Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques
Deug MIAS $1^{\text{ère}}$ année, 1^{er} et $2^{\text{ème}}$ semestres 2003–2004
Feuilles de TDs, Examens, Corrigés.

Jean-François Burnol

250 exercices, 6 examens, 82 pages. Les feuilles d'exercices comportent aussi des rappels de cours, souvent très brefs, parfois plus détaillés.

Université des Sciences et Technologies de Lille **U.F.R. de Mathématiques**

Année 2003-2004 – MIAS (première année)

1^{er} semestre – Section 1

Fiches 1 à 8

Toutes les fiches du premier semestre 2003/2004, 121 exercices. Très brefs rappels de cours.

page suivante, S.V.P.

Université des Sciences et Technologies de Lille **U.F.R. de Mathématiques**

Année 2003-2004 – MIAS (première année)

1^{er} semestre – Section 1

Fiche 1

Version du 2 oct 2003, 2:26 pm

Deux objets à ces fiches : d'une part récapituler des mots et des notations mathématiques dont la maîtrise est un objectif pour la bonne compréhension du cours, d'autre part fournir quelques exercices (j'essaie de ne pas dépasser le format d'une feuille recto-verso, donc les exercices proposés ici ne couvrent pas toutes les notions). Les théorèmes du cours n'ont pas toujours un nom spécial, leur présence dans les listes de noms sera ainsi souvent plus implicite qu'explicite. Vous pourrez utiliser ces listes pour jauger au fil du semestre votre niveau de compréhension : parcourez-les et demandez-vous dans quelle mesure vous en comprenez les termes (c'est-à-dire leurs interrelations qui s'expriment par des lemmes, propositions, théorèmes).

Lettres grecques (il en manque …) : alpha α, bêta β, gamma γ, Γ, delta δ, Δ, epsilon ε, êta η, thêta θ, lambda λ, mu μ, nu ν, pi π, Π, rho ρ, sigma σ, Σ, tau τ, phi ϕ, psi ψ, oméga ω, Ω.

Proposition (assertion) logique, valeur de vérité, contraire (négation, non-P), et, ou, implication, contraposée, équivalence, tautologie, $P \Rightarrow Q$, $\neg P$, $P \Leftarrow Q$, $P \iff Q$, si P alors Q, P est équivalent à Q, tables de vérité, etc … axiomes, démonstrations, raisonnements : au cas par cas, par (réduction à) l'absurde, condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante, élégance dans la rédaction mathématique, mais ou et donc or ni car, cqfd.

Ensembles, éléments, sous-ensembles, parties, singletons, $\mathcal{P}(E)$, définition d'un sous-ensemble par énumération, par propriété, l'ensemble vide $\emptyset$, quel que soit $\forall$, il existe $\exists$, négations, inclusion $A \subset B$, appartenance $x \in B$, égalité, union $A \cup B$, intersection $A \cap B$, complémentaire $\complement A$, différence $A \setminus B$, lois de de Morgan, partitions, produit cartésien $E \times F$, application, fonction (application à valeurs numériques), restriction à un sous-ensemble, graphe, injectif, surjectif, bijectif, image, antécédents, composition, bijection réciproque, fonction indicatrice d'une partie.

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, successeur, prédécesseur, l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Addition et multiplication : associativité, commutativité, distributivité, puissances, factorielles. Équipotence, ensembles finis, cardinal, $\#A$ (Card$A$), ensembles dénombrables, coefficients combinatoires $\binom{N}{k}$. Indexation de produits $\prod_{i\in I}$, de sommes $\sum_{j\in J}$, expansion de produits en sommes, identités remarquables, coefficients combinatoires $\binom{N}{k}$, formule du binôme.

1. On suppose que P et Q sont vraies. En fonction de la valeur de vérité de R déterminer la valeur de vérité de S suivant les cas :

1. $S = P$ et R
2. $S = Q$ ou R
3. $S = P \Rightarrow R$
4. $S = (\neg Q) \Rightarrow R$
5. $S = R \Rightarrow P$
6. $S = \text{non}\,((P \text{ ou } R) \Rightarrow (Q \text{ et } R))$

2. Déterminer les négations des assertions suivantes :

1. Si P alors Q
2. P ou non-Q
3. Si (P ou Q) alors R
4. P implique Q, et Q implique R, et R implique S.

3. Montrer :

1. L'une de $P \Rightarrow Q$ ou de $Q \Rightarrow P$ est toujours vraie !
2. Si ((P implique Q) et (Q implique R) et (R implique P)) alors (R équivaut à Q)
3. Si ($P \Rightarrow$ (Q ou R) et $Q \Rightarrow R$) alors $P \Rightarrow R$.
4. On note $P \triangle Q$ l'assertion : "l'un de P ou de Q est vrai mais pas les deux". Montrer : $\neg(P \triangle Q) \iff (P$ et $Q)$ ou $(\neg P$ et $\neg Q)$.
5. Montrer : $P \triangle Q \iff (P$ et $\neg Q)$ ou $(\neg P$ et $Q)$.
6. Montrer $(P \triangle Q) \triangle R \iff P \triangle (Q \triangle R)$. Est-il exact que $P \triangle Q \triangle R$ est vrai si et seulement si exactement l'un de P, Q, R est vrai ? (réponse : non ; à justifier.)
7. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $P \triangle Q$ soit vrai est : soit (P n'implique pas Q) soit (Q n'implique pas P).

4. Soit A, B, C, D des sous-ensembles d'un même ensemble Ω. Montrer (par exemple par des raisonnements d'appartenance) :

1. $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$
2. $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup D) \cap (A \cup C \cup D) \cap (B \cup C \cup D)$
   $= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$

5. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $k : G \to K$ des applications. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si $k \circ g \circ f$ est surjective alors f est surjective.
2. Si $k \circ g \circ f$ est injective alors f est injective.
3. Si $k \circ g \circ f$ est injective alors g est injective.
4. Si $k \circ g \circ f$ est bijective alors g est bijective.
5. Si $k \circ g \circ f$ est bijective alors k est surjective et f est injective.
6. Si g n'est pas surjective alors $k \circ g \circ f$ n'est pas surjective.
7. Si g n'est ni injective ni surjective alors $k \circ g \circ f$ n'est ni injective ni surjective.

6. Soient E et F deux ensembles en bijection par une application φ. Déterminer une bijection ψ de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(F)$.

7. On note $G \to K$ l'ensemble des applications d'un ensemble G vers un ensemble K. On suppose que φ réalise une bijection de E vers F. Déterminer une bijection ψ de $E \to E$ vers $F \to F$.

8. Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui à n associe $\phi(n) = \{m \in \mathbb{N} | m \leq n\}$. L'application ϕ est-elle injective ? surjective ? bijective ? L'ensemble $\emptyset$ vu comme élément de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est-il dans l'image de ϕ ?

9. Exprimer en symboles mathématiques l'assertion A "tout entier suffisamment grand est un carré" et sa négation. Déterminer la valeur de vérité de A.

10. On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie selon $f(n) = n^2 - 12n + 40$. Est-elle injective ? surjective ? Est-il exact que tout entier suffisamment grand est dans l'image de f ?

11. Soit E un ensemble (non-vide) de cardinalité n. Combien y-a-t-il d'applications de E dans lui-même telles que la cardinalité de leurs images soit exactement 2 ? même question avec 2 remplacé par $n - 1$.

12. Soit E fini avec $\#E = n$. Combien y-a-t-il de surjections de E sur $\{1, 2, 3\}$? (on pourra en fait commencer par énumérer combien il y en a qui ne sont *pas* surjectives).

13. On suppose $2^a 3^b = 2^c 3^d$ (avec $a, b, c, d \in \mathbb{N}$). Si $a = 0$ montrer $c = 0$ (raisonner par l'absurde sur la parité). Si $a \leq c$ diviser par 2^a pour en conclure alors $a = c$. Montrer qu'en fait $a = c$ et $b = d$. Soit E et F deux ensembles dénombrables. Construire une injection de $E \times F$ dans $\mathbb{N}$ et en déduire que $E \times F$ est dénombrable (c'est-à-dire finie ou équipotente à $\mathbb{N}$. On aura démontré en cours que toute partie de $\mathbb{N}$ est dénombrable).

Université des Sciences et Technologies de Lille **U.F.R. de Mathématiques**

Année 2003-2004 – MIAS (première année)

1^{er} semestre – Section 1

Fiche 2

Version du 9 oct 2003, 2 :26 pm

N'oubliez pas que votre meilleur professeur, c'est vous-même !

On ajoutera à la fiche 1 : singleton, partition, restriction d'une application à un sous-ensemble, formule $\#E = \sum_{y\in F} \#f^{-1}(\{y\})$ pour toute application f de E vers F (ensembles finis).

Fonctions indicatrices de sous-ensembles et leurs propriétés (voir exercices).

Plus petit élément d'une partie non vide de $\mathbb{N}$ et justification du principe du raisonnement par récurrence. Formules à connaître pour $\sum_{1\leq j\leq N} j$ et $\sum_{1\leq j\leq N} j^2$ (écrivez les dans la marge). Formules à connaître pour $\#(E \times F)$, pour $\#\mathcal{A}pp(E,F)$, pour $\#\mathcal{B}ij(E)$ (à écrire dans la marge). Les cas spéciaux avec $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$. Le nombre de façons de choisir k éléments parmi N est $\binom{N}{k}$ (écrire la formule explicite dans la marge). Formule du triangle de Pascal. Formule du binôme.

Ensembles dénombrables. Toute partie de $\mathbb{N}$ est soit finie soit en bijection avec $\mathbb{N}$. Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est elle-même un ensemble dénombrable (voir exercices). L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

L'ensemble $\#\mathcal{B}ij(E)$, muni de la composition des applications, est un exemple de Groupe. Notion de Groupe, en général. Notation g^n, pour $g \in G, n \in \mathbb{Z}$. Sous-groupes : critère pour être un sous-groupe. Le sous-groupe $< g >$. Exemples. Le groupe S_N, écriture en cycles. Notation additive pour les groupes abéliens. Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

Classes à gauche gH, classes à droite Hg. Partitions de G par H en classes à gauche, ou en classes à droite. Ensembles G/H des classes à gauche et $H\backslash G$ des classes à droite. Théorème de Lagrange $\#H|\#G$ (ici G est un groupe de cardinalité finie).

Dans le cas G abélien, structure de groupe quotient sur G/H (notion de sous-groupe distingué en exercice). Les groupes $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. La notion de morphisme de groupe. Noyau et image d'un morphisme. Factorisation canonique d'un morphisme $f : G \to K$ de groupes (ici G est abélien ; cas général en exercice). Les possibilités pour $< g >$ lorsque $g \in G$ est un élément d'un groupe quelconque. Ordre de g.

La notion générale de relation d'équivalence, de classe d'équivalence, d'ensemble quotient. Factorisation canonique d'une application en $f = \iota \circ \phi \circ \pi$ avec π surjective, ϕ bijective, et ι injective.

Struture d'anneau sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Notion d'anneau en général. Notion de corps (commutatif). Début du cours d'Arithmétique.

Fiche 2 - exercices

14. Si $A \subset E$ on note $\mathbf{1}_A$ la fonction de E vers $\mathbb{Z}$ telle que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ pour $x \in A$ et $= 0$ si $x \notin A$. On dit que $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de A.

1. Montrer $(\mathbf{1}_A)^2 = \mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_A) = 0$ (Note : si f et et g sont deux fonctions on note fg la fonction $x \mapsto f(x)g(x)$, et similairement pour $f + g$; de plus on note c la fonction constante partout égale à c.)
2. Montrer $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \iff A = B$.
3. Montrer $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
4. Donner une formule pour $\mathbf{1}_{A^c}$ et pour $\mathbf{1}_{A\cup B}$ (on a noté $A^c = \complement A$).
5. On note $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Donner une formule pour $\mathbf{1}_{A\Delta B}$.
6. En utilisant les résultats précédents, montrer $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

15. (suite) On suppose que E est un ensemble fini. Pour toute fonction $f : E \to \mathbb{Z}$ on note $I(f) = \sum_{x\in E} f(x)$.

1. Montrer $I(\mathbf{1}_A) = \#A$.
2. Montrer $I(f + g) = I(f) + I(g)$, $I(c) = c$ (pour $c \in \mathbb{Z}$) et $I(cf) = cI(f)$. Attention, il est faux que $I(fg) = I(f)I(g)$ en général.
3. Par l'exercice précédent, on a $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}$. En déduire : $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.
4. Montrer : $\mathbf{1}_{A\cup B\cup C} = 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B)(1 - \mathbf{1}_C)$.
5. En déduire la "formule d'inclusion-exclusion" :
$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$
6. (optionnel et difficile) Généraliser à quatre, cinq, six ...parties de E. Montrer que si dans les formules obtenues, qui généralisent celle du dessus, on arrête la somme juste après une série de signes moins (respectivement signes plus) on obtient une minoration (respectivement une majoration) de la cardinalité de l'union des parties.

16. Soient A_j, $j = 1, 2 \dots, N$ des parties de E. Montrer qu'elles forment une partition de E si et seulement si on a $\sum_{1\le j\le N} \mathbf{1}_{A_j} = 1$. En déduire (en utilisant le I de l'exercice précédent) une nouvelle preuve de $\sum_j \#A_j = \#E$ dans le cas où E est un ensemble fini et les A_j en forment une partition.

17. Soit $P(j) = (j + 1)(j + 2)(j + 3)(j + 4)$. Calculer $P(j) - P(j - 1)$. En déduire une formule pour $\sum_{0\le j\le N}(j + 1)(j + 2)(j + 3)$, puis, après calculs, une formule pour $\sum_{0\le j\le N} j^3$ (on utilisera les valeurs connues pour $\sum_{0\le j\le N} j^2$ et $\sum_{0\le j\le N} j$; l'ensemble de ces calculs peut être un peu long et fastidieux, mais le résultat final est remarquablement simple).

18. (coefficients du multinôme ; difficile ?) On pose, pour $n \ge 2$, $N \ge 0$, $k_1 \ge 0$,..., $k_n \ge 0$:

$$\binom{N}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{N!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$$

lorsque $k_1 + \dots + k_n = N$ et 0 sinon. Avec notre notation précédente $\binom{N}{k}$ on a donc $\binom{N}{k} = \binom{N}{k, N-k}$. On dispose de N objets et de n boîtes numérotées. Montrer que $\binom{N}{k_1,k_2,\dots,k_n}$ est le nombre de façons distinctes de répartir ces objets dans les boîtes sous la contrainte d'en disposer k_1 dans la première, k_2 dans la deuxième, ..., k_n dans la dernière. Trouver une formule qui généralise la formule du binôme pour $(x_1 + x_2)^N$ au cas des multinômes $(x_1 + \cdots + x_n)^N$.

19. Soit E un ensemble dénombrable. On suppose que $f : E \to F$ est surjective, montrer que F est dénombrable. On suppose que $g : F \to E$ est injective, montrer que F est dénombrable.

