'a aucun zéro de module inférieur à R.

4

4.1. Soit $R > 1$. On note C_R le contour, parcouru dans le sens direct, comportant le segment $[-R, +R]$ et le demi-cercle $Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, dans le demi-plan supérieur. Notons $I(R)$ la contribution du demi-cercle à l'intégrale de $\frac{1}{(1+z^2)(2+e^{iz})}dz$. Dans le demi-plan supérieur on a $|e^{iz}| \le 1$ donc $|2+e^{iz}| \ge 1$ et ainsi

$$\left|\frac{1}{(1+z^2)(2+e^{iz})}\right| \le \frac{1}{R^2-1}$$

sur le demi-cercle $|z| = R$, $\mathrm{Im}(z) \ge 0$, $R > 1$. Alors :

$$|I(R)| \le \frac{1}{R^2-1}\,\pi R\, ,$$

et donc $\lim_{R\to\infty} I(R) = 0$. Or par le théorème des résidus l'intégrale le long du contour entier C_R vaut

$$2\pi i\, \text{Rés}(\frac{1}{(1+z^2)(2+e^{iz})}, i) = 2\pi i\, \frac{1}{2i(2+e^{-1})} = \frac{\pi}{2+\frac{1}{e}}$$

En conclusion :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+e^{ix})}\, dx = \frac{\pi}{2+\frac{1}{e}}$$

4.2. On a $\mathrm{ch}(z+i\pi) = (e^{z+i\pi} + e^{-z-i\pi})/2 = -\mathrm{ch}(z)$ car $e^{i\pi} = -1$. Donc $\mathrm{ch}(z+i\,2\pi) = -\mathrm{ch}(z+i\pi) = +\mathrm{ch}(z)$. Pour le calcul de $|\mathrm{ch}(z)|^2$, écrivons $z = x+iy$. On a :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{ch}(z)|^2 = \mathrm{ch}(z)\overline{\mathrm{ch}(z)} &= \frac{1}{4}(e^z + e^{-z})(e^{\overline{z}} + e^{-\overline{z}}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{z+\overline{z}} + e^{z-\overline{z}} + e^{-z+\overline{z}} + e^{-z-\overline{z}}) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{2iy} + e^{-2iy} + e^{-2x}) \\
&= \frac{1}{4}((e^x - e^{-x})^2 + (e^{iy} + e^{-iy})^2) = \mathrm{sh}^2(x) + \cos^2(y) \\
&= \frac{1}{4}((e^x + e^{-x})^2 + (e^{iy} - e^{-iy})^2) = \mathrm{ch}^2(x) - \sin^2(y)\, ,
\end{aligned}$$

la dernière ligne donnant une variante. Une autre méthode est d'utiliser les identités trigonométriques usuelles :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(z) = \cos(iz) = \cos(-y+ix) &= \cos(y)\cos(ix) + \sin(y)\sin(ix) \\
&= \cos(y)\,\mathrm{ch}(x) + i\sin(y)\,\mathrm{sh}(x) \\
\Rightarrow |\mathrm{ch}\, z|^2 &= \cos^2(y)\,\mathrm{ch}^2(x) + \sin^2(y)\,\mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{sh}^2(x) + \cos^2(y)
\end{aligned}$$

car $\mathrm{ch}^2 = \mathrm{sh}^2 + 1$, $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Les zéros de $\mathrm{ch}\, z$ sont donc obtenus pour $x = 0$ et $y \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, soit $z = i\frac{\pi}{2} + \pi i\, k$, $k \in \mathbf{Z}$. Soit C_R le contour rectangulaire de base le segment $[-R,R]$ et de hauteur π, dans le sens direct. Par le théorème des résidus :

$$\int_{C_R} \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z} dz = 2\pi i \operatorname{Rés}(\frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z}, i\frac{\pi}{2}) = 2\pi i \frac{e^{ai\frac{\pi}{2}}}{\operatorname{sh} i\frac{\pi}{2}} = 2\pi e^{ai\frac{\pi}{2}} .$$

Notons I, II, III, et IV les contributions des quatres côtés, le premier étant $[-R,R]$, les suivants étant énumérés dans le sens direct. Alors :

$$III = -\int_{-R}^{+R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{\operatorname{ch}(x+i\pi)} dx = +e^{ai\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx = e^{ai\pi} \cdot I$$

Sur le deuxième côté on a $|\operatorname{ch} z| \geq \operatorname{sh}(R)$ et $|e^{az}| = e^{\operatorname{Re}(az)} = e^{\operatorname{Re}(a)R - \operatorname{Im}(a)y} \leq e^{\pi|\operatorname{Im}(a)|} e^{|\operatorname{Re}(a)|R}$. D'où la majoration :

$$|II| \leq \pi e^{\pi|\operatorname{Im}(a)|} \frac{e^{|\operatorname{Re}(a)|R}}{\operatorname{sh} R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{R\to+\infty} II = 0 ,$$

car $\operatorname{sh} R \sim \frac{1}{2}e^R$ et $|\operatorname{Re}(a)| < 1$. On montre de même $\lim_{R\to\infty} IV = 0$. En conclusion :

$$\lim_{R\to+\infty} (1+e^{i\pi a}) \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx = 2\pi\, e^{i\frac{\pi}{2}a} ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{2\pi}{e^{-i\frac{\pi}{2}a} + e^{i\frac{\pi}{2}a}} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(i\frac{\pi}{2}\,a)} = \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}\,a)} .$$