20. Soit E un ensemble et A_j, $j \in \mathbb{N}$, des sous-ensembles avec $E = \bigcup_j A_j$. On suppose qu'il existe pour chaque j une application surjective $\phi_j : \mathbb{N} \to A_j$. On note ψ l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers E définie par $\psi(j, n) = \phi_j(n)$. Montrer que ψ est surjective. En déduire que E est dénombrable (on sait déjà que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, voir fiche 1, exercice 13).

21. Soit E un ensemble et soit F l'ensemble des applications de E vers $\{0, 1\}$. Montrer que l'application de $\mathcal{P}(E)$ vers F qui associe $\mathbf{1}_A$ à A est bijective.

22. On considère l'ensemble F des suites infinies $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ de 0 et de 1. Trouver une bijection entre F et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit ϕ une application de $\mathbb{N}$ vers F. On définit la suite x par $x_k = 1$ si $\phi(k)_k = 0$ et $x_k = 0$ si $\phi(k)_k = 1$. Montrer que x n'est pas dans l'image de ϕ. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable (argument diagonal de Cantor).

23. Soit E un ensemble et G un groupe. Munir l'ensemble des applications de E vers G d'une structure de groupe "naturelle". Montrer que la composition $f \to \phi \circ f$ avec un morphisme de groupe $\phi : G \to K$ définit un morphisme de groupe de $\mathrm{App}(E, G)$ vers $\mathrm{App}(E, K)$. De même si $\psi : F \to E$ est une application montrer alors que $f \to f \circ \psi$ est un morphisme de groupe de $\mathrm{App}(E, G)$ vers $\mathrm{App}(F, G)$.

24. Soient H et H' deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cap H'$ est un sous-groupe de G.

25. On dit que le sous-groupe H est distingué si toute classe à gauche gH est égale à la classe à droite Hg. Montrer qu'alors la classe à gauche gkH est identique à $g'k'H$ si $gH = g'H$ et $kH = k'H$. En déduire une loi de groupe "naturelle" sur G/H. Montrer que le passage au quotient $\pi : G \to G/H$ est un morphisme de groupe.

26. Soit $f : G \to K$ un morphisme de groupe. Montrer que son noyau H est un sous-groupe distingué de G.

27. Montrer : il existe une loi de groupe sur G/H telle que $\pi : G \to G/H$ soit un morphisme de groupe si et seulement si H est distingué dans G. Cette loi de groupe sur le quotient est alors unique.

28. Trouver tous les sous-groupes du groupe S_3 et du groupe S_4.

Les exercices qui suivent doivent être faits *avant* les cours en amphithéâtre d'Arithmétique et sans faire appel à des théorèmes de pgcd, ppcm, **etc...**

29. Trouver par des calculs explicites tous ceux parmi les anneaux $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $1 \leq N \leq 20$, qui sont des corps. Voyez vous un principe général ? (dépéchez vous de réfléchir car on donne la réponse en cours bientôt.)

30. Montrer : si 3 divise $2n$ alors 3 divise n. En déduire $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$. Montrer : si 6 divise $8n$ alors 3 divise n. En déduire $6\mathbb{Z} \cap 8\mathbb{Z} = 24\mathbb{Z}$.

31. Montrer : si 10 divise $7n$ alors 10 divise n (on pourra, par exemple, utiliser que $10|n \iff 10|(20n+n)$). Montrer $10\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z} = 70\mathbb{Z}$.

32. Trouver par recherche directe un entier N tel que $\overline{N} \cdot \overline{13} = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. En déduire que si 17 divise $13m$ alors 17 divise m. Déterminer $17\mathbb{Z} \cap 13\mathbb{Z}$.

33. On note $H = A\mathbb{Z} + B\mathbb{Z}$ le sous ensemble de $\mathbb{Z}$ des entiers de la forme $An + Bm$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Montrer que $H = \mathbb{Z}$ si $A = 13$ et $B = 17$. Montrer que $H = 2\mathbb{Z}$ si $A = 8$ et $B = 10$ (on pourra commencer par montrer que $H = \mathbb{Z}$ si $A = 4$ et $B = 5$).

Fiche 3

Version du 31 oct 2003, 5 :02 pm

Caractéristique d'un anneau. Intégrité d'un anneau. Corps. **Les anneaux $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ($N \geq 2$).** Notations et vocabulaire liés aux congruences. La division euclidienne.

Nombres premiers. Le plus petit diviseur > 1 d'un entier > 1 est toujours un nombre premier. Il existe une infinité de nombres premiers. Si p est premier et ne divise pas b alors il existe c avec $bc \equiv 1[p]$. Si p est premier et divise ab alors $p|a$ ou $p|b$ (Lemme d'Euclide). L'anneau $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ($N \geq 2$) est intègre si et seulement si N est un nombre premier. Si p est premier alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. Forme contraposée du Lemme d'Euclide. Forme généralisée du Lemme d'Euclide à un produit de plus de deux termes. Existence d'une factorisation en un produit de facteurs premiers. **Unicité de la factorisation.** Notation $p^e \| n$.

Critère, lié à la factorisation, pour la divisibilité de a par d. Notion de $\mathrm{pgcd}(a, b)$. Calcul avec les factorisations. Si $n|a$ et $n|b$ alors $n|\mathrm{pgcd}(a, b)$ et réciproquement. Calcul avec l'algorithme d'Euclide. Notion de nombres premiers entre eux. Le groupe $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Identité de Bezout. Utilisation de l'algorithme d'Euclide pour trouver concrètement une identité de Bezout. Le Théorème de Gauss.

Notion de $\mathrm{ppcm}(a, b)$ (défini par la formule $\mathrm{pgcd}(a, b)\mathrm{ppcm}(a, b) = |ab|$). Si $a|n$ et $b|n$ alors $\mathrm{ppcm}(a, b)$ divise n et réciproquement. Calcul du ppcm lorsque l'on connaît les factorisations en facteurs premiers. Résolution de systèmes linéaires de congruences. Le "théorème des restes chinois".

Le groupe $G(N)$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. La fonction totient $\phi(N)$ de Euler. Expression et multiplicativité. Le petit théorème de Fermat. Le système de cryptage RSA.

Nombres rationnels : Forme irréductible d'une fraction : existence et unicité. Interprétation en termes de congruences de l'algorithme qui donne les "chiffres après la virgule". Étude des chiffres après la virgule : périodicité, détermination de la période. Deux fractions positives inférieures à un et avec les mêmes "chiffres après la virgule" sont égales. Le sens à donner à l'égalité $1 = 0,99999\ldots$. Suites et séries : vers les nombres réels.

34.

1. Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de 215 par 13 ?
2. Sans calcul supplémentaire en déduire que 215 et 13 sont premiers entre eux.
3. En poursuivant l'algorithme d'Euclide jusqu'au bout, déterminer une identité de Bezout pour 215 et 13.
4. En déduire $c \in \mathbb{Z}$ avec $13c \equiv -1$ [215].
5. Déterminer tous les $c \in \mathbb{Z}$ avec $13c \equiv -1$ [215], et en particulier le plus petit d'entre eux qui soit positif.

35. Déterminer (avec justification) pgcd(a, b) et ppcm(a, b) pour les couples d'entiers suivants :

1. $a = 85$, $b = 69$.
2. $a = 11^3 \times 125$, $b = 55$.
3. $a = 6^n$, $b = 8^n$, avec $n \geq 1$

36. Trouver le plus petit entier positif tel que $x \equiv 1$ [7], $x \equiv 1$ [11], et $x \equiv 2$ [29]. Indication : en quelle année sommes nous ?

37. Déterminer tous les nombres premiers plus petit que 100 par la méthode du "crible d'Eratosthène" (on élimine tous les multiples de 2, puis tous les multiples du plus petit > 2 non éliminé (c'est 3), puis les multiples du plus petit > 3 non éliminé, etc...ceux qui subsistent sont les nombres premiers).

38. Prouver que 2003 est un nombre premier.

39. En utilisant le fait que $\binom{a+n}{a}$ est un entier prouver : $\forall a \geq 0, \forall n \geq 1$ $(a+1)\ldots(a+n) \equiv 0$ $[n!]$.

40.

1. Déterminer la factorisation de 27000.
2. Déterminer tous les couples (a, b) avec $ab = 27000$ et pgcd$(a, b) = 1$.
3. Déterminer tous les couples (a, b) avec ppcm$(a, b) = 27000$ et pgcd$(a, b) = 30$ (indication : travailler avec $a' = a/30$ et $b' = b/30$).

41.

1. Montrer que $a^n - 1$ est un multiple de $a - 1$, et que $a^{nm} - 1$ est un multiple de $a^n - 1$.
2. Montrer, pour $n \geq 2$ et $a \geq 1$, que $a^n - 1$ ne peut être un nombre premier que si $a = 2$ et si n est lui-même un nombre premier.

42. Trouver (u, v) avec $323u + 713v = 1$. Trouver le plus petit x positif avec $x \equiv 1$ [323] et $x \equiv 2$ [713].

43. Soit a, b, c des entiers. On suppose que a et b sont premiers entre eux. Montrer pgcd$(a, bc) =$ pgcd(a, c).

44. Soient a et b deux entiers positifs et $n \geq 1$. Montrer pgcd$(a^n, b^n) =$ pgcd$(a, b)^n$.

45. On a $959595 = 3 * 5 * 7 * 13 * 19 * 37$. En utilisant le petit théorème de Fermat montrer que pour tout x qui est premier avec 959595 il est vrai que 959595 divise $x^{36} - 1$ (illustration : $2^{36} - 1 = 68719476735 = 959595 \times 71613$).

46. Calculer $10^{10^{10^{10}}}$ mod 17.

47.

1. Soient e et f deux entiers premiers entre eux. Qu'est-ce qu'une identité de Bezout ? Soit g un troisième entier. On suppose que e divise fg. Que dit le Théorème de Gauss ? Démontrer le Théorème de Gauss en utilisant l'identité de Bezout.
2. Montrer en utilisant une identité de Bezout que si a, b, c sont des entiers tels que : pgcd$(a, b) = 1$, $a|c$, $b|c$, alors ab divise c.
3. Retrouver ce dernier résultat en utilisant la notion de ppcm et les théorèmes du cours.

48.

1. Montrer que a et b sont premiers entre eux (c'est-à-dire pgcd$(a, b) = 1$) si et seulement si tout nombre premier p qui divise a ne divise pas b.
2. On suppose que a_j et b sont premiers entre eux, pour chaque $j = 1, 2, \ldots, n$. Soit $A = a_1 a_2 \ldots a_n$. Montrer en utilisant le lemme d'Euclide (généralisé) et la question précédente que A et b sont premiers entre eux.

49.

1. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe a' avec $aa' \equiv 1$ $[b]$.
2. On suppose que a_j et b sont premiers entre eux, pour chaque $j = 1, 2, \dots, n$. Soit $A = a_1 a_2 \dots a_n$. Montrer en utilisant la question précédente que A et b sont premiers entre eux.

50. On se donne, pour $n \geq 2$, des entiers a_1, ..., a_n, que l'on suppose deux à deux premiers entre eux. On suppose qu'ils divisent tous un certain entier C. Montrer par récurrence sur n que le produit $a_1 \dots a_n$ divise C. On aura besoin du résultat de l'exercice précédent.

51. Donner une autre preuve du résultat de l'exercice précédent sur la base du théorème d'existence et d'unicité pour la factorisation de tout entier non nul en un produit de facteurs premiers (et d'un signe).

52. On suppose que a et b sont premiers entre eux. Montrer que a^n et b^m sont premiers entre eux, pour tout $n \geq 0$ et $m \geq 0$.

53. On se donne, pour $n \geq 3$, des entiers a_1, ..., a_n, que l'on suppose deux à deux premiers entre eux. On pose $B_1 = a_2 \dots a_n$, $B_2 = a_1 a_3 \dots a_n$, etc ..., et finalement $B_n = a_1 \dots a_{n-1}$.

1. Soit p un nombre premier. On suppose que p divise a_k. Montrer que p ne divise pas B_k.
2. On suppose que p premier divise tous les B_k. Montrer que p ne divise aucun des a_k.
3. En déduire qu'il n'existe aucun nombre premier qui divise tous les B_k.
4. En déduire $\mathbb{Z} = B_1\mathbb{Z} + \cdots + B_k\mathbb{Z}$, puis l'existence de $U_1, \dots, U_n$ avec $U_1B_1 + U_2B_2 + \cdots + U_nB_n = 1$.
5. On pose $A_k = U_kB_k$. Montrer $A_k \equiv 1$ $[a_k]$ et $A_k \equiv 0$ $[a_j]$ pour $j \neq k$. Montrer (cela nécessite un théorème montré dans un exercice précédent) que ces congruences équivalent à $A_k \equiv 1$ $[a_k]$ et $A_k \equiv 0$ $[B_k]$.
6. On se donne des entiers A'_k qui vérifient les mêmes congruences que les A_k (par exemple on prend $A'_k = A_k$). Montrer (théorème des restes chinois) que le système des congruences $x \equiv x_1$ $[a_1]$, $x \equiv x_2$ $[a_2]$, ..., $x \equiv x_n$ $[a_n]$ équivaut à l'unique congruence
$$x \equiv A'_1x_1 + A'_2x_2 + \cdots + A'_nx_n \quad [a_1a_2 \dots a_n]$$

54. On veut résoudre les congruences simultanées $x \equiv 3$ [11], $x \equiv 4$ [7], et $x \equiv 12$ [25]. Grâce à des identités de Bezout obtenir A_1, A_2, A_3 avec $A_1 \equiv 1$ [11] et $A_1 \equiv 0$ [175], $A_2 \equiv 1$ [7] et $A_2 \equiv 0$ [275] , $A_3 \equiv 1$ [25] et $A_3 \equiv 0$ [77]. Puis, montrer que $x = 3A_1 + 4A_2 + 12A_3$ est une solution. Finalement déterminer la plus petite solution x qui soit positive. (courage pour les calculs ! quant à moi, je trouve que -175, -825, et -924 conviennent pour les A_j et que $x = 487$ est la plus petite solution positive.)

55. Soit p un nombre premier, au moins égal à 3.

1. Résoudre l'équation $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. On note $G(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}$ le groupe multiplicatif. On note $x \sim y$ si ($x = y$ ou $x = y^{-1}$). Montrer que cela définit une relation d'équivalence. Montrer qu'il y a exactement deux classes d'équivalence qui sont des singletons et $\frac{p-3}{2}$ classes d'équivalence qui contiennent exactement deux éléments.
3. En utilisant ce qui précède montrer : $(p-1)! \equiv -1$ $[p]$.
4. On note $A = 1 \times \cdots \times \frac{p-1}{2}$ et $B = \frac{p+1}{2} \times \cdots \times (p-1)$. Montrer que $AB = (p-1)!$ et que $B \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} A$ $[p]$. En déduire $(-1)^{\frac{p-1}{2}} A^2 \equiv -1$ $[p]$.
5. En déduire que si $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$ alors $\overline{-1}$ est un carré dans $G(p)$: $\exists x\ x^2 = \overline{-1}$. Réciproquement en utilisant le petit théorème de Fermat, montrer que si $\overline{-1}$ est un carré dans $G(p)$ alors $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ $[p]$ donc $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
6. Montrer que $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ vaut $+1$ si $p \equiv 1$ [4] et vaut -1 si $p \equiv 3$ [4]. En déduire que $\overline{-1}$ est un carré dans $G(p)$ si et seulement si $p \equiv 1$ [4].