Annexe 1. Apportons quelques commentaires. L'intégrale est une fonction paire de a (comme le confirme sa valeur) et l'on peut aussi écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}\,a)} .$$

Limitons nous aux valeurs réelles de a, c'est-à-dire $a \in\,]-1,+1[$. Il n'est pas trop difficile (*cf.* annexe 2) de justifier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch} x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m}x^{2m}}{(2m)!} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m}}{(2m)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{\operatorname{ch} x} dx ,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}\,a)} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \frac{a^{2m}}{(2m)!} \qquad \text{avec } c_{2m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{\operatorname{ch} x} dx .$$

Cela met en évidence $c_{2m} > 0$. Par ailleurs, si l'on utilise le même contour C_R et le théorème des résidus pour c_{2m}, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{\operatorname{ch} x} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+i\pi)^{2m}}{\operatorname{ch} x} dx = 2\pi(-1)^m (\frac{\pi}{2})^{2m} ,$$

d'où une relation déterminant c_{2m} comme combinaison linéaire des c_{2k}, $k < m$. Cette relation se simplifie si l'on pose $c_{2m} = \pi(\frac{\pi}{2})^{2m} E_{2m}$. Elle s'écrit :

$$\forall m \geq 0 \quad E_{2m} + 2\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{2m}{2k} 4^{k-1} E_{2m-2k} = (-1)^m ,$$

ce qui montre par récurrence que les « nombres d'Euler » E_{2m} sont entiers et impairs ($E_0 = 1$). Ce sont les coefficients du développement :

$$\frac{1}{\cos t} = 1 + 1\,\frac{t^2}{2} + 5\,\frac{t^4}{24} + 61\,\frac{t^6}{720} + \cdots + E_{2m} \frac{t^{2m}}{(2m)!} + \ldots$$

De l'identité $\frac{1}{\cos t}\ \cos t = 1$ on obtient une autre relation de récurrence :

$$\forall m \geq 1 \quad E_{2m} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{2m}{2k} E_{2m-2k} = 0 \ ,$$

ce n'est donc *pas la même* que celle écrite ci-dessus. Mais vous pourrez vous amuser (si si) à constater que toutes deux donnent $E_8 = 1385$ après 1, 1, 5, 61. Cette deuxième relation montre également par récurrence que E_{2m} est entier, et si l'on travaille un peu plus, aussi le fait qu'il est impair.

On peut partir des équations $\mathrm{tg}'(t) = 1 + \mathrm{tg}^2(t)$ et $(\frac{1}{\cos t})' = \mathrm{tg}(t)\frac{1}{\cos t}$ pour établir d'autres relations de récurrence qui concernent les dérivées successives en $t = 0$ des fonctions $\mathrm{tg}\, t$ et $\frac{1}{\cos t}$. Cette approche élémentaire permet aussi de montrer assez facilement que les E_{2m} sont entiers, et impairs, et de plus elle établit $E_{2m} > 0$ ce qui est moins accessible par les deux relations de récurrence précédentes (mais qui était évident sur la représentation de c_{2m} par une intégrale).

Annexe 2. Supposons que les fonctions $u_n(x)$ vérifient $u_n(x) \geq 0$ et soit $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. Supposons que la série converge uniformément sur tout intervalle $[0, R]$, $R < \infty$. Alors $\int_0^\infty U(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty u_n(x)\, dx$.

Preuve : On a $U(x) \geq \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ donc $\int_0^\infty U(x)\, dx \geq \sum_{n=0}^{N} \int_0^\infty u_n(x)\, dx$, et l'on passe à la limite pour $N \to \infty$. Dans l'autre sens, par la convergence uniforme, on a pour tout R : $\int_0^R U(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^R u_n(x)\, dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty u_n(x)\, dx$ et l'on passe à la limite pour $R \to \infty$. Précisons que la démonstration marche que $\int_0^\infty U(x)\, dx$ soit finie ou infinie, et que l'on n'a pas supposé $\int_0^\infty u_n(x)\, dx < \infty$.

Dans ce contexte, ceux d'entre vous qui étudient l'intégrale de Lebesgue savent que le *théorème de la convergence monotone* donne le même résultat sans aucune hypothèse de convergence uniforme. Le théorème et sa preuve est donc pour ceux qui ne connaissent que l'intégrale de Riemann (on a donc supposé que les u_n étaient Riemann intégrables sur tout intervalle $[0, R]$, et la convergence uniforme implique que U est Riemann intégrable sur $[0, R]$.)

Toujours pour ceux qui ne disposent pas des théorèmes de Lebesgue, on peut également ajouter que si en plus d'être positives les fonctions u_n sont continues, et si l'on sait aussi a priori que $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est continue, alors cela suffit pour affirmer par le « théorème de Dini » que la convergence est uniforme sur $[0, R]$, pour tout $R < \infty$.