Fiche 4

Version du 17 novembre 2003, 5 :37 pm

Chiffres après la virgule, nombres réels, suites, limites. Admis : toute suite (de nombres réels) croissante majorée converge vers une limite finie. **D'autres fiches d'exercices viendront compléter celle-ci**.

56. Les exercices qui suivent portent sur les propriétés générales liées à la notion de limite pour les suites (de nombres réels). Certains sont tellement importants qu'ils auront été démontrés en cours ; mais tous en fait sont très importants et devront être résolus avec comme point de départ la définition de la notion de limite (finie ou infinie ; nota bene : lorsque l'on dira "si $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe" cela voudra dire, sauf mention exprès autre, que la limite existe et est **finie**). Dans la suite vous pourrez utiliser les énoncés démontrés comme outils dans d'autres exercices.

1. Montrer $\forall A, B \in \mathbb{R}$ $\Big||A|-|B|\Big| \leq |A-B|$. On utilise souvent cette inégalité dans les histoires de limites.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite. Soit L un nombre réel et soit $v_n = |u_n - L|$. Montrer :
$$\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} v_n = 0$$
3. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres réels positifs ou nuls. On suppose $\forall n\ 0 \leq u_n \leq w_n$.
   (a) Montrer $\lim_{n\to\infty} w_n = 0 \ \Rightarrow\ \lim u_n = 0$.
   (b) Montrer $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \ \Rightarrow\ \lim w_n = +\infty$.
   (c) Montrer $\Big(\lim_{n\to\infty} u_n = U \ \text{ et } \ \lim w_n = V\Big) \Rightarrow U \leq V$.
4. On suppose que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres entiers strictement positifs. On suppose de plus que la suite est strictement croissante. Montrer $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
5. Si $0 < c < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$.
6. Si $1 < C$ alors $\lim_{n\to\infty} C^n = +\infty$.
7. Pour tout x on a $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.
8. Si $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe et est non nulle alors il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow u_n \neq 0$. Mieux : il existe N tel que soit $n \geq N \Rightarrow u_n > 0$ soit $n \geq N \Rightarrow u_n < 0$
9. Si $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe et si $\lim_{n\to\infty} v_n$ existe alors $\lim_{n\to\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ existe et vaut $\alpha \lim_{n\to\infty} u_n + \beta \lim_{n\to\infty} v_n$ (théorème du cours, très important).
10. Si $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe et si $\lim_{n\to\infty} v_n$ existe alors $\lim_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n)$ existe et est égale à $(\lim_{n\to\infty} u_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} v_n)$ (théorème du cours, très important).
11. Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L$ alors la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ a une limite qui est elle aussi égale à L.

57. Vrai ou Faux ? Dans ces exercices vous devrez dire et justifier si oui ou non les affirmations sont exactes.

1. On suppose $u_n > 0$ pour tout n et que $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe. Alors $\lim_{n\to\infty} u_n > 0$.
2. Si $u_n > v_n$ pour tout n et si les suites convergent alors $\lim_{n\to\infty} u_n > \lim_{n\to\infty} v_n$.

3. On suppose $\lim u_n = 0$ et $\forall n \; u_n > 0$. Alors pour n grand on a $u_n \geq u_{n+1}$.
4. Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to\infty} u_n$ et $\lim_{n\to\infty} w_n$ existent alors $\lim_{n\to\infty} v_n$ existe et $\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n \leq \lim_{n\to\infty} w_n$.
5. Si $\lim_{n\to\infty} u_n^2 = L$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{L}$.
6. Si $u_n > 0$ pour tout n et si $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe alors $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = 1$.
7. Si $\lim_{n\to\infty} u_{2n}$ et $\lim_{n\to\infty} u_{2n+1}$ existent alors $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe.
8. Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante alors elle a une limite.
9. Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée alors elle a une limite.
10. Si, pour $k \geq 1$ donné, la suite $(u_{n+k})_{n\geq 1}$ converge alors $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe et $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+k}$.
11. Si $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe (finie ou infinie) alors $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.
12. Si $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots$ et si $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

58. On considère la suite définie selon $u_n = \frac{1}{2} + (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)$.

1. Montrer : $\forall n \geq 1 : \; |u_n - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2n}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser quelle est sa limite L.

59. Cet exercice porte sur une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x on a $x^2 + x + 1 > 0$ (ind. : que vaut $(x+\frac{1}{2})^2$?). En déduire qu'il n'existe aucun $n \geq 1$ avec $u_n = -1$ (ind. : examiner u_{n-1}).
2. Montrer la validité de l'assertion :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \Big(u_{n+1} = 0 \Rightarrow \big((u_n = 0) \text{ ou } (n = 0 \text{ et } u_0 = -1)\big)\Big)$$
3. On suppose que u_0 n'est ni 0 ni -1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
4. On suppose $u_0 \geq 2$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2^{2^n}$.
5. On suppose $u_0 > 0$. En raisonnant par l'absurde montrer : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

60. On considère la série de terme général $\sqrt{n}$, autrement dit sa Nième somme partielle est $S_N = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{N}$.

1. Montrer qu'il y a exactement $1 + \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ entiers j avec $\frac{N}{2} \leq j \leq N$ (on note $\lfloor x \rfloor$ la "partie entière de x".)
2. En déduire $S_N \geq \frac{N\sqrt{N}}{2\sqrt{2}}$ et la valeur de $\lim_{N\to\infty} S_N/N$ et de $\lim_{N\to\infty} S_N$.

61. On se donne pour $n \geq 0$ des nombres réels positifs c_n inférieurs à 1. Soit $0 < a < 1$. Montrer que la suite $u_n = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots + c_n a^n$ est croissante et majorée (donc convergente par un Théorème du Cours).

62. Soit $a > 0$. On pose pour $n \geq 1$: $u_n = \sqrt[n]{a}$ (l'existence de la fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même est admise). Étudier la convergence de la suite (u_n) en fonction de la valeur de a.

63. On suppose que $L = \lim_{n\to\infty} u_n^3$ existe. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe et vaut $\sqrt[3]{L}$.

64. Soit ϕ le "Nombre d'Or" $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180339880$.

1. Montrer $\phi^2 + \phi = 1$. Quelles sont les deux solutions $t_1 > 0$ et $t_2 < 0$ de $t^2 = t + 1$ en fontion de ϕ ?
2. On se donne une suite u_n avec $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $u_n = a \cdot t_1^n + b \cdot t_2^n$ pour tout n si cela est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
3. On suppose $u_0 = 1$. Quelle est l'unique valeur de u_1 qui assure $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$?
4. On suppose $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ (les u_n sont les nombres de Fibonacci). Que vaut $\lim_{n\to\infty} \phi^n u_n$?

Fiche 5

Version du 25 novembre 2003, 5 :09 pm

Les listes de vocabulaire viendront dans d'autres fiches. Ici, on continue avec quelques exercices de limites. Dans cette fiche j'écris $\lim u_n$ au lieu de $\lim_{n\to+\infty} u_n$ car c'est plus simple et il n'y pas d'ambiguïté possible. "Déterminer la limite d'une suite (u_n)" signifie décider si la suite (u_n) admet une limite, finie, ou infinie, et en donner la valeur.

65. Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{C^n}{3^n+4^n}$.
2. $u_n = \frac{3^n+5^n+7^n}{1+a^n}$, avec $a > 0$.
3. $u_n = \frac{n^3+n^5+n^7}{1+n+n^2}$.

66. On suppose $L = \lim v_{3n} = \lim v_{3n+1} = \lim v_{3n+2}$. Montrer $\lim v_n = L$.

67. On suppose $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \geq 0$ et pour un certain $p > 0$. Montrer que la suite u_n converge si et seulement si elle est constante.

68. (fait en cours pour $N = 2$; en cours on avait restreint dans un premier temps à $A \in \mathbb{N}$, mais c'est inutile.) Soit A un nombre réel strictement positif, $A > 0$, et soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. On choisit, pour $k \geq 0$, n_k comme étant le plus grand entier tel que $(n_k)^N \leq A \cdot 10^{k\,N}$, et on pose $q_k = \frac{n_k}{10^k}$. Montrer que q_k est une suite croissante et majorée, donc convergente. Montrer que sa limite L vérifie $L^N = A$, et que L est l'unique nombre réel positif avec cette propriété. On note $L = \sqrt[N]{A}$. Montrer que la fonction $A \mapsto \sqrt[N]{A}$ est strictement croissante.

69. Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \sqrt[N]{n}$?

70. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}$. Montrer par récurrence sur n que $u_n > 1$ pour $n \geq 2$. Calculer à la main les premières valeurs de la suite u_n, puis avec une calculatrice. Émettre sur cette base une conjecture sur $L = \lim u_n$. En admettant l'existence de L prouver $L = \sqrt{2}$. En étudiant le lien entre $u_{n+1} - \sqrt{2}$ et $u_n - \sqrt{2}$, prouver par récurrence sur n l'inégalité $|u_n - \sqrt{2}| < 1/4^n$. En déduire que effectivement $\lim u_n = \sqrt{2}$.

71. Dans l'exercice précédent, montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites adjacentes.

72. Soit $a > 0$. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{a}{1+u_n}$. Déterminer $\lim u_n$.

73. Soit $0 < q < 1$. On pose $u_1 = 1 - q$ et $u_{k+1} = u_k \cdot (1 - q^{k+1})$ de sorte que

$$u_n = (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente, de limite $L \geq 0$.
2. Montrer $a, b > 0 \Rightarrow \quad (1-a)(1-b) > 1 - (a+b)$.
3. Montrer qu'il existe N avec $q^N/(1-q) < 1$.
4. Montrer par récurrence sur $n > N$:
$$(1-q^N)(1-q^{N+1})\dots(1-q^n) > 1 - (q^N + q^{N+1} + \dots + q^n)$$
5. Déduire de ce qui précède $L > 0$.

74. Soit $0 < a \leq 1$. On pose $u_n = (1 - \frac{a}{n^2})^n$. Déterminer $\lim u_n$. Indication : montrer d'abord pour tout $0 \leq x \leq 1$: $(1-x)^k \geq 1 - kx$, par exemple par récurrence sur k.

75. (**exercice terrifiant**) On appelle sous-suite d'une suite v_n une suite u_k, $k \geq 1$, avec $u_k = v_{n_k}$ et $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. On suppose qu'il existe A tel que toute sous-suite u_k de v_n possède une sous-sous-suite w_l avec $\lim w_l = A$. Montrer $\lim v_n = A$.

Fiche 6

Version du 3 décembre 2003, 2 :11 pm

Je remets (encore) à une prochaine fiche les listes de vocabulaire. Dans cette fiche on s'intéresse (principalement) aux fonctions continues et aux notions annexes.

76.

1. Rappeler la définition de : "le nombre réel x est un majorant de la partie E de $\mathbb{R}$".
2. Rappeler la définition de : "le nombre réel x est la borne supérieure de la partie E, non vide, de $\mathbb{R}$", et aussi la définition de "la borne supérieure de E est $+\infty$".
3. L'ensemble $]0,1] \cup [2,+\infty[$ peut-il être l'ensemble des majorants d'une partie de $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.
4. Deux parties distinctes E et E' de $\mathbb{R}$ peuvent-elles avoir les mêmes majorants ? Justifier la réponse.
5. Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}$, non vide, bornée, qui contienne sa borne supérieure mais pas sa borne inférieure.
6. Existe-t-il une partie bornée de $\mathbb{R}$ dont le complémentaire dans $\mathbb{R}$ soit aussi borné ? Justifier la réponse.
7. La borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$ bornée est-elle toujours égale à la borne inférieure de la partie complémentaire ? Justifier la réponse.
8. Soient E et F deux sous-ensembles non vides et majorés de $\mathbf{R}$. Montrer que $E \cup F$ est majoré et que $\sup E \cup F = \max(\sup E, \sup F)$.

77. Pour chacune des fonctions f suivantes (de domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$) et pour chaque nombre réel x_0 donné, trouver $\delta > 0$ tel que :

$$(|x - x_0| < \delta \text{ et } x \in D_f) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{100}$$

Attention une réponse du style "on prend $\delta = 10^{-100}$ et ça marche" n'est pas suffisante : il faut démontrer l'implication, il ne suffit pas d'affirmer qu'elle soit vraie. On aura souvent intérêt à écrire $x = x_0 + h$ et à travailler avec $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

1. On prend $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, $x_0 = 1$.
2. idem avec $x_0 = 2$, puis $x_0 = 100$.
3. On prend $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $D_f =]-1,+\infty[$, $x_0 = 3$.
4. idem avec $x_0 = 0$, puis $x_0 = 10$.
5. On prend $f(x) = \sqrt{|x|}$ et $D_f = \mathbb{R}$, avec $x_0 = 0$, puis $x_0 = 1$, puis $x_0 = 16$.
6. On prend $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $D_f = [0,+\infty[$, $x_0 = 0$, puis $x_0 = 8$.

78. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Soit $A = \{x \in [0,1] \mid g(x) = 0\}$.

1. Montrer que A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $b = \sup A$.
2. Montrer $0 \leq b \leq 1$ et $g(b) = 0$.
3. Montrer $b < 1$ et $\quad b < x \leq 1 \quad \Rightarrow g(x) \neq 0$.

4. Montrer $\forall x \in]b,1]\ g(x) > 0$.

79. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $x \neq 0 \ \Rightarrow g(x)g(-x) > 0$. Montrer : soit $(\forall x\ x \neq 0 \ \Rightarrow g(x) > 0)$ soit $(\forall x\ x \neq 0 \ \Rightarrow g(x) < 0)$. On commencera par montrer que g est non nulle et de signe constant sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.

80. Montrer qu'il existe un nombre réel x qui est dans l'intervalle $[1,8]$ et qui vérifie :

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{x+x^2}{4+x}$$

Indication : quelle propriété possède la fonction égale à la différence entre les deux membres de cette équation ? que vaut-elle en $x = 1$ et en $x = 8$?

81. Trouver une application continue, bijective, strictement croissante :

1. de $[0,2]$ sur $[-1,10]$.
2. de $[1,+\infty[$ sur $[0,1[$.
3. de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

82. Trouver une application continue f avec :

1. $f(]0,1[) =]3,8[$.
2. $f(]0,1[) = [3,8[$.
3. $f(]0,1[) =]3,8]$.
4. $f(]0,1[) = [3,8]$.

83. Dans l'exercice précédent on remplace partout $f(]0,1[)$ par $f([0,1])$. Qu'est-ce qui est possible et qu'est-ce qui est impossible ?

84. Trouver une application continue f avec :

1. $f(]0,1]) =]3,8[$.
2. $f(]0,1]) = [3,8[$.
3. $f(]0,1]) =]3,8]$.
4. $f(]0,1]) = [3,8]$.

(c'est possible dans tous les cas ; le premier est le plus subtil).

85. Soit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\sup k < +\infty$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \sup_{y \leq x} k(y)$.

1. Montrer que la fonction g est bien définie et vérifie $\forall x \quad k(x) \leq g(x) \leq \sup k$.
2. Montrer que la fonction g est croissante et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \sup k$.
3. Donner un exemple avec k non constante, mais g la fonction constante.
4. Montrer $\lim_{x \xrightarrow[x<x_0]{} x_0} g(x) = \sup_{y<x_0} k(y)$.
5. On suppose que k est continue au point x_0. Montrer que g l'est aussi.

86. Rappeler la définition de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin(x)}$. Représenter son graphe. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{Arcsin}(\sin(x))$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue, impaire et périodique de période 2π. Calculer sa valeur en $-\pi$, $-\pi/2$, 0, $\pi/2$ et π. Représenter son graphe.

87. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que $[x,y] \subset A$ pour tout $x \in A$, $y \in A$ (et $x < y$). Montrer que A est un intervalle (et réciproquement).

Fiche 7

Version du 17 décembre 2003, 12 :08 pm

Lorsqu'une liste de vocabulaire vous sera enfin remise, elle risque d'être assez gigantesque. Bon, voici des exercices sur la continuité et la dérivabilité. En ce qui concerne les dérivées, j'espère que vous aurez compris qu'il faut savoir les calculer sans faute : ce sont des dizaines, voire des centaines de calculs de dérivées que vous devez par vous-même vous exercer à faire, et il n'y a rien de plus facile que d'aller à la bibliothèque trouver un livre avec des listes infinies de tels calculs. Ce n'est pas un ou deux exercices de plus ou de moins que je mettrais dans cette fiche qui y changerait quoi que ce soit. J'en ai produit quelques uns au hasard cependant. Une autre chose à dire, c'est qu'il y a un nombre tellement immense de choses que l'on peut faire via le calcul des dérivées, que c'est presque absurde de préparer comme je l'ai fait quelques exercices. C'est par centaines qu'il vous faudrait en faire, des exercices.

Dans cette fiche ln désigne le logarithme népérien (parfois aussi noté Log ou log). Un "voisinage de x" est un intervalle ouvert contenant x.

88. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que A est un intervalle si et seulement si $[x,y] \subset A$ pour tout $x \in A$, $y \in A$ avec $x < y$ (un singleton est un cas particulier d'un intervalle).

89. Montrer que la dérivée d'une fonction impaire est paire et que la dérivée d'une fonction paire est impaire.

90. On pose $E_1(x) = \exp(x)$, puis par récurrence $E_{n+1}(x) = \exp(E_n(x))$. Que vaut $E_n'(x)$?

91. Calculer les dérivées premières, secondes et tierces de $\exp(\exp(x))$. Calculer la dérivée seconde de $\cos(\sin(x))$. Calculer la dérivée seconde de $\cos(2x\cos(3x))$. Calculer la dérivée seconde de $\cos(ax)\exp(bx)$.

92. En supposant que la fonction $x \mapsto f(x)$ est dérivable en x_0 et que $f(x_0) \neq 0$ montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = \ln(|f(x)|)$ est définie dans un voisinage de x_0 et :

$$g'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

93. Calculer les dérivées première, seconde et tierce de $\ln|\ln|x||$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$.

94. Soit $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$. Trouver une expression de f de la forme $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$. En déduire une expression de la dérivée n-ième de f.

95. Soit $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue. Qu'elle est sa dérivée en $x_0 \neq 0$? Est-elle dérivable en $x_0 = 0$?
2. Montrer que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est partout dérivable et donner sa dérivée.

96. On suppose que la fonction f n'est pas dérivable en y_0 et que la fonction g est dérivable en x_0 avec $g(x_0) = y_0$. Est-il exact que la fonction composée $x \mapsto f(g(x))$ n'est pas dérivable en x_0 ?

97. Soit $f(x) = e^x + e^{2x}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$. On note $g(y)$ la fonction réciproque. Montrer $g'(y) = 1/(2y + \frac{1}{2} - \sqrt{y + \frac{1}{4}})$.

98. Montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(\sqrt{|x|})$ est dérivable en $x \neq 0$ et donner cette dérivée. Montrer qu'elle admet des dérivées à droite et à gauche en $x_0 = 0$, mais n'est pas dérivable en ce point (une méthode simple est d'utiliser la représentation de $\exp(y)$ comme série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ pour obtenir les dérivées à gauche et à droite).

99. Faire la même chose pour $x \mapsto \cos(\sqrt{|x|})$. On pourra commencer par établir : $\forall x\ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, si cela n'a pas déjà été fait en cours.

100.

1. Montrer $\forall x > 1\ \sqrt{x} > x^{1/e} \geq \ln(x)$ et déterminer le seul x qui donne une égalité $x^{1/e} = \ln(x)$.
2. Quels sont les nombres réels a tels que $\forall x > 0 \quad x^a > \ln(x)$?

101. Établir par un calcul de dérivées : $\forall x \quad 2\mathrm{Arctg}(\mathrm{th}x)) = \mathrm{Arctg}(\mathrm{sh}(2x))$.

102. Soit $f(x) = \exp(-\frac{1}{x})$, pour $x > 0$.

1. Montrer $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^N} \exp(-\frac{1}{x}) = 0$ pour tout N.
2. Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ qu'il existe un polynôme P_n de degré $2n$ tel que $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x})$.
3. On définit maintenant $g_n(x) = f^{(n)}(x)$ pour $x > 0$, et $g_n(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Montrer que la fonction g_n est continue, y-compris en 0.
4. Montrer que la fonction g_n est partout dérivable et que $g_n' = g_{n+1}$.
5. En déduire qu'il existe une fonction infiniment dérivable dont toutes les dérivées sont nulles en 0 et qui pourtant n'est pas la fonction nulle.

103. On suppose $\forall x \quad f'(x) \geq g'(x)$ et $f(0) = g(0)$. Est-il exact que $\forall x \quad f(x) \geq g(x)$?

104. (Savoir trouver et rédiger une démonstration : c'est l'essentiel.)

1. Soit f une application continue sur un intervalle I. On suppose que f est injective. Montrer que soit f est strictement croissante, soit f est strictement décroissante.
2. Soit f une application dérivable sur un intervalle I. On suppose que la fonction dérivée f' ne s'annule pas. Montrer que soit $\forall x \in I\ f'(x) > 0$, soit $\forall x \in I\ f'(x) < 0$.

105. Dans cet exercice, pour simplifier l'écriture on écrit $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$ et aussi $\ln\ln x$ au lieu de $\ln(\ln(x))$. L'intervalle $]1, +\infty[$ est noté I. On définit deux fonctions f et g sur I en posant, pour tout x de I,

$$f(x) = \ln\ln x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x\ln x}.$$

1. Montrer que g est strictement décroissante sur I.
2. Montrer que f est dérivable sur I et que l'on a $f' = g$.
3. Montrer pour tout entier $k \geq 2$: $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln\ln(k+1) - \ln\ln k \leq \frac{1}{k\ln k}$.
4. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} = \frac{1}{2\ln 2} + \cdots + \frac{1}{n\ln n}$. Déduire de la question précédente $S_n \geq \ln\ln(n+1) - \ln\ln 2$. En déduire $\lim_{n\to\infty} S_n$.
   Pour tout entier $n \geq 2$, on pose maintenant $T_n = S_n - \ln\ln n$.
5. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
6. Montrer que $(T_n)_{n\geq 2}$ converge et que sa limite ℓ vérifie

$$\ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right) \leq \ell \leq \frac{1}{2\ln 2} + \ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right).$$

Université des Sciences et Technologies de Lille **U.F.R. de Mathématiques**

Année 2003-2004 – MIAS (première année)

1er semestre – Section 1

Fiche 8

Version du 9 janvier 2004, 18 :48 pm

Chers étudiants, il s'agit donc de la dernière fiche pour ce semestre, alors je ne devrais pas trop vous accabler... mais bon, je suis payé pour cela. Que signifie :

limite d'une suite, limite finie ou infinie, limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une valeur absolue, d'une racine carrée ; suites monotones, convergentes, divergentes, bornées, majorées, minorées, lemme des encadrements ;

limite d'une fonction en un point, limite à droite, à gauche, limite finie, limite infinie ; continuité, continuité à droite à gauche ; critère de continuité par les limites de suites ;

borne supérieure, majorant, minorant, borne inférieure ; une fonction continue sur un intervalle fermé borné, est bornée et atteint son maximum et son minimum (au moins une fois) ; le théorème des valeurs intermédiaires ; l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle ; une fonction continue strictement croissante est bijective sur son image ; la fonction réciproque est continue ; les fonctions exponentielles, cosinus, sinus, logarithme, puissances, racines nièmes, Arc-sinus, Arc-tangente, etc...

dérivée en un point, à gauche, à droite, par au-dessus, par en-dessous (non, je rigole) ; fonction dérivée, fonction de classe C^1, C^2, fontions infiniment dérivables ; tangentes ; extrema locaux ; le lemme de Rolle, le théorème des accroissements finis, le théorème fondamental sur le rapport entre sens de variation d'une fonction et signe de sa dérivée ; dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient ; dérivée d'une fonction composée, d'une fonction réciproque ; les dérivées des fonctions puissance, de la fonction exponentielle, de la fonction logarithme, des fonctions cosinus et sinus ; les fonctions cos-hyperbolique et sin-hyperbolique, les dérivées des fonctions Arc-tangente et Arc-sinus

convexité et concavité, au-dessus ou en-dessous des tangentes, en-dessous ou au-dessus des cordes ; la concavité de la fonction logarithme, la convexité de la fonction exponentielle ; l'inégalité arithmético-géométrique générale ;

encadrements des fonctions cosinus et sinus, leur représentation comme séries infinies ;

les nombres complexes forment un corps, module, partie réelle, partie imaginaire, conjugué, l'exponentielle complexe, coordonnées polaires, argument, racine carrée, équations quadratiques, biquadratiques, racines nièmes, racines nièmes de l'unité, le théorème fondamental de l'algèbre

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Alors, juste quelques exercices pour terminer de vous achever :

106. Montrer que la fonction $x \mapsto \log\log x$ est concave ($x > 1$).

107. Étudier le sens de variation de la fonction x^{x^x} pour $x > 0$.

108. Étudier $\mathrm{Arcsin}\cos x$ et $\cos \mathrm{Arcsin} x$?

109. Quelle est la dérivée de $\mathrm{Arctg} x + \mathrm{Arctg}(1/x)$? que vaut-elle en $x = 1$? en $x = -1$?

110. Soit $a \in \mathbb{R}$. Représenter la fonction $x \mapsto \frac{a+x}{1-ax}$ suivant les cas $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$. Étudier la fonction

$$f(x) = \mathrm{tg}\left(\mathrm{Arctg}\frac{a+x}{1-ax} - \mathrm{Arctg}(a)\right)$$

pour x dans l'intervalle où $ax < 1$. Que vaut f en $x = 0$? quelle est la dérivée de f ? En déduire la formule, valable pour $xy < 1$:

$$\mathrm{Arctg} x + \mathrm{Arctg} y = \mathrm{Arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

111. (très difficile) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer l'inégalité de convexité

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall u \in [0,1] \qquad f(ux + (1-u)y) \leq uf(x) + (1-u)f(y)$$

On pourra montrer par récurrence sur k que l'inégalité est vraie pour tout u de la forme $N/2^k$, $N \in \mathbb{N}$, $0 \leq N \leq 2^k$. Ensuite on établira et utilisera que tout $u \in [0,1]$ est la limite d'une suite de u de la forme spéciale précédente. Cest à ce stade qu'on utilisera la continuité de f.

112. Soit z un nombre complexe tel que $z^5\, \overline{z}^3 = 1$. Montrer que z est de module 1 puis déterminer tous les z possibles.

113. Calculer les racines carrées d'une dizaine de nombres complexes que vous aurez choisis au hasard.

114. Déterminer tous les nombres complexes z vérifiant l'équation

$$z^4 - (8+4i)z^2 + 12 - 16i = 0$$

(on demande que chaque solution soit donnée sous la forme $z = x + iy$ avec des valeurs numériques explicites pour les parties réelles et imaginaires x et y).

115. Soient w_1 et w_2 deux nombres complexes distincts. Expliquer quelle est la signification géométrique de l'équation $|z - w_1| = |z - w_2|$ et en déduire le lieu des z vérifiant cette équation.

116. Quelle est l'interprétation géométrique de l'application $z \mapsto w \cdot z$ pour w fixé, et $z \in \mathbb{C}$?

117. On considère la droite passant par l'origine et faisant un angle θ avec l'horizontale$[0, +\infty[$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Quel est le nombre complexe z^* qui correspond à z dans la symétrie orthogonale par rapport à cette droite ?

118. même question, mais on ne suppose plus que la droite passe par l'origine, mais qu'elle est donnée par une équation $ax + by = c$.

119. Soit z un nombre complexe de module différent de 1. Montrer que pour tout nombre complexe w de module 1 le nombre complexe

$$w' = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w}$$

est lui aussi de module 1 et que l'application $w \mapsto w'$ est une bijection du cercle unité sur lui-même.

120. Dans l'exercice précédent établir, sous l'hypothèse $|z| < 1$, que $|w'| < 1$ si $|w| < 1$ et que l'application $w \mapsto w'$ est une bijection du disque unité sur lui-même.

121. Soit $U_0 = 1$, $U_1 = 1 + 2\cos\theta$, $U_2 = 1 + 2\cos\theta + 2\cos(2\theta)$, ..., $U_N = 1 + \sum_{1 \leq j \leq N} 2\cos(j\theta)$. Exprimer ces sommes comme des sommes géométriques de nombres complexes, et en déduire une expression faisant intervenir $\sin(\theta/2)$. Puis on définit

$$W_N = \frac{U_0 + U_1 + \cdots + U_N}{N+1}$$

Montrer

$$W_N = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2 \frac{N+1}{2}\theta}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta}$$

Que se passe-t-il en $\theta = 0$? Que vaut $1 + 3 + 5 + \cdots + (2N+1)$?

Université des Sciences et Technologies de Lille **U.F.R. de Mathématiques**

Année 2003-2004 – MIAS (première année)

2^e semestre – Sections 1 et 2

Fiches 1 à 8

Toutes les fiches du deuxième semestre : 129 exercices, précédés de brefs rappels de cours.

page suivante S.V.P.

Université des Sciences et Technologies de Lille **U.F.R. de Mathématiques**
Année 2003-2004 – MIAS (première année)
2e semestre – Sections 1 et 2

Fiche 1

Version du 28 janvier 2004, 13 :00 pm

Subdivisions d'un intervalle, sommes de Darboux inférieures et supérieures pour une fonction bornée, intégrales inférieures et supérieures d'une fonction bornée, définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann (R-intégrable), notation $\int_a^b f(x)dx$. Sommes de Riemann générales et théorème de convergence vers $\int_a^b f(x)dx$ pour toute fonction R-intégrable (admis).