On énonce souvent le théorème de Dini sous la forme : *si sur* $[0, 1]$ *les* $f_n \geq 0$ *sont une* ***suite décroissante de fonctions continues*** *convergeant simplement vers* 0 *alors la convergence est uniforme.* **Preuve très brève :** Soit $\epsilon > 0$. Pour tout x soit $n = n(x, \epsilon)$ le plus petit indice avec $f_n(x) \leq \epsilon$. Soit $U(x)$ un voisinage ouvert de x avec $f_n \leq 2\epsilon$ sur $U(x)$. Les $U(x)$ forment un recouvrement par des ouverts du compact $[0, 1]$, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Soit $x_1, \ldots, x_m$ les points correspondants et $n_1, \ldots, n_m$ les indices associés. Soit $N = \max(n_1, \ldots, n_m)$. Sur $U(x_j)$ on a $f_N \leq f_{n_j} \leq 2\epsilon$. Donc $f_N \leq 2\epsilon$ sur $[0, 1]$. Donc pour tout $n \geq N$ on a $0 \leq f_n \leq 2\epsilon$ sur $[0, 1]$.

Université des Sciences et Technologies Lille 1
Licence de Mathématiques, 2004-2005, Semestre 5
MATH 305 – Analyse Complexe (Resp. : J.-F. Burnol)

Examen du 12 janvier 2005 – durée : 3 heures

Ni Documents ni Calculatrices

Une réponse non justifiée par une démonstration n'est pas une réponse valable. Dans tout le sujet un nombre complexe $z = x + iy$ peut aussi être noté (x, y) et l'on peut écrire indifféremment $f(z)$ ou $f(x, y)$.
Le sujet comporte quatre problèmes indépendants. Barème indicatif : $6 + 6 + 5 + 4$.

1

Soit $U = \{1 < |z| < 2\}$ et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On note $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$.

1.1. Quelles sont les équations de Cauchy-Riemann ? Montrer que u vérifie l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1.2. On suppose que l'on peut écrire $u(x, y) = \psi(x^2 + y^2)$ pour une certaine fonction $\psi :]1, 4[\to \mathbf{R}$, de classe C^2. Montrer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\psi'(x^2 + y^2) + 4x^2\psi''(x^2 + y^2) ,$$

et donner la formule analogue pour $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

1.3. En déduire que ψ vérifie l'équation différentielle :

$$\psi'(t) + t\psi''(t) = 0 \qquad \text{sur }]1, 4[\ .$$

Quelle est la dérivée de $t\psi'(t)$? Prouver qu'il existe deux constantes C et A avec $\psi(t) = C \log(t) + A$.

1.4. Que valent $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, et $\frac{\partial v}{\partial y}$? Prouver (on utilisera $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} f$) :

$$f'(z) = \frac{2C}{x + iy}$$

1.5. Compte tenu de la question précédente que vaut $\int_{|z|=\frac{3}{2}} f'(z)\, dz$, le cercle étant parcouru dans le sens direct ? Prouver alors $C = 0$. En déduire que f est constante.

1.6. On suppose maintenant que U est $\{1 < |z| < 2\} \setminus] - 2, -1[$. Existe-t-il une fonction holomorphe *non constante* $f : U \to \mathbf{C}$ telle que $\mathrm{Re}(f)$ soit une fonction de $x^2 + y^2$? (Justifier)

TOURNEZ LA PAGE

2

2.1. Déterminer $\int_C (z^3+8)^{-1}\,dz$ pour chacun des contours C suivants, tous parcourus dans le sens direct :

(1) Le carré de sommets $(0,0)$, $(10,0)$, $(10,10)$, $(0,10)$.

(2) Le cercle $\{|z|=1\}$.

(3) Le cercle $\{|z|=3\}$.

2.2. Déterminer $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5+e^{ix}}{3+e^{ix}} \frac{1}{x^2+1}\,dx.$

2.3. Déterminer

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx \quad \text{et} \quad L = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Pour la deuxième intégrale on utilisera un contour passant par le demi-plan inférieur. Attention au sens de parcours et au pôle double.

3

3.1. On pose $w = \phi(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Quelle est l'image par ϕ de $]-1,+1]$?

3.2. Exprimer z en fonction de w. Montrer que ϕ est une bijection (holomorphe) de $U = \mathbf{C} \setminus [-1,+1]$ sur $\Omega \setminus \{1\}$ avec $\Omega = \mathbf{C} \setminus]-\infty,0]$.

3.3. En déduire que $f(z) = \exp(\frac{1}{4}\operatorname{Log}\phi(z))$ est bien définie et est une fonction analytique sur U telle que $f(z)^4 = \frac{z-1}{z+1}$ et $f(2) > 0$. Montrer que f est unique avec ces propriétés. Exprimer $f(z)$ explicitement en fonction des coordonnées polaires de $w = \phi(z)$.

3.4. Prouver $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1$. Montrer que la fonction $g(h) = f(\frac{1}{h})$, pour $0 < |h| < 1$, est une fonction analytique qui présente en $h = 0$ une fausse singularité. En déduire qu'elle est donnée par une série entière $1 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$. En calculant $g(h)^4$ établir que $c_1 = -\frac{1}{2}$ et $c_2 = +\frac{1}{8}$.

3.5. Montrer que la série de Laurent de f sur la couronne $1 < |z| < \infty$ est une série entière en $\frac{1}{z}$. Que valent $\int_{|z|=10} f(z)dz$ et $\int_{|z|=10} zf(z)dz$, le cercle étant parcouru dans le sens direct ?

4

4.1. Montrer que les racines du polynôme $P(z) = z^{111} + 3z^{50} + 1$ vérifiant $|z| < 1$ sont simples et qu'il y en a exactement 50. Ind. : on montrera que le polynôme $Q(z) = z^{111} + 3z^{50} = z^{50}(z^{61}+3)$ vérifie $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$ pour $|z| = 1$.

4.2. Prouver l'identité $|1 - \frac{1}{2}z|^2 - |\frac{1}{2} - z|^2 = \frac{3}{4}(1 - |z|^2)$ et justifier l'implication :

$$|z| \leq 1 \implies \left| \frac{\frac{1}{2} - z}{1 - \frac{1}{2}z} \right| \leq 1$$

Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$. On suppose $\forall z\ |f(z)| \leq 1$ et $f(\frac{1}{2}) = 0$. En considérant la fonction $g(z) = f\left(\frac{1-2z}{2-z}\right)$ montrer $|f(\frac{3}{4})| \leq \frac{2}{5}$.

Université des Sciences et Technologies Lille 1
Licence de Mathématiques, 2004-2005, Semestre 5
MATH 305 – Analyse Complexe (Resp. : J.-F. Burnol)

Examen du 12 janvier 2005 – durée : 3 heures

☯ Corrigé ☯

1

Soit $U = \{1 < |z| < 2\}$ et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On note $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$.

1.1. Quelles sont les équations de Cauchy-Riemann ? Montrer que u vérifie l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

☯ Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

En les utilisant on obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ d'où l'équation de Laplace.

1.2. On suppose que l'on peut écrire $u(x, y) = \psi(x^2+y^2)$ pour une certaine fonction $\psi :]1, 4[\to \mathbf{R}$, de classe C^2. Montrer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\psi'(x^2 + y^2) + 4x^2\psi''(x^2 + y^2)\ ,$$

et donner la formule analogue pour $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

☯ Il suffit de dériver une fois : $\frac{\partial}{\partial x}u = \psi'(x^2+y^2)2x$, puis une deuxième fois : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi''(x^2 + y^2)2x2x + \psi'(x^2 + y^2)2$ ce qui donne la formule demandée après réarrangement. La formule analogue, avec une démonstration analogue est : $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\psi'(x^2 + y^2) + 4y^2\psi''(x^2 + y^2)$.

1.3. En déduire que ψ vérifie l'équation différentielle :

$$\psi'(t) + t\psi''(t) = 0 \qquad \text{sur }]1, 4[\ .$$

Quelle est la dérivée de $t\psi'(t)$? Prouver qu'il existe deux constantes C et A avec $\psi(t) = C \log(t) + A$.

☯ Comme u doit vérifier l'équation de Laplace on doit avoir pour tout (x, y) avec $z = x + iy$ dans le domaine de définition de f : $0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\psi'(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)\psi''(x^2+y^2)$. Les valeurs prises par x^2+y^2 parcourent exactement l'intervalle $]1, 4[$, et donc pour tout $t \in]1, 4[$ on doit avoir $4\psi'(t)+ 4t\psi''(t) = 0$ d'où l'équation différentielle demandée. La fonction $t\psi'(t)$ a comme dérivée $\psi'(t) + t\psi''(t)$. Cette dérivée est identiquement nulle, donc

$t\psi'(t)$ est une constante C. Mais alors ψ est une primitive de Ct^{-1} et donc $\psi(t) = C\log(t) + A$, avec A une constante d'intégration.

1.4. Que valent $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, et $\frac{\partial v}{\partial y}$? Prouver (on utilisera $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} f$) :

$$f'(z) = \frac{2C}{x+iy}$$

Comme $u(x,y) = \psi(x^2+y^2) = C\log(x^2+y^2)+A$, on a $\frac{\partial}{\partial x}u = C\frac{2x}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y}u = C\frac{2y}{x^2+y^2}$. Par les équations de Cauchy-Riemann, on a $\frac{\partial}{\partial x}v = -C\frac{2y}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y}v = C\frac{2x}{x^2+y^2}$. Comme $f' = \frac{\partial}{\partial x}(u+iv)$ on en déduit $f' = 2C\frac{x-iy}{x^2+y^2} = 2C(x+iy)^{-1}$.

1.5. Compte tenu de la question précédente que vaut $\int_{|z|=\frac{3}{2}} f'(z)\,dz$, le cercle étant parcouru dans le sens direct ? Prouver alors $C = 0$. En déduire que f est constante.

Cette intégrale vaut $\int_{|z|=\frac{3}{2}} 2C\frac{dz}{z} = 2C2\pi i = 4C\pi i$. Mais par ailleurs il s'agit de l'intégrale le long d'un lacet d'une fonction dérivée, et donc elle vaut 0. Donc $C = 0$. Donc $f' = 0$ et ainsi f est constante (car $1 < |z| < 2$ est connexe).

1.6. On suppose maintenant que U est $\{1 < |z| < 2\}\setminus]-2,-1[$. Existe-t-il une fonction holomorphe *non constante* $f : U \to \mathbf{C}$ telle que $\mathrm{Re}(f)$ soit une fonction de x^2+y^2 ? (Justifier)

Oui, il suffit de prendre $f(z) = \mathrm{Log}(z)$. On a $\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$.