Une fonction étagée (aussi dite en escalier, ou constante par morceaux) est R-intégrable ; une fonction monotone est R-intégrable ; une fonction continue est R-intégrable (à cette occasion : notion de continuité uniforme). Une fonction continue par morceaux, ou monotone par morceaux, est intégrable. Intégrale d'une somme. Intégrale d'une fonction positive ou nulle. Monotonie de l'intégrale. Valeur absolue d'une intégrale. Relation de Chasles. Calcul de certaines intégrales par les Sommes de Riemann. Caractérisation utilisant des fonctions étagées des fonctions intégrables. La fonction indicatrice des rationnels de $[0, 1]$ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Les deux parties du "Théorème Fondamental du Calcul" : soit f une fonction que l'on suppose R-intégrable (en particulier, bornée).

– si F est une primitive de f ($F' = f$ sur l'intervalle $[a, b]$) alors

$$\int_a^b f(x)dx = [F]_a^b = F(b) - F(a)$$

La notation $[F(x)]_a^b$ à la place de $[F]_a^b$ est autorisée. La formule reste valable lorsque F est seulement supposée continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $F' = f$ sur $]a, b[$.

– si la fonction f est continue alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ en est une primitive (plus généralement : elle est dérivable de dérivée $f(x_0)$ en tout x_0 où f est continue)

La formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Elle est valable en particulier lorsque les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[a, b]$.

Quelques exercices : il y aura bien sûr d'autres fiches sur l'intégration, mais quoi qu'il en soit il faut faire des exercices par dizaines et pas seulement les quelques specimens proposés ici en nombre forcément insuffisant.

122. On considère la fonction f sur $[0, 5]$ qui vaut 1 sur $[0, 1[$, 10 en 1, -5 sur $]1, 4[$, 7 sur $[4, 5[$ et 23 en 5. Que vaut $\int_0^5 f(x)dx$?

123. On admet la formule, pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{1 \leq j \leq n} j^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$. Déterminer en calculant la limite de sommes de Riemann la valeur de $\int_a^b x^2\,dx$.

124. On a évalué en cours $\int_a^b e^x\,dx$ et $\int_a^b \cos x\,dx$ par une limite de sommes de Riemann. Faites de même pour $\int_a^b e^{5x}\,dx$, pour $\int_a^b \sin x\,dx$ et pour $\int_a^b \cos(3x)\,dx$.

125. Donner un raisonnement “géométrique” pour prouver

$$\int_0^1 x^n\,dx + \int_0^1 x^{\frac{1}{n}}\,dx = 1\ ,$$

et confirmer le résultat en évaluant explicitement les intégrales.

126. Trouver des fonctions simples avec $\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 f_2(x)dx$, et aussi $\int_0^1 g_1(x)dx = \int_0^1 g_2(x)dx$, mais $\int_0^1 f_1(x)g_1(x)dx \neq \int_0^1 f_2(x)g_2(x)dx$. En déduire qu'il n'existe aucune formule magique du type $\int_0^1 f(x)g(x)dx = K(\int_0^1 f(x)dx, \int_0^1 g(x)dx)$.

127. On suppose que f est R-intégrable, et que $g = f$ sauf en un nombre fini de points de l'intervalle $[a, b]$. Montrer que g est R-intégrable et que $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

128. On suppose que la fonction f est bornée sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et qu'elle est R-intégrable sur $[a', b]$ pour tout a' avec $a < a' < b$. Montrer que f est R-intégrable sur $[a, b]$ et que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{a'\to a, a'>a} \int_{a'}^b f(x)dx$. Montrer que la fonction $f(x) = \sin(1/x)$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, est R-intégrable sur tout intervalle $[a, b]$.

129. On suppose que f est R-intégrable sur $[a, b]$. Montrer que $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une fonction continue de x.

130. On suppose f est continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ avec de plus $f \geq 0$ sur cet intervalle. Montrer que $\int_a^b f(x)dx = 0$ n'est possible que si f est identiquement nulle.

131. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_x^{x^2} f(t)dt$? et celle de $x \mapsto \int_{\sin x}^{\cos x} f(t)dt$?

132. Prouver pour tout entier $n \geq 2$, par un raisonnement de calcul d'intégrale avec la fonction $1/t$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \log(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

133. Montrer par un raisonnement géométrique de calcul d'intégrales que la suite

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1)$$

est croissante, positive et majorée par 1. On note γ sa limite (constante d'Euler). Montrer $\gamma = \lim \left(\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k} - \log(n)\right)$. Prouver $\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}) \geq \log(k+1) - \log(k)$, et établir ensuite $\gamma \geq \frac{1}{2}$ (ind. : utiliser la convexité de la fonction $t \mapsto 1/t$).

Fiche 2

Version du 13 février 2004, 10 :10 am

Résumé du cours.
Sur $\mathbb{R}$, une fonction polynomiale $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ne s'annule identiquement que si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. En fait si un au moins des a_j est non nul, alors elle a au plus n zéros, aussi appelés racines. Nous le démontrons plus généralement dans tout anneau A qui est **commutatif et intègre** (comme $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$). Si A est en plus **infini** (comme $\mathbb{Z}$ mais pas comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) cela montre l'unicité des coefficients a_j permettant d'exprimer l'application polynomiale f, et permet donc de définir son degré $\deg(f)$. Par convention $\deg(0) = -\infty$ où 0 désigne l'application constante nulle. On a $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$. Pour A toujours supposé **infini**, on peut aussi définir la notion de multiplicité d'une racine. La somme des multiplicités est au plus $\deg(f)$ et on peut écrire (de manière unique) $f(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r} \cdot g(x)$ avec g une application polynomiale qui n'a aucun zéro.

Nous construisons rigoureusement « l'anneau $A[X]$ des polynômes à coefficients dans l'anneau commutatif A, en l'indéterminée X ». Pour un polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ on a (pour ainsi dire, par définition) $P = 0$ si et seulement si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, contrairement aux applications polynomiales. On dit que P est une constante si $P = a$, $a \in A$ (ainsi A est considéré comme sous-ensemble de $A[X]$). Tout polynôme P définit une application polynomiale de A vers A, $x \mapsto a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n$ que l'on notera $P(x)$, mais si A est fini plusieurs polynômes différents donnent la même application polynomiale. Pour le polynôme P lui-même la notation $P(X)$ est déconseillée en général, mais il serait de mauvaise foi de l'interdire totalement (par exemple je veux avoir le droit d'écrire « soit Q le polynôme $P(X^2 + 1)$ »).

Si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ on pose $P' = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$ (que faut-il comprendre si $n = 0$?) et on appelle P' le polynôme dérivé (formel) de P. La formule de Leibniz est valable :

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

Les racines de P sont les $a \in A$ avec $P(a) = 0$ ce qui équivaut à l'existence d'un Q_a (qui est unique d'ailleurs) avec $P = (X - a)Q_a$. Si $P \neq 0$ chacune de ses racines possède une multiplicité m avec $1 \leq m \leq \deg(P)$.

La formule fondamentale (toujours garder en tête $\deg(0) = -\infty$) :

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

vaut si et seulement si l'anneau A est **intègre**. Et alors l'anneau $A[X]$ est aussi intègre. De plus il est alors vrai pour $P \neq 0$ qu'il y a au plus $\deg(P)$ racines (même comptées avec leurs multiplicités) et que l'on a (**version simple de la factorisation**)

$$\begin{aligned} &P = (X - a_1)^{m_1} \cdots (X - a_r)^{m_r} \cdot Q \qquad (Q \text{ sans aucune racine}) \\ &m_1 + \cdots + m_r \leq \deg(P) \end{aligned}$$

On dira que « Q divise P » si il est possible de trouver R avec $P = QR$ $(= RQ)$. L'étude plus complète de la divisibilité et de la factorisation de polynômes se simplifie énormément si les coefficients sont dans un **corps** K. À tout anneau commutatif intègre est associé son « corps des fractions », de même que $\mathbb{Q}$ est associé à $\mathbb{Z}$. Pour la suite on suppose donc que A a été remplacé par son corps des fractions K, et donc au lieu de travailler dans $A[X]$ on travaille dans l'anneau plus grand $K[X]$. Le grand choc, c'est que l'on peut alors refaire (presque) tout ce que l'on a vu en Arithmétique. Il y a de fortes analogies entre les anneaux $K[X]$ et l'anneau $\mathbb{Z}$.

En effet dans $K[X]$ on dispose de la division euclidienne : $A = QB + R$, $\deg(R) < \deg(B)$ du polynôme A par le polynôme non nul B. L'algorithme d'Euclide (dernier reste non nul) fournit un polynôme D (que l'on normalise en le rendant « unitaire »). On prouve que D divise à la fois A et B et que tout autre diviseur commun est un diviseur de D, donc l'on note $D = \mathrm{pgcd}(A, B)$. On prouve le Théorème de Bezout :

$$\exists U, V \qquad \mathrm{pgcd}(A, B) = UA + VB$$

et le fait que les polynômes de la forme $WA + ZB$ sont exactement les multiples de $\mathrm{pgcd}(A, B)$. On dit que A et B sont premiers entre eux si $\mathrm{pgcd}(A, B) = 1$ ce qui équivaut à l'existence d'une Identité de Bezout : $\exists U, V, \quad UA + VB = 1$.

On dit que P, de degré ≥ 1, est irréductible si ses seuls diviseurs sont les constantes et les polynômes cP, $c \in K$, $c \neq 0$. Les polynômes $X - a$ sont irréductibles, mais il peut y en avoir d'autres. Le Théorème de Gauss (si A divise BC et si A est premier avec B alors A divise C) est valable. Le Lemme d'Euclide (si P, irréductible, divise AB alors P divise A ou P divise B) est valable.

Théorème (de factorisation complète) : *tout polynôme non nul s'écrit de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme le produit d'une constante non nulle et de polynômes irréductibles unitaires.*

Les polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{C}[X]$ sont les $X - a$, $a \in \mathbb{C}$ et les polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{R}[X]$ sont les $X - a$, $a \in \mathbb{R}$ et les $X^2 + bX + c$, $b^2 < 4c$, avec $b, c \in \mathbb{R}$. Si vous réussissez à comprendre ce que sont les polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{Q}[X]$ vous gagnerez le Prix Nobel, car personne sur cette Terre n'a atteint un tel niveau de connaissance encore.

Comme $K[X]$ est un anneau intègre on peut lui associer son corps des fractions que l'on appelle « corps des fractions rationnelles à coefficients dans K, en l'indéterminée X » et que l'on note $K(X)$. Toute fraction F peut s'écrire A/B avec A et B premiers entre eux (on dit alors que F est réduite). On appelle « élément simple » toute fraction de la forme A/P^n avec P un polynôme irréductible unitaire et $n \geq 1$ et $0 \leq \deg(A) < \deg(P)$.

Théorème (de décomposition en éléments simples ; admis) : *toute fraction rationnelle s'écrit de manière unique (à l'ordre des termes près) comme la somme d'un polynôme et d'un certain nombre d'éléments simples.*

On explique, pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ des méthodes pour trouver la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle lorsque celle-ci n'est pas trop compliquée.

De même que les polynômes donnent des applications polynomiales, les fractions rationnelles donnent des applications, avec pour domaine de définition $K \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$ (ou un sous-ensemble) avec les a_j les éléments de K où le dénominateur s'annule. Une telle application est appelée « fonction (ou application) fraction rationnelle », ou plus simplement, même si c'est un peu abusif, « fraction rationnelle ».

Note Importante, merci de bien l'enregistrer : après vérification dans les dictionnaires, on écrit polynomial(e) sans accent circonflexe.

134. Soit A un anneau commutatif et $P, Q \in A[X]$. Montrer

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \ ,$$

avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$. Montrer par des exemples que lorsque $\deg(P) = \deg(Q)$ la seule contrainte a priori sur $\deg(P+Q)$ est l'inégalité ci-dessus. On n'oubliera pas dans cette discussion d'envisager les cas $P = 0$, $Q = 0$ ou $P + Q = 0$.

135. Pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ on a posé $P' = a_1 + 2a_2 X + \cdots + na_n X^{n-1}$. Comment faut-il comprendre cette formule si $n = 0$? Montrer $(aP + bQ)' = aP' + bQ'$ pour tout $a, b \in A$, $P, Q \in A[X]$.

136. (suite) Montrer $(X^m Q)' = mX^{m-1}Q + X^m Q'$ pour tout Q et tout $m \in \mathbb{N}$ (comment faut-il comprendre cette formule si $m = 0$?). En déduire une preuve de la formule de Leibniz $(PQ)' = P'Q + PQ'$ pour tout P et Q.

Dans tous les exercices qui suivent on supposera que nos polynômes sont à coefficients dans un anneau intègre, de sorte que la formule

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

est valide.

137. On prend $A = \mathbb{R}$. Quels sont les polynômes avec $P' = 0$? On prend $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier). Quels sont les polynômes avec $P' = 0$?

138. En utilisant le petit Théorème de Fermat et le théorème de factorisation (en version simple, ça suffit), montrer l'identité dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ (p premier) :

$$(X - 1)(X - 2) \cdots (X - (p - 1)) = X^{p-1} - 1$$

et en déduire que p divise $(p - 1)! + 1$.

139. Soit K un corps. Montrer $\mathrm{pgcd}(cP, dQ) = \mathrm{pgcd}(P, Q)$ pour tout $c, d \in K \setminus \{0\}$, et $P, Q \in K[X]$ (un des deux non nul au moins). C'est utile à savoir pour les calculs.

140. On suppose que notre anneau (intègre) A est de caractéristique nulle (notion définie au premier semestre). Soit a une racine du polynôme P, de multiplicité m. Montrer que a n'est pas une racine du polynôme P' si $m = 1$ et est une racine de multiplicité $m - 1$ si $m \geq 1$. Avez-vous envisagé le cas $P = 0$? (comment définit-on m dans ce cas ?)

141. (suite) On travaille dans $\mathbb{C}[X]$. Soit P un polynôme de degré au moins 1 et soit z_1, …, z_r ses racines distinctes de multiplicités m_1, …, m_r. Déterminer les racines communes à P et P', puis déterminer exactement $\mathrm{pgcd}(P, P')$, et en déduire la formule : $r = \deg(P) - \deg(\mathrm{pgcd}(P, P'))$.

142. (suite) Soit $P = X^3 + X^2 - 8X - 12$. En utilisant l'algorithme d'Euclide montrer $\mathrm{pgcd}(P, P') = X + 2$. En déduire que -2 est racine double de P. Trouver ensuite la factorisation complète de P et en particulier son autre racine. Factoriser aussi P'.

143. (suite) Soit $P = X^4 - 4X^3 + 24X^2 - 40X + 100$. En utilisant l'algorithme d'Euclide montrer $\mathrm{pgcd}(P, P') = X^2 - 2X + 10$. Quelles sont les racines (complexes) de ce polynôme ? Quelles sont leurs multiplicités comme racines de P ? Peut-il y avoir d'autres racines de P ? Quelle est la factorisation de P sur $\mathbb{C}$? Quelle est la factorisation de P sur $\mathbb{R}$? Quelle est la factorisation de P sur $\mathbb{Q}$?