2

2.1. Déterminer $\int_C (z^3+8)^{-1}\,dz$ pour chacun des contours C suivants, tous parcourus dans le sens direct :

(1) Le carré de sommets $(0,0)$, $(10,0)$, $(10,10)$, $(0,10)$.

(2) Le cercle $\{|z| = 1\}$.

(3) Le cercle $\{|z| = 3\}$.

Le dénominateur z^3+8 s'annule en $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = -2$, $z_3 = \overline{z_1} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$ (voir la figure). Le résidu en z_j vaut $\frac{1}{3z_j^2} = \frac{z_j}{3(-8)} = -\frac{1}{24}z_j$.

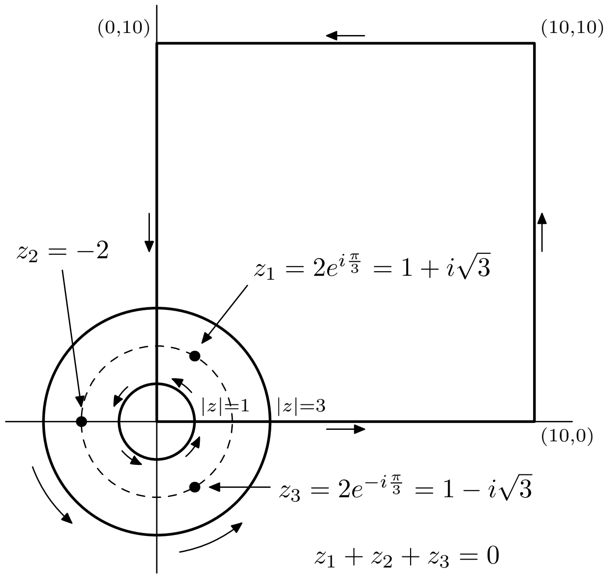
(1) dans ce cas seul z_1 est encerclé par le contour et l'intégrale vaut donc $2\pi i\frac{-1}{24}2e^{i\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{6}\,e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

(2) L'intégrale vaut 0 car aucune singularité n'est à l'intérieur du contour.

(3) L'intégrale peut être prise sur n'importe quel cercle centré en l'origine et de rayon $R > 2$. On a pour $R > 2$:

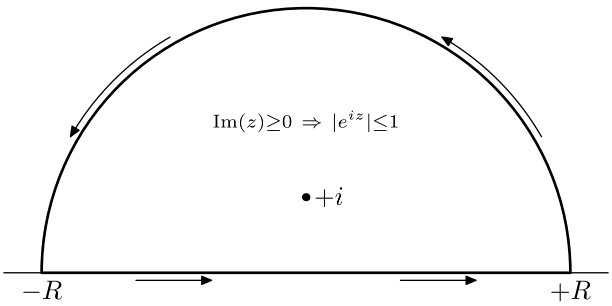
$$\left|\int_{|z|=R} (z^3+8)^{-1}\,dz\right| \leq \frac{1}{R^3-8}\,2\pi R$$

et donc en faisant tendre R vers $+\infty$ on obtient que le résultat demandé est 0. On peut aussi remarquer que la somme des résidus fait intervenir $z_1+z_2+z_3$ qui vaut zéro car le polynôme T^3+8 se factorise en $(T-z_1)(T-z_2)(T-z_3) = T^3 - (z_1+z_2+z_3)T^2 + \dots$.



2.2. Déterminer $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5+e^{ix}}{3+e^{ix}} \frac{1}{x^2+1}\, dx$.

☯ On considère le contour $\mathcal{C}_R$ qui comporte l'intervalle $[-R, +R]$ suivi du demi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur. La contribution de ce



demi-cercle (disons, pour $R > 1$) est majorée en module par :

$$\frac{6}{2} \frac{1}{R^2 - 1} \pi R \,,$$

puisque $|e^{iz}| \leq 1$ dans le demi-plan supérieur et donc $\left|\frac{5+e^{iz}}{3+e^{iz}}\right| \leq \frac{5+1}{3-1}$ (et que le demi-cercle a une longueur d'arc égale à πR). Cela tend vers zéro lorsque $R \to +\infty$. L'intégrale de contour, pour $R > 1$ et par le théorème des résidus, vaut $2\pi i \mathrm{Rés}(f(z), z = i)$ avec $f(z) = \frac{5+e^{iz}}{3+e^{iz}} \frac{1}{z^2+1}$, puisque $z = i$ est l'unique singularité enclose par le contour. Cela donne donc $2\pi i \frac{5+e^{-1}}{3+e^{-1}} \frac{1}{2i} = \pi \frac{5e+1}{3e+1}$. En conclusion :

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{5+e^{ix}}{3+e^{ix}} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \pi \frac{5e+1}{3e+1}$$

2.3. Déterminer

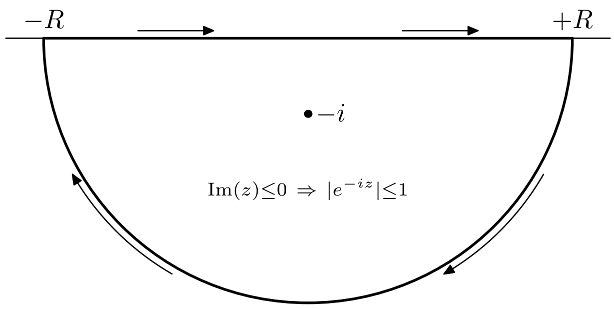
$$K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx \quad \text{et} \quad L = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Pour la deuxième intégrale on utilisera un contour passant par le demi-plan inférieur. Attention au sens de parcours et au pôle double.

En ce qui concerne la première intégrale : soit $\mathcal{C}_R$ le contour qui comporte l'intervalle $[-R,+R]$ suivi du demi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur. L'intégrale sur ce contour est nulle, car en fait la fonction intégrée n'a pas de singularité dans le demi-plan supérieur. L'intégrale sur le demi-cercle (pour $R>1$) est majorée en module par $1\cdot 1\cdot \frac{1}{R^2-1}\pi R$, puisque $|e^{iz}|\le 1$ et que $|z-i|\le|z+i|$ dans le demi-plan supérieur. Cela tend vers 0 pour $R\to+\infty$. Donc

$$K = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx = 0\ .$$

Pour la deuxième intégrale on utilise le contour $\mathcal{D}_R$ qui comporte $[-R,+R]$



suivi du demi-cercle de rayon R dans le demi-plan inférieur, puisque $|e^{-iz}|\le 1$ pour $\mathrm{Im}(z)\le 0$. Ce contour est donc parcouru dans le sens rétrograde. On majore l'intégrale sur le demi-cercle, pour $R>1$ par : $1\cdot\frac{R+1}{R-1}\cdot\frac{1}{R^2-1}\cdot\pi R$ qui tend vers zéro pour $R\to+\infty$. Ainsi :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-ix}\,\frac{x-i}{x+i}\,\frac{1}{x^2+1}\,dx = -2\pi i\ \mathrm{Rés}(f(z),-i)\ ,$$

avec $f(z)=e^{-iz}\,\frac{z-i}{z+i}\,\frac{1}{z^2+1}$, qui se simplifie en $f(z)=e^{-iz}(z+i)^{-2}$ et qui a $z=-i$ comme unique singularité dans le demi-plan inférieur. Comme il s'agit d'un pôle double, pour obtenir le résidu nous posons $z=-i+h$, avec h petit. On a alors $f(-i+h)=e^{-1-ih}h^{-2}=e^{-1}(1-ih+\dots)h^{-2}$ et le résidu vaut $-ie^{-1}$. Le résultat final est donc $L=-\frac{2\pi}{e}$.

3

3.1. On pose $w=\phi(z)=\frac{z-1}{z+1}$. Quelle est l'image par ϕ de $]-1,+1]$?

La fonction $\phi(t)=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$ a comme dérivée $\frac{2}{(t+1)^2}$. Elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-1,+1]$ et établit donc une bijection de cet intervalle sur $]\lim_{t\to-1}\phi(t),\phi(1)]=]-\infty,0]$.

3.2. Exprimer z en fonction de w. Montrer que ϕ est une bijection (holomorphe) de $U = \mathbf{C} \setminus [-1, +1]$ sur $\Omega \setminus \{1\}$ avec $\Omega = \mathbf{C} \setminus] - \infty, 0]$.

☯ L'identité $w = \frac{z-1}{z+1}$ implique $zw + w = z - 1$; réciproquement $zw + w = z - 1$ implique $z \neq -1$ et $w = \frac{z-1}{z+1}$. Comme $zw + w = z - 1$ équivaut à $z(1 - w) = w + 1$ et que cette identité équivaut à $(z = \frac{w+1}{1-w})$ et $w \neq 1$ on a

$$\forall z, w \in \mathbf{C} \left((z \neq -1) \text{ ET } (w = \frac{z-1}{z+1})\right) \Longleftrightarrow \left((w \neq +1) \text{ ET } (z = \frac{w+1}{1-w})\right)$$

Ceci prouve que ϕ est une bijection (qui est analytique bien sûr) entre $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$ et $\mathbf{C} \setminus \{+1\}$. Compte tenu de la réponse à la question précédente il en résulte que ϕ établit une bijection entre $\mathbf{C} \setminus [-1, +1]$ et $\mathbf{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup \{+1\})$.

3.3. En déduire que $f(z) = \exp(\frac{1}{4} \operatorname{Log} \phi(z))$ est bien définie et est une fonction analytique sur U telle que $f(z)^4 = \frac{z-1}{z+1}$ et $f(2) > 0$. Montrer que f est unique avec ces propriétés. Exprimer $f(z)$ explicitement en fonction des coordonnées polaires de $w = \phi(z)$.

☯ Comme ϕ restreinte à U est à valeurs dans l'ouvert Ω sur lequel la fonction Log est définie on peut considérer la fonction composée f qui sera analytique sur U. On a $f(z)^4 = \exp(\operatorname{Log} \phi(z)) = \phi(z) = \frac{z-1}{z+1}$. De plus $f(2) = \exp(\frac{1}{4} \operatorname{Log} \frac{1}{3}) > 0$. Réciproquement, toute autre fonction analytique $g(z)$ avec ces propriétés sera telle que $(g(z)/f(z))^4 = 1$ (on remarque que f ne s'annule pas). Or l'image du connexe U par la fonction continue $g(z)/f(z)$ doit être connexe ; comme elle prend ses valeurs dans un ensemble fini, elle est constante, égale à l'une des quatre racines quatrième de l'unité. Si de plus $g(2) > 0$ alors $g(2)/f(2)$ est aussi positive, et la valeur constante est donc 1. Ainsi $g = f$. Finalement si l'on a $w = re^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < +\pi$, alors par définition $\operatorname{Log}(w) = \log(r) + i\theta$ et donc $f(z) = r^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\theta}{4}}$.