144. (suite) Même exercice avec $P = X^4 - 4X^3 - 18X^2 + 44X + 121$ (montrer d'abord $\mathrm{pgcd}(P, P') = X^2 - 2X - 11$).

145. Soit $P = X^n + c_1X^{n-1} + \cdots + c_n$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$, à coefficients réels ou complexes. Quelle relation y a-t-il entre c_n et les racines complexes de P ? et entre c_1 et les racines complexes de P ?

146. Quelle est la décomposition de $1/(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$?

147. Quelle est la décomposition sur $\mathbb{R}$ de $(3X+2)/(X-1)(X^2+1)$? et sur $\mathbb{C}$?

148. On travaille dans $\mathbb{R}[X]$. Soit $P = X^2+1$ et $Q = X^2-2X+2$. En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver U et V avec $UP+VQ = 1$. En écrivant $1/PQ = (UP+VQ)/PQ$ obtenir la décomposition en élément simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction $1/(X^2+1)(X^2-2X+2)$. Quelle est la décomposition en éléments simples de $X^3/(X^2+1)(X^2-2X+2)$?

149. (suite) quelles sont les racines dans $\mathbb{C}$ de P et Q ? Obtenir directement la décomposition sur $\mathbb{C}$ de $1/PQ$ et en déduire à nouveau celle sur $\mathbb{R}$.

150. Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$, premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que P et Q n'ont aucune racine complexe en commun.

151. Soit $P = X^n + c_1X^{n-1} + \cdots + c_n$ un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$. Prouver : si $P(a/b) = 0$ alors b divise a^n. En déduire que si $P(x) = 0$ avec $x \in \mathbb{Q}$ alors $x \in \mathbb{Z}$.

Fiche 3

Version du 13 février 2004, 16 :54 am

Le cours sur l'intégration a été poursuivi avec entre autres choses : critère pour l'intégrabilité avec les encadrements par des fonctions en escalier; formule d'intégration par parties, formule de changement de variable; intégrales impropres. Les problèmes à la fin de cette fiche concernent des résultats qui devront être considérés comme faisant partie intégrante du cours. Les premiers exercices ont été donnés en partiel ou en examen l'année dernière. Dans la recherche d'une primitive d'une fonction f on pourra adopter la notation $\int^x f(t)dt$ pour désigner une quelconque de ses primitives. Je l'ai dit déjà, mais pour les exercices de primitives, il n'y a qu'une seule méthode : en faire par dizaines. Alors allez voir les livres à la bibliothèque.

152. Calculer (penser à une intégration par parties pour se débarrasser du logarithme) : $\int_0^1 \log(1+t^2)\,dt$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$. En se ramenant à une somme de Riemann déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

153. Décomposer en élément simples (sur $\mathbb{R}$) la fraction rationnelle : $f(x) = \frac{4}{x^4-1}$. Déterminer les primitives de f sur l'intervalle $]-1,1[$. Quelle est la primitive qui s'annule en $x = 0$? Soit $A > 1$. Déterminer $\int_A^{+\infty} \frac{4\,dx}{x^4-1}$. L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{4\,dx}{x^4-1}$ est-elle convergente ou divergente ?

154. Déterminer la valeur exacte de

$$\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,dx$$

Ind. : plusieurs méthodes mènent au résultat : changement de variable, ou intégration par parties par exemple.

155. Déterminer pour $k > 0$ fixé et pour chaque $A > 0$ la valeur de :

$$I(A) = \int_0^A \frac{1}{x^2+k^2}dx$$

Puis calculer $\lim_{A\to+\infty} I(A)$.

156. Déterminer la primitive sur $]0,+\infty[$ de $x^2\log(x)$ qui s'annule en $x = 1$.

157. Déterminer une primitive de $1/\cos^2(t)$ et une primitive de $1/\sin^2(t)$.

158. Déterminer grâce au changement de variable $x = \mathrm{ch}(u)$ (voir le premier problème à la fin) une primitive de $1/\sqrt{x^2-1}$ pour $x > 1$. Exprimer $u > 0$ en fonction de x et en déduire une expression de cette primitive utilisant la fonction logarithme.

159. En effectuant deux intégrations par parties déterminer une primitive de $e^{at}\cos(bt)$.

160. En utilisant les fonctions à valeurs complexes (voir l'un des problèmes ci-dessous) et $\cos(bt) = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2$ refaites l'exercice précédent avec une autre méthode.

161. (incroyablement, cet exercice a été posé avec peu de succès (!!) en examen de DEA cette année ; vous allez faire mieux, c'est certain) Calculer pour $a \in \mathbb{R}$, fixé : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}e^{-|x|}\,dx$. On séparera $x > 0$ de $x < 0$ et on utilisera comme dans l'exercice précédent les notions du problème sur les intégrales de fonctions à valeurs complexes. Ou encore, si l'on veut éviter les nombres complexes, on commencera par dire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}e^{-|x|}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \cos(ax)e^{-x}\,dx$ (pourquoi ?) et on intégrera deux fois par parties. Ce n'était pas si dur non ? (sauf que vous, vous devez écrire $\int_0^{+\infty} = \lim_{\Lambda\to+\infty}\int_0^{\Lambda}$, etc...alors que les étudiants de DEA disposent d'outils plus puissants.)

162. Calculer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la valeur de l'intégrale impropre $I_n = \int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,dt$. On fera une intégration par parties.

163. Déterminer une primitive de la fonction $1/(t^3+1)$ $(t \neq -1)$.

164. Problème. Dans un changement de variable pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on procède le plus souvent en écrivant $t = \psi(x)$, etc...Mais il est parfois plus commode de faire un changement de variable du genre $x = \phi(u)$. Montrer que la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)\,du\ , \tag{1}$$

est valable pour toute fonction f continue sur un intervalle I contenant $[a,b]$ et toute fonction ϕ de classe C^1 sur un intervalle J à valeurs dans I et tout choix de $\alpha \in J$ avec $\phi(\alpha) = a$ et tout choix de $\beta \in J$ avec $\phi(\beta) = b$. Dans ce genre de changement de variable, on n'exige donc nullement que ϕ soit une bijection. Pour la démonstration on montrera que $u \mapsto \int_a^{\phi(u)} f(x)\,dx$ est une primitive sur J de $u \mapsto f(\phi(u))\phi'(u)$.

165. Problème. La formule de changement de variable :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\psi^{-1}(t))\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))}\,dt\ , \tag{2}$$

avec ψ de classe C^1 et ψ' partout > 0 (ou partout < 0) a été prouvée en cours uniquement pour les fonctions f continues. En suivant les étapes ci-dessous, établir qu'elle vaut pour toute fonction f R-intégrable. On supposera que l'on est dans le cas : ψ' partout > 0. On notera $F(t) = f(\psi^{-1}(t))\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))}$. Si g est R-intégrable sur $[a,b]$ on pose $I(g) = \int_a^b g(x)\,dx$ et si G est R-intégrable sur $[\psi(a),\psi(b)]$ on pose $J(G) = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} G(t)\,dt$.

1. Donner une primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))}$ et en déduire que (2) est valable lorsque f est constante.
2. En déduire que (2) est valable lorsque f est constante par morceaux (fonction en escalier). On précisera pourquoi $f(\psi^{-1}(t))\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))}$ est R-intégrable (rép. : elle est continue par morceaux).

3. Soit $\epsilon > 0$ et soient u et U deux fonctions en escalier avec $u \leq f \leq U$ et $\int_a^b (U(x) - u(x))\,dx \leq \epsilon$. On pose $v(t) = u(\psi^{-1}(t))\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))}$ et $V(t) = U(\psi^{-1}(t))\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))}$. Montrer $v \leq F \leq V$, $J(V) = I(U)$, $J(v) = I(u)$ et $0 \leq J(V) - J(v) \leq \epsilon$.
4. Remarque générale : soit $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction R-intégrable. Par ce qui a été affirmé en cours pour tout $\epsilon > 0$ il existe k et h en escalier avec $k \leq g \leq h$ et $\int_a^b (h(x) - k(x))\,dx \leq \epsilon$. Montrer $\int_c^d (g(x) - k(x))\,dx \leq \epsilon$ et $\int_c^d (h(x) - g(x))\,dx \leq \epsilon$.
5. Justifier l'existence de $w : [\psi(a), \psi(b)] \to \mathbb{R}$ en escalier avec $w \leq v$ et $J(v) - J(w) \leq \epsilon$, ainsi que de W en escalier avec $W \geq V$ et $J(W) - J(V) \leq \epsilon$. En déduire que F est R-intégrable sur l'intervalle $[\psi(a), \psi(b)]$.
6. Montrer $0 \leq J(F) - J(v) \leq \epsilon$, et $0 \leq I(f) - I(u) \leq \epsilon$, et en déduire $|J(F) - I(f)| \leq \epsilon$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire conclure la preuve que (2) est valide.

166. Problème. Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions R-intégrables.

1. On suppose tout d'abord f à valeurs positives ou nulles. Comme f est bornée, on peut choisir $M > 0$ avec $\forall x\ 0 \leq f(x) \leq M$. Soit $\epsilon > 0$ et soient u et U deux fonctions en escalier avec $u \leq f \leq U$ et $\int_a^b (U(x) - u(x))\,dx \leq \epsilon$. Montrer que quitte à modifier u et U on peut supposer $0 \leq u$ et $U \leq M$.
2. Montrer qu'alors on a $U^2 - u^2 \leq 2M \cdot (U - u)$.
3. En déduire que f^2 est R-intégrable.
4. Dans le cas général écrire $f^2 = |f|^2$ et en déduire que f^2 est R-intégrable.
5. Montrer que $(f + g)^2$ est R-intégrable. En déduire que fg est R-intégrable.
6. Soit $P = AX^2 + BX + C \in \mathbb{R}[X]$. On suppose $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \geq 0$. Montrer $B^2 \leq 4AC$. On n'oubliera pas le cas spécial $A = 0$. Que vaut B alors ?
7. En utilisant $\forall x \in \mathbb{R}\ \int_a^b (|f(t)| \cdot x + |g(t)|)^2\,dt \geq 0$ prouver l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :
$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \tag{3}$$
8. Soient u_1, u_2, …, u_N, ainsi que v_1, v_2, …, v_N des nombres réels. Prouver la forme discrète de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\sum_{1 \leq j \leq N} |u_j v_j| \leq \sqrt{\sum_{1 \leq j \leq N} u_j^2}\sqrt{\sum_{1 \leq j \leq N} v_j^2} \tag{4}$$
On pourra soit imiter l'argument précédent, soit considérer (4) comme un cas particulier de (3).
9. Expliquer pourquoi (3) est en fait conséquence de (4) (une fois que l'on sait que f^2, g^2, et fg sont R-intégrables).
10. On pose $\alpha = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$ et $\beta = \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$. Prouver (3) directement comme conséquence de $\int_a^b (\beta|f| - \alpha|g|)^2\,dt \geq 0$, au moins lorsque $\alpha\beta \neq 0$.

167. Problème. Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction à valeurs complexes on dira que f est R-intégrable si ses parties réelles $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$ imaginaires le sont. On pose alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$. On dira que $F = U + iV$ est dérivable si U et V le sont et on pose $F' = U' + iV'$. Si $F' = f$ sur $[a,b]$ on dira que F est une primitive de f.

1. Vérifier $\int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et f et g R-intégrables à valeurs complexes. On justifiera la R-intégrabilité de $\alpha f + \beta g$.
2. Montrer $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ si F est une primitive de la fonction R-intégrable à valeurs complexes f.
3. Montrer que si F est une primitive de f alors $Z \cdot F$ est une primitive de $Z \cdot f$ pour tout nombre complexe Z.
4. Vérifier que pour tout nombre complexe non nul A, la fonction $x \mapsto \exp(Ax)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto A\exp(Ax)$. On écrira $A = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et on calculera les dérivées des parties réelles et imaginaires de $\exp(Ax)$.
5. Montrer $|e^Z| = e^{\mathrm{Re}(Z)}$ pour tout nombre complexe Z.
6. Soit $A \in \mathbb{C}$. On considère l'intégrale impropre et complexe $\int_0^{+\infty} e^{-Ax}\,dx$. Montrer que cette intégrale impropre converge si et seulement si $\mathrm{Re}(A) > 0$, et qu'elle vaut alors $1/A$.
7. On admettra que si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est R-intégrable alors $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ l'est aussi. Montrer en utilisant des sommes de Riemann :
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{5}$$
8. Montrer que la formule d'intégration par parties et la formule de changement de variable marchent aussi pour les fonctions à valeurs complexes, sous les hypothèses semblables à celles dans le cas réel.

168. Problème. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 avec $\phi'' \geq 0$ (fonction convexe de classe C^2). On sait qu'alors $\phi(x) \geq \phi(x_0) + \phi'(x_0)(x - x_0)$ pour tout x_0 et tout x. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On admettra que la fonction composée $\phi(f)$ est une fonction intégrable. On pose $x_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$. En utilisant l'inégalité ci-dessus avec $x = f(t)$ et en intégrant par rapport à t montrer l'*inégalité de Jensen* :
$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(t))\,dt \tag{6}$$

Il est facile de se rappeler cette importante inégalité en visualisant la forme d'une courbe convexe et en se disant "phi d'une moyenne est en-dessous de la moyenne des phi".

Fiche 4

Version du 10 mars 2004, 16 :08 pm

Résumé du cours : notion de développement limité d'une fonction f en un point a, à l'ordre n :

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + h^n \epsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$$

(on imposera $f(a) = c_0$ autrement dit on supposera f continue au point a). Si il existe, le développement limité (sous-entendu : en puissances de $h = x - a$) est unique. La formule de Taylor-Young affirme que si $f^{(n)}(a)$ existe alors le développement limité existe avec $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, pour $0 \leq k \leq n$, $x = a + h$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x-a)$$

La formule de Taylor avec reste de Lagrange affirme que si f est $n+1$ fois dérivable dans un voisinage de a alors le reste $h^n\epsilon(h) = (x-a)^n\epsilon(x-a)$ dans la formule de Taylor à l'ordre n peut s'écrire $\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$ avec $0 < \theta < 1$ (pour $n = 0$ c'est le théorème des accroissements finis). La formule de Taylor avec reste intégral (aussi attribué à Lagrange) affirme que si f est $n+1$ fois dérivable et si $f^{(n+1)}$ est Riemann-intégrable dans un intervalle contenant a, alors dans cet intervalle :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y)\, dy$$

On a des règles pour additioner, pour multiplier, pour diviser (méthode de division suivant les puissances croissantes) et aussi pour composer (substitution) des développements limités. Lorsque l'on contrôle les restes on peut souvent (mais pas toujours, pour certaines fonctions ça ne marche pas) obtenir des représentations de $f(x)$ comme somme infinie de puissances $(x-a)^k$, $0 \leq k < +\infty$. Par exemple on a la formule de Newton (ici $a = 0$) :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \dots \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1$$

Il faut aussi connaître les développements limités à tous les ordres pour $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{Arctg}(x)$, $\log(1+x)$, et les autres fonctions simples de l'Analyse.