3.4. Prouver $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1$. Montrer que la fonction $g(h) = f(\frac{1}{h})$, pour $0 < |h| < 1$, est une fonction analytique qui présente en $h = 0$ une fausse singularité. En déduire qu'elle est donnée par une série entière $1 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$. En calculant $g(h)^4$ établir que $c_1 = -\frac{1}{2}$ et $c_2 = +\frac{1}{8}$.

☯ Tout d'abord $w = \phi(z) \to 1$ pour $|z| \to \infty$. On sait que Log est une fonction continue donc $\lim_{|z|\to\infty} \operatorname{Log} w = \operatorname{Log}(1) = 0$, et ainsi par continuité de la fonction exponentielle, $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1$. Définissons $g(h) = f(\frac{1}{h})$, pour $0 < |h| < 1$. C'est possible puisqu'alors $|\frac{1}{h}| > 1$ et donc $\frac{1}{h}$ est dans le domaine de définition de f. La fonction g est analytique et vérifie $\lim_{h\to 0} g(h) = 1$. Par le théorème de Riemann de la fausse singularité, la fonction g s'étend en une fonction analytique pour $|h| < 1$ en posant $g(0) = 1$. Elle est donc donnée par une série entière $1 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$ de rayon de convergence au moins égal à 1. En posant $k = g(h) - 1 = c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$ on a $g(h)^4 = (1+k)^4 = 1 + 4k + 6k^2 + o(h^2) = 1 + 4(c_1 h + c_2 h^2) + 6c_1^2 h^2 + o(h^2) = 1 + 4c_1 h + (4c_2 + 6c_1^2)h^2 + o(h^2)$. Par ailleurs $g(h)^4 = \frac{\frac{1}{h}-1}{\frac{1}{h}+1} = \frac{1-h}{1+h} = (1-h)(1-h+h^2+\ldots) = 1 - 2h + 2h^2 + \ldots$. Ainsi $4c_1 = -2$, donc $c_1 = -\frac{1}{2}$ et $4c_2 + \frac{6}{4} = 2$ et donc $4c_2 = \frac{1}{2}$ et $c_2 = \frac{1}{8}$.

3.5. Montrer que la série de Laurent de f sur la couronne $1 < |z| < \infty$ est une série entière en $\frac{1}{z}$. Que valent $\int_{|z|=10} f(z)dz$ et $\int_{|z|=10} zf(z)dz$, le cercle étant parcouru dans le sens direct ?

Pour $1 < |z|$ on a en posant $h = \frac{1}{z}$, $f(z) = g(h) = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 + \cdots = 1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{8z^2} + \ldots$ qui est un développement en puissances positives de $\frac{1}{z}$. Par unicité il s'agit du développement en série de Laurent de f dans la couronne $|z| > 1$. On sait que le coefficient a_j de z^j dans le développement en série de Laurent est $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)z^{-j-1}dz$, pour tout $r > 1$. En prenant $j = -1$ on obtient donc $\int_{|z|=10} f(z)dz = 2\pi i\frac{-1}{2} = -\pi i$ et en prenant $j = -2$ on obtient $\int_{|z|=10} zf(z)dz = 2\pi i\frac{1}{8} = \frac{1}{4}\pi i$.

4

4.1. Montrer que les racines du polynôme $P(z) = z^{111} + 3z^{50} + 1$ vérifiant $|z| < 1$ sont simples et qu'il y en a exactement 50. Ind. : on montrera que le polynôme $Q(z) = z^{111} + 3z^{50} = z^{50}(z^{61} + 3)$ vérifie $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$ pour $|z| = 1$.

Avec les notations de l'énoncé on a $|P(z) - Q(z)| = 1$ et par ailleurs, pour $|z| = 1$, $|Q(z)| = |z^{61} + 3| \geq 3 - 1 = 2 > 1$. Donc $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$ pour $|z| = 1$ et ainsi par le théorème de Rouché P $(= Q + (P - Q))$ et Q ont le même nombre de zéros, comptés avec leur multiplicité dans le disque $|z| < 1$. Or pour $|z| \leq 1$ on a $z^{61} + 3 \neq 0$ et donc Q a un unique zéro, de multiplicité 50. Par ailleurs le polynôme dérivé P' vaut $111z^{110} + 150z^{49} = z^{49}(111z^{61} + 150)$. Pour $|z| \leq 1$ on a $111z^{61} + 150 \neq 0$. Et $z = 0$ n'est pas une racine de P, donc P et P' n'ont aucune racine commune vérifiant $|z| \leq 1$. Les racines de P vérifiant $|z| < 1$ sont donc toutes simples. Il y en a donc exactement 50.

4.2. Prouver l'identité $|1 - \frac{1}{2}z|^2 - |\frac{1}{2} - z|^2 = \frac{3}{4}(1 - |z|^2)$ et justifier l'implication :

$$|z| \leq 1 \implies \left|\frac{\frac{1}{2} - z}{1 - \frac{1}{2}z}\right| \leq 1$$

Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{D(0,1)}$. On suppose $\forall z\ |f(z)| \leq 1$ et $f(\frac{1}{2}) = 0$. En considérant la fonction $g(z) = f\left(\frac{1-2z}{2-z}\right)$ montrer $|f(\frac{3}{4})| \leq \frac{2}{5}$.

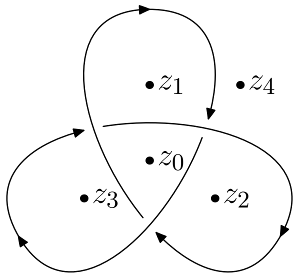
On a $|1 - \frac{1}{2}z|^2 = (1 - \frac{1}{2}z)(1 - \frac{1}{2}\bar{z}) = 1 - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \frac{1}{4}|z|^2$ et $|\frac{1}{2} - z|^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + |z|^2$, ainsi $|1 - \frac{1}{2}z|^2 - |\frac{1}{2} - z|^2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}|z|^2 = \frac{3}{4}(1 - |z|^2)$. Pour $|z| \leq 1$ on en déduit $|1 - \frac{1}{2}z|^2 - |\frac{1}{2} - z|^2 \geq 0$ d'où $|1 - \frac{1}{2}z|^2 \geq |\frac{1}{2} - z|^2$ et donc effectivement $\frac{|\frac{1}{2} - z|^2}{|1 - \frac{1}{2}z|^2} \leq 1$ ce qui donne l'inégalité demandée (on signale en passant que le dénominateur ne peut pas s'annuler pour $|z| \leq 1$). La fonction $g(z) = f\left(\frac{1-2z}{2-z}\right)$ est alors définie et holomorphe en tout point du disque unité fermé, par l'inégalité prouvée et l'hypothèse que f est holomorphe sur le disque unité fermé. En $z = 0$ on a $g(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$. Par le Lemme de Schwarz il en résulte $|g(z)| \leq |z|$ pour $|z| \leq 1$. Cherchons z tel que $g(z) = f(\frac{3}{4})$. Il suffit d'avoir $\frac{1-2z}{2-z} = \frac{3}{4}$, $1 - 2z = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}z$, $-\frac{1}{2} = \frac{5}{4}z$, $z = -\frac{2}{5}$. Donc $|f(\frac{3}{4})| = |g(-\frac{2}{5})| \leq \frac{2}{5}$, ce qu'il fallait démontrer.

Université des Sciences et Technologies Lille 1
Licence de Mathématiques, Module L305, 2004-2005
L – MATH – S5 – Variables Complexes

Examen du 7 juin 2005 – durée : 3 heures

Ni Documents ni Calculatrices

1. Exercice

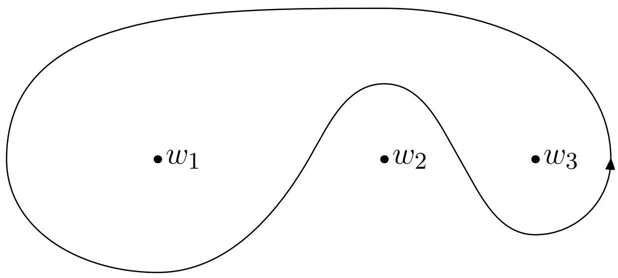


On considère dans le plan complexe un chemin fermé paramétré γ qui parcourt la figure ci-dessus dans le sens indiqué. Pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$ on note

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_j} \quad \text{et} \quad B_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z - z_j)^2}$$

Déterminer, en le justifiant, les valeurs de A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, et de B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. On précisera aussi quel est le nom que l'on donne aux quantités données par les intégrales A_j, $j = 0 \ldots 4$.

2. Exercice



Soit γ le contour, parcouru dans le sens direct, dessiné ci-dessus. Déterminer (avec justification) en fonction de w_1, w_2, w_3 les intégrales suivantes :

$$A = \int_\gamma \frac{dz}{(z - w_1)(z - w_2)(z - w_3)}$$

$$B = \int_\gamma \sin(z)dz$$

$$C = \int_\gamma \frac{dz}{(z - w_1)^2(z - w_3)}$$

TOURNEZ LA PAGE

3. Exercice

3.1. Déterminer $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+i)^3}\, dx.$

3.2. Déterminer $K = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{x^4+2x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+i)^2(x-i)^2}\, dx.$

3.3. Déterminer $L = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x+i)^2}\, dx.$

3.4. Déterminer $M = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x-i)^2}\, dx.$

3.5. Déterminer $N = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx.$

3.6. Déterminer $P = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\, dx.$

4. Exercice

4.1. On pose

$$\phi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$$

Montrer : $\forall \theta \in \mathbf{R} \quad |\phi(e^{i\theta})| = 1$. En déduire

$$|z| < 1 \implies |\phi(z)| < 1$$

4.2. Déterminer l'image par ϕ du disque unité ouvert $D(0,1)$. Montrer que ϕ est une bijection holomorphe de $D(0,1)$ sur lui-même. Déterminer explicitement la fonction réciproque ϕ^{-1}.

4.3. Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage du disque unité fermé. On suppose que f vérifie

$$|w| \leq 1 \implies |f(w)| \leq 8$$

et aussi on suppose

$$f(\frac{3}{4}) = 0$$

En considérant la fonction $\frac{1}{8} f(\phi(z))$ montrer

$$|f(0)| \leq 6$$