Si $f = F'$ possède en a un développement limité à l'ordre n alors F possède au point a un développement limité à l'ordre $n+1$ qui est obtenu en intégrant terme à terme celui de $f = F'$. Par contre si f possède un D.L. à l'ordre n au point a, rien ne garantit que f', même si cette fonction existe, possède elle aussi un D.L ; cependant si l'on sait que c'est le cas à l'ordre $n-1$ on peut l'obtenir en dérivant terme à terme celui de f. On perd un ordre de précision dans la manip. Par contre lorsque l'on passe de f à une primitive F on gagne un ordre de précision.

On utilise les développements limités en particulier pour calculer des limites ou obtenir des équivalents, pour positionner un graphe par rapport à sa tangente en un point, ou pour comparer les graphes de deux fonctions au voisinage d'un point. On peut aussi utiliser des développements limités pour déterminer des décompositions en éléments simples de fractions rationnelles.

169. Soient f et g de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$, et $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = -1$.

1. Donner les développements limités en zéro à l'ordre 2 de f et de g.
2. Déterminer les développements limités en zéro à l'ordre 2 des fonctions fg et f/g.
3. Déduire de la réponse à la question précédente les valeurs de $(fg)''(0)$ et de $(f/g)''(0)$.

170. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de $\log x$ en 10.

171. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de $\exp x$ en $\log(2)$.

172. Déterminer les développements limités à l'ordre 5 en zéro de $\mathrm{tg}x$ et de $\mathrm{th}x$.

173. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 10 de x^{-3}.

174. Déterminer le développement limité à l'ordre n de $(x^2 - 10x + 24)^{-1}$ en $x = 5$ (ind. : poser $x = 5 + h$ et simplifier).

175. Déterminer les développements limités à tous les ordres en 0 de $(x^2 + 4x + 3)^{-1}$. On commencera par décomposer en éléments simples.

176. (suite) Refaire l'exercice précédent, mais seulement pour un D.L. à l'ordre 4 en faisant une division suivant les puissances croissantes.

177. (suite) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $1/\sqrt{3+h}$. En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $1/\sqrt{x^2+4x+3}$. Vérifier qu'en élévant au carré on retrouve le résultat précédent.

178. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en zéro de $\sqrt{\frac{\sin x}{x}}$.

179. On s'intéresse au problème de la décomposition en éléments simples de $(x-1)^{-3}(x-2)^{-3}$. Déterminer les D.L. à l'ordre 2 de $(x-1)^{-3}$ en 2 ($x = 2+h$) et de $(x-2)^{-3}$ en 1 ($x = 1+h$) et expliquer pourquoi et comment cela détermine la décomposition en éléments simples de la fraction considérée.

180. Déterminer $\lim \cos(\frac{\alpha}{n})^{n^2}$. On donnera d'abord un développement limité de $\log\cos x$ en 0 à l'ordre 2 puis on en déduira $\lim_{n\to+\infty} n^2 \log\cos(\frac{\alpha}{n})$.

181. On suppose que A, B, C sont strictement positifs. Donner un équivalent de $\log\left(\frac{A^x+B^x+C^x}{3}\right)$ pour $x \to 0$. Déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}}{3}\right)^n$.

182. On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

1. La fonction F est-elle paire ? impaire ? Justifier. Est-elle continue ?
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f(x)$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $F(x)$ en 0. La fonction F est-elle dérivable en 0 ?

4. Montrer :
$$\forall x \neq 0 \qquad F'(x) = \frac{f(x) - F(x)}{x}$$
En déduire l'existence d'un développement limité à l'ordre 1, que l'on donnera explicitement, de $F'(x)$ en $x = 0$. En déduire que $F''(0)$ existe et donner sa valeur.

183. Déterminer :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

184. Déterminer un équivalent de $\exp(\sin(x)) - x - \mathrm{ch}(x)$ pour $x \to 0$.

185. Déterminer un équivalent de $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x$ pour $x \to +\infty$.

186. Donner le développement limité au point 0, à l'ordre 5 de $(1 - x)^x$.

187. Donner un équivalent pour $x \to 0$ de $\sqrt[3]{1 + 3x} - \sqrt[5]{1 + 5x}$.

188. On pose $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$.

1. Montrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Déterminer explicitement la fonction inverse $\mathrm{Argth}x$ et donner son D.L. en 0 à l'ordre n.
2. Donner des expressions simples pour les dérivées de $\mathrm{Arctg}(\mathrm{th}(x))$ et de $\mathrm{Argth}(\mathrm{tg}(x))$, en déduire les développements limités de ces deux fonctions en 0 à l'ordre 5. Déterminer un équivalent de $\mathrm{Arctg}(\mathrm{th}(x)) + \mathrm{Argth}(\mathrm{tg}(x)) - 2x$ pour $x \to 0$.

189. (difficile ?) Donner un exemple de fonction f dérivable, qui admette en 0 un D.L. à l'ordre deux, mais telle que $f''(0)$ n'existe pas.

190. (difficile ?) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral prouver la validité de la formule de Newton, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour $|x| < 1$.
$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!} x^k$$

Fiche 5

Version du 18 mars 2004, 15 :50 pm

Il est recommandé d'étudier tout d'abord ces deux exercices typiques et leurs corrigés :

191. *On considère le système d'équations linéaires, avec les inconnues* $x_1, \dots, x_5$ *et les données* y_1, y_2, y_3 *:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 + x_5 &= y_2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 &= y_3 \end{aligned}$$

1. *Déterminer après réduction de Gauss-Jordan une forme complètement réduite pour ce système. Quel est son rang ? Quelles sont les variables "pivots" et quelles sont les variables "libres" ? Quelles sont les contraintes sur les données pour la résolubilité du système ?*

   On arrange le système sous la forme d'un tableau, puis on suit la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & y_1 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 1 & y_2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 2 & y_3 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & y_3 - y_1 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + y_1 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 15 & -10 & 7y_1 - 3y_2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + y_1 \end{array}\right]$$

   Les variables pivots sont x_1 et x_3. Il y en a deux, le rang est donc 2. Les variables libres sont x_2, x_4, x_5. Il y a 1 contrainte de résolubilité qui est $0 = y_3 - y_2 + y_1$.

2. *On considère le système homogène associé. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^5$ *des vecteurs* $u = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^t$ *solutions ? Donner une base de cet espace vectoriel.*

   La dimension demandée est la dimension du noyau et elle est égale au nombre de variables libres, soit 3. On obtient une base (w_1, w_2, w_3) en calculant x_1 et x_3, grâce à la forme complètement réduite de sorte que $w_1 = [x_1\ 1\ x_3\ 0\ 0]^t$, $w_2 = [x_1\ 0\ x_3\ 1\ 0]^t$, et $w_3 = [x_1\ 0\ x_3\ 0\ 1]^t$ soient dans le noyau. Cela donne

$$w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w_2 = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. *On considère dans* $\mathbf{R}^3$ *les cinq vecteurs :*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Quelle est la dimension du sous-espace W qu'ils engendrent ? Donner une base de W. On considère le vecteur $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Montrer que w appartient à W et trouver une expression de w comme combinaison linéaire des vecteurs de la base en question.

Il s'agit de l'espace colonne associé au système. Sa dimension est égal au rang, soit 2, et on obtient une base en retenant les deux colonnes v_1 et v_3 car x_1 et x_3 sont variables pivots. La contrainte $y_3 - y_2 + y_1 = 0$ est vérifiée par w qui appartient donc à l'espace W. On aura $w = x_1 v_1 + x_3 v_3$ avec x_1 et x_3 choisis de sorte que les équations soient vérifiées avec $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ et $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 3$. Cela donne en utilisant la forme réduite obtenue à la question **1.** : $x_1 = 7y_1 - 3y_2 = -9$ et $x_3 = y_2 - 2y_1 = 3$ donc $w = -9v_1 + 3v_3$, ce qu'un calcul immédiat permet ensuite de confirmer.

192. *On considère les sous-espaces vectoriels suivants dans $\mathbf{R}^4$:*

$$E = \{u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \Big| \quad x + y + z + t = 0,\ x + 2z + t = 0,\ y - z - t = 0\}$$

et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. *Déterminer* $\dim(E)$ *et donner une base de E.*

   On résout les équations par la méthode du pivot :

$$\begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x + 2z + t = 0 \\ y - z - t = 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z - t = 0 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ t = 0 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{l} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ t = 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} x = -2z \\ y = z \\ t = 0 \end{array}$$

   Il y a une seule variable libre qui est z, donc $\dim E = 1$ et une base de E est donnée par l'unique vecteur w avec $z = 1$, soit $w = [-2 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^t$.

2. *Donner une base de F et un système minimal d'équations linéaires pour F.*

   En ce qui concerne F on applique donc la méthode des pivots pour obtenir une base extraite et un système d'équations linéaires pour F :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & y_1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -y_1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & y_2+y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & y_2+y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -y_2-y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{bmatrix}$$

Cette forme échelonnée est suffisante pour répondre aux questions et il est inutile d'aller jusqu'à la forme complètement réduite. On voit donc que la dimension de F est 3 et qu'une base est donnée par (v_1, v_2, v_3). De plus F est défini par exactement une équation qui est $y_4 = 0$ autrement dit $t = 0$ puisque dans cet exercice on utilise x, y, z, t pour désigner les coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

3. *Soit V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel V_3. On suppose* $\dim(V_1) = 1$. *Montrer que soit $V_1 \subset V_2$ soit $V_1 \cap V_2 = \{\overrightarrow{0}\}$.*

   L'espace vectoriel $V_1 \cap V_2$ est un sous-espace vectoriel de V_1. Sa dimension est donc soit 0 soit 1. Dans le premier cas on a $V_1 \cap V_2 = \{\overrightarrow{0}\}$ dans le deuxième cas, comme $(V_1 \cap V_2) \subset V_1$ et a la même dimension on a $V_1 \cap V_2 = V_1$. Mais cela signifie exactement que tout vecteur de V_1 est aussi dans $V_1 \cap V_2$, c'est-à-dire, il est aussi dans V_2. Autrement dit dans ce deuxième cas on a $V_1 \subset V_2$.

4. *Déterminer l'intersection $E \cap F$. Déterminer le sous-espace somme $E + F$. Les espaces E et F sont-ils en somme directe ?*

   Par la question précédente, et comme E est de dimension 1 on a soit $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$ soit $E \cap F = E$. On regarde donc si le vecteur $w = [-2 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^t$ déterminé à la question **1.** est ou non dans F. En fait l'équation $t = 0$ qui définit F est vérifiée par le vecteur $w = [-2 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^t$. Donc $w \in F$. Donc $E \subset F$ et ainsi $E \cap F = E$. Comme $E \subset F$ on a évidemment $E + F = F$. Les espaces E et F ne sont pas en somme directe puisque leur intersection n'est pas réduite au vecteur nul.

193. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

194. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

195. Déterminer le rang de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

196. Déterminer les contraintes de résolubilité du système :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= y_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= y_3 \\ 4x_2 - 4x_3 - x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

197. On considère pour chaque a fixé le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= a \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 9x_4 &= a^2 \end{aligned}$$

Déterminer pour quelles valeurs de a le système possède des solutions et déterminer ces solutions éventuelles.

198. Déterminer la dimension et une base de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs suivants, écrits sous forme de lignes : $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 2, 1, 0)$, $v_4 = (1, 2, 3, 2, 1)$.

199. Dans l'espace vectoriel V des polynômes à coefficients réels de dimension au plus 2, on considère les trois polynômes $P = (X-a)(X-b)$, $Q = (X-a)(X-c)$ et $R = (X-b)(X-c)$, avec $a < b < c$. Montrer que le seul polynôme de V nul en a, b, c est le polynôme nul. Montrer que P, Q, R sont linéairement indépendants. Montrer que (P, Q, R) est une base de V.

200. (suite) Exprimer explicitement les polynômes 1, X, et X^2 comme combinaisons linéaires de P, Q, R. On évaluera en a, b et c afin de déterminer les coefficients recherchés.

201. Soit K un corps et soit W un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel V sur K. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur et notons $K \cdot \overrightarrow{v}$ l'espace $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})$. On pose $W' = W + K \cdot \overrightarrow{v}$. Quelles sont les possibilités pour $\dim W'$?

202. (suite) On se donne $\overrightarrow{v_1}$, …, $\overrightarrow{v_n}$ et on suppose que $\overrightarrow{v_k} \notin W + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_j} | j < k)$ pour $1 \leq k \leq n$. On suppose que $\mathcal{B}$ est une base de W. Montrer que $(\mathcal{B}, \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ est une base de $W + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$.

203. (théorème de la base incomplète) Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une base d'un espace vectoriel V. Soit W un sous-espace vectoriel de V et soit $\mathcal{C} = (\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_m})$ une base de W. On détermine un sous-ensemble S de $\{1, \dots, n\}$ par

$$j \in S \iff \overrightarrow{v_j} \notin W + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_k}, k < j)$$

Montrer que $\mathcal{C} \cup (\overrightarrow{v_j}, j \in S)$ est une base de V.

204. (suite) expliquer concrètement comment vous appliqueriez la méthode du pivot pour compléter un système libre dans $\mathbb{R}^n$ en une base de $\mathbb{R}^n$ obtenue en y adjoignant certains vecteurs d'une base donnée de $\mathbb{R}^n$. Après avoir expliqué faites le explicitement dans le cas suivant : on demande à compléter le système libre

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

en une base de $\mathbb{R}^5$ en utilisant certains des vecteurs de la base canonique.

205. Dans cet exercice on prend $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Déterminer le rang de la matrice

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2\\1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2\\1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2\\1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Si l'on considére la matrice comme étant à coefficients réels, quel est son rang ?

206. On reprend la matrice de l'exercice précédent, toujours avec $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Déterminer des équations linéaires (en nombre minimal) pour son espace-colonne, et aussi pour son espace-ligne. Déterminer également une base de son noyau.

207. Supposons que l'on se donne une matrice rectangulaire A à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Pour chacun des corps $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ on peut voir A comme une matrice sur K, et il lui est donc associé un rang, $\mathrm{rang}_K(A)$, qui peut-être dépend du corps K. Montrer que le rang est en fait le même pour $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

208. On travaille avec les nombres complexes. Déterminer la dimension (sur $\mathbb{C}$), une base, et des équations en nombre minimal pour le sous-espace de $\mathbb{C}^4$ engendré par les colonnes :

$$\begin{bmatrix}i\\1+i\\1+2i\\-i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1+i\\-2+i\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\i\\-1-i\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i\\i\\2+i\\-i\end{bmatrix}.$$

209. On pose $j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$. Résoudre les équations en x, y, $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}x + jy + j^2z &= a\\jx + j^2y + z &= b\\j^2x + y + jz &= c\end{aligned}$$

Quelles sont les contraintes de résolubilité ?

210. On pose $j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$. Résoudre les équations en x, y, $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} x + jy + j^2 z &= a \\ x + j^2 y + jz &= b \\ x + y + z &= c \end{aligned}$$

Quelles sont les contraintes de résolubilité ?

Fiche 6

Version du 26 mars 2004, 10 :28 am

211. On travaille dans $\mathbb{R}^2$.

1. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par $\overrightarrow{v} = \left[\begin{smallmatrix}13\\17\end{smallmatrix}\right]$. Trouver une équation linéaire du type $Ay_1 + By_2 = 0$ qui soit équivalente à $\left[\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right] \in W$.
2. Soit W' le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ défini par l'équation $5x_1 + 6x_2 = 0$. Donner une base de W'.

212. Déterminer le rang, une base de l'espace colonne, une base de l'espace ligne, une base du noyau de la matrice : $A = \left[\begin{smallmatrix}1&1&1&1\\2&2&-1&-1\\3&3&0&0\end{smallmatrix}\right]$.

213. Déterminer le rang, une base de l'espace colonne, une base de l'espace ligne, une base du noyau de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\2&3&4&5&6\end{bmatrix}$$

214. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\overrightarrow{v_1} = \left[\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right]$ et $\overrightarrow{v_2} = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right]$. Trouver une équation linéaire du type $Ay_1 + By_2 + Cy_3 = 0$ qui soit équivalente à $\left[\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right] \in W$. On rappelle que la façon la plus efficace de faire cela est d'appliquer la méthode des pivots à la matrice étendue $\left[\begin{smallmatrix}1&1&y_1\\2&0&y_2\\3&-1&y_3\end{smallmatrix}\right]$ (remarque : il y a une autre méthode qui donne directement le résultat mais elle repose sur la théorie des déterminants, qui n'est abordée qu'après le partiel).

215. Cet exercice est la suite du précédent. Soit W' le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\overrightarrow{v_3} = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right]$ et $\overrightarrow{v_4} = \left[\begin{smallmatrix}3\\2\\2\end{smallmatrix}\right]$.

1. Trouver une équation linéaire du type $A'y_1 + B'y_2 + C'y_3 = 0$ qui soit équivalente à $\left[\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right] \in W'$.
2. On considère l'espace vectoriel $W \cap W'$, intersection de W et de W'. En utilisant le résultat de l'exercice précédent et celui de la question précédente, donner des équations linéaires en y_1, y_2, y_3 équivalentes à l'appartenance à cet espace du vecteur $\overrightarrow{u} = \left[\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right]$.
3. Donner une base de l'espace vectoriel $W \cap W'$.

216. On considère le sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations :

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Donner une base de W.

217. Cet exercice prolonge le précédent.

1. On considère le sous-espace vectoriel W' de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   Donner une base de W'.

2. On considère l'espace $W + W'$. Les espaces W et W' sont-ils en somme directe ?
3. Déterminer une équation linéaire définissant le sous-espace $W + W'$ de $\mathbb{R}^3$.

218. On travaille dans $\mathbb{R}^2$, et on note e_1 et e_2 les vecteurs de sa base canonique.

1. Soit $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Déterminer A^{-1}.
2. Soit $v_1 = e_1 + e_2$ et $v_2 = 5e_1 + 4e_2$. En utilisant la réponse précédente, montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et exprimer e_1 et e_2 en fonction de v_1 et v_2.
3. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $\phi(v_1) = v_2$ et $\phi(v_2) = v_1$. Calculer $\phi(e_1)$ et $\phi(e_2)$, d'abord comme combinaisons linéaires de v_1 et de v_2, puis comme combinaisons linéaires de e_1 et de e_2.
4. Quelle est la matrice B de ϕ dans la base canonique ? Sans calcul que vaut B^2 ? Vérifier.

219. On travaille dans $\mathbb{R}^3$, et on note e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de sa base canonique.

1. Soit $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Déterminer A^{-1}.
2. Soit $v_1 = e_1 + e_2 + 3e_3$, $v_2 = 5e_1 + 4e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + e_2 + 2e_3$. En utilisant la réponse précédente, montrer que $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées des vecteurs e_1, e_2 et e_3 dans cette base.
3. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\phi(v_1) = v_2 + v_3$, $\phi(v_2) = v_1 + v_3$, et $\phi(v_3) = v_1 + v_2$. Quelles sont les coordonnées de $\phi(e_1)$, $\phi(e_2)$, et $\phi(e_3)$ dans la base $\mathcal{C}$ et dans la base canonique ?
4. Quelle est la matrice A de ϕ dans la base $\mathcal{C}$? Quelle est la matrice A' de ϕ dans la base canonique ?
5. Calculer la matrice A^2 et montrer l'identité de matrices $A^2 = 2I_3 + A$. Sans calculer explicitement $(A')^2$ montrer que A' vérifie également $(A')^2 = 2I_3 + A'$.
6. Confirmer par le calcul explicite.

Fiche 7

Version du 6 avril 2004, 17 :14 pm

Dorénavant on ne met plus nécessairement des flèches sur les vecteurs. On s'autorise l'écriture, pour un vecteur u dans un espace V muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$: $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour signifier $u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ (il vaudrait mieux : $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$, avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$). Si par exemple $V = \mathbb{R}^n$, on a pour le vecteur colonne $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ l'autre écriture $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Par contre la ligne $[x_1 \ \ldots \ x_n]$ est autre chose : c'est le transposé u^t de u, qui appartient à l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$ des lignes avec n composantes. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^{1,n}$ on pourrait aussi écrire $u^t = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, mais comme cela engendre un conflit avec la notation précédente, on préfèrera s'en abstenir.

220. On travaille dans $\mathbb{R}^2$ avec sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

1. Soit $f_1 = ae_1 + be_2$, non nul. Donner un vecteur f_2, le plus simple possible, qui engendre la droite perpendiculaire à f_1.
2. On pose $f_1 = e_1 + 2e_2$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur la droite engendré par le vecteur f_1.
3. Quelle est la matrice (dans la base canonique) de la symétrie orthogonale ϕ par rapport à cette même droite ?
4. On pose $g_1 = 2e_1 + e_2$. Quelle est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale ψ par rapport à la droite engendrée par g_1.
5. Quelle est la tangente de l'angle de la rotation $\psi \circ \phi$? et de la rotation $\phi \circ \psi$?

221. On rappelle la notion de produit scalaire $u \cdot v$ sur $\mathbb{R}^2$, $u \cdot v = xx' + yy'$ si $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$. On a utilisé les coordonnées dans la base canonique (e_1, e_2).

1. Soit ϕ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice :
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
Que dit-on de la matrice A lorsque $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ et $ab + cd = 0$? Quelle est la propriété de l'endomorphisme ϕ équivalente à ces conditions ? (ces deux questions sont des questions de cours).
2. On considère la matrice transposée :
$$A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \ ,$$
et l'on note ψ l'endomorphisme associé. Prouver la formule :
$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2 \quad u \cdot \phi(v) = \psi(u) \cdot v$$
On pourra remarquer que par bilinéarité il suffit d'établir la formule lorsque u et v sont l'un des deux vecteurs de la base canonique, soit 4 cas à vérifier.

3. On suppose que la matrice A est une matrice orthogonale (c'est-à-dire vérifiant les conditions de la question 1). En utilisant :
$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2 \quad \phi(u) \cdot \phi(v) = u \cdot v \ ,$$
et la formule de la question précédente, montrer :
$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2 \quad \psi(\phi(u)) \cdot v = u \cdot v \ ,$$
et en déduire $\psi \circ \phi = id$ (où l'on a noté id l'endomorphisme identité).
4. On rappelle l'implication $\psi \circ \phi = id \Rightarrow \phi \circ \psi = id$. En déduire $A \cdot A^t$, puis montrer $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$ et $ac + bd = 0$.

222. Dans $\mathbb{R}^2$, et l'on note x et y les coordonnées. On fait une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $3x + 4y = 0$, puis une rotation avec l'angle $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta) = \frac{4}{3}$, puis une projection orthogonale sur la droite engendré par le vecteur $(1, 1)$. Quel est le noyau de ce morphisme ? (ah, ah , ah : on rigole moins maintenant, n'est-ce pas ?).

223. Comme vu ou devant être prochainement vu en cours on a dans $\mathbb{R}^3$ aussi un produit scalaire :
$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow u \cdot v = xx' + yy' + zz'$$
Ce produit scalaire est bilinéaire en u et v. On a $u \cdot v = v \cdot u$. De plus on appelle norme de u et l'on note $\|u\|$ la racine carrée de $u \cdot u = x^2 + y^2 + z^2$. Deux vecteurs sont dits perpendiculaires si leur produit scalaire est nul.

1. Soit u et v deux vecteurs lineairement independants. On pose :
$$w = v - \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$
Montrer que w est non nul et est perpendiculaire à u.
2. On pose $e = \frac{1}{\|u\|} u$ et $f = \frac{1}{\|w\|} w$ (question : pourquoi les dénominateurs ne sont-ils pas nuls ?). Montrer : $e \cdot e = 1$, $e \cdot f = 0$, $f \cdot f = 1$.
3. Montrer qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ avec $v = xe + yf$. Montrer qu'il existe $R > 0$ et θ avec $v = (R \cos\theta)e + (R \sin\theta)f$. Que vaut R ?
4. Montrer la formule $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$ et en déduire en particulier l'inégalité $-\|u\|\|v\| \leq u \cdot v \leq +\|u\|\|v\|$.

224. Soit $n \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme 1. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie selon :
$$v \mapsto \phi(v) = -v + 2(v.n)n$$
Et soit ψ l'application définie selon :
$$v \mapsto \psi(v) = v - 2(v.n)n$$
Autrement dit $\psi = -\phi$.

1. Montrer que ϕ est une application linéaire. Que fait ϕ sur la droite engendrée par n ? et sur le plan perpendiculaire à n ? Comment appelle-t-on ϕ ? Quel est le déterminant de ϕ ? (on rappelle que par définition il s'agit du déterminant de la matrice représentant ϕ dans une base quelconque.)
2. Montrer que ψ est une application linéaire. Quelle est l'interprétation géométrique de l'action de ψ ? Quel est le déterminant de ψ ?

225. On considère la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ de la matrice A.
2. Quelles sont les valeurs propres de A ?
3. Pour chacune de ses valeurs propres donner une base de l'espace propre associé.
4. Comment appelle-t-on géométriquement l'action de A ?

226. On travaille dans $\mathbb{R}^3$ avec coordonnées x, y, z. On considère les matrices

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 4 & -7 & 4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{9}M = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 4 & -7 & 4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Montrer $\det(M) = 729$ et $\det(R) = 1$.
2. Calculer la somme des carrés pour chaque colonne de M ainsi que les produits scalaires entre colonnes. Que peut-on dire de la matrice R ?
3. Montrer que les vecteurs tels que $Mu = 9u$ forment un espace vectoriel de dimension 1, donner un tel $u_0 = (A, B, C)$ à coefficients entiers les plus petits possibles.
4. Prouver que le plan d'équation $Ax + By + Cz = 0$ est invariant par R.
5. Trouver dans ce plan deux vecteurs à coefficients entiers v et w mutuellement perpendiculaires et tels que (u, v, w) forment un trièdre direct.
6. Déterminer le cosinus et le sinus de l'angle de la rotation autour de l'axe $\mathbb{R}u$, que représente la matrice R.

227. Calculer par simplification de lignes et de colonnes quelques déterminants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & -8 & -1 \\ 1 & 16 & 16 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

228. Soient α et β deux nombres complexes. Soit $d_n(\alpha, \beta)$ le déterminant de la matrice $n \times n$ formée en mettant $\alpha + \beta$ partout sur la diagonale, $\alpha\beta$ partout sur la petite diagonale immédiatement au-dessus, et 1 sur la petite diagonale en-dessous de la diagonale principale (et 0 partout ailleurs). Par exemple :

$$d_4(\alpha,\beta) = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Calculer d_2 et d_3. Établir une relation de récurrence à deux crans sur les d_n. Établir par récurrence sur n la formule :

$$d_n(\alpha,\beta) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

Que vaut $d_n(\alpha,\alpha)$?

229. (suite) Soit $D_n(a,b,c)$ le déterminant de la matrice $n \times n$ avec a partout sur la diagonale, b partout sur la petite diagonale un cran en-dessous, c sur la petite diagonale un cran au-dessus, et 0 partout ailleurs. En se ramenant à l'exercice précédent déterminer $D_n(a,b,c)$. Que vaut en particulier $D_n(2,1,1)$?

230. Pour a, b, c fixé : soit $E_n(X)$ le déterminant de la matrice $n \times n$ avec $a+X$ partout sur la diagonale, $b+X$ partout au-dessus de la diagonale, et $c+X$ partout en-dessous de la diagonale. En utilisant la multilinéarité et l'antisymétrie du déterminant par rapport aux colonnes, établir que E_n est un polynôme de degré (au plus 1) en X. Que valent $E_n(-b)$ et $E_n(-c)$? En déduire la valeur de $E_n(0)$ lorsque $b \neq c$. Finalement donner la valeur du déterminant $E_n(0)$ lorsque $b = c$ (pour cette dernière question on supposera que a et b sont réels, on prendra $c = b + \epsilon$ et on fera $\epsilon \to 0$.)

Université des Sciences et Technologies de Lille **U.F.R. de Mathématiques**

Année 2003-2004 – MIAS (première année)

2^e^ semestre – Sections 1 et 2

Fiche 8

Version du 5 mai 2004, 9 :00 am

Cette fiche comporte des exercices sur des équations différentielles linéaires, du premier ordre ou du second ordre, et sur des équations différentielles à variables séparées (ou séparables). De plus j'ai inclus plusieurs feuilles aimablement fournies par des collègues, sur la notion de "champ des tangentes" (on dit aussi "champ des directions" ou "champ de vecteurs") associé à l'équation $y' = F(x, y)$. Ces dessins permettent de développer l'intuition sur le comportement qualitatif des solutions d'équations différentielles du premier ordre.

Sauf mention exprès les solutions demandées sont les solutions à valeurs réelles, mais on peut utiliser dans des calculs intermédiaires les solutions à valeurs complexes, si besoin. Par ailleurs on précisera bien sur quels intervalles on a défini les solutions en question.

231. Résoudre $y' + y = 1$, $y' + y = \exp(x)$, $y' + y = \exp(-x)$.

232. Déterminer la solution à $y' + y = x$ qui prend la valeur 2 en 1.

233. Déterminer la solution de $y' - 3x^2 y = 0$ vérifiant $y(1) = 2e$. Trouver une solution particulière de l'équation $y' - 3x^2 y = \exp(x^3 + x)$.

234. Trouver une solution particulière à $y' + 5y = 1$, à $y' + 5y = e^x$, à $y' + 5y = e^{-5x}$.

235. Trouver toutes les solutions à $y' + y = \sin(x)$ qui restent bornées sur $\mathbb{R}$ tout entier.

236. Résoudre $xy' = 3y + x$: on déterminera toutes les solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Existe-t-il une solution avec $y(1) = 1$ et $y(-1) = -2$?

237.

1. Déterminer les solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 y' - (2x + 1)y = 0$.
2. Existe-t-il une solution vérifiant $y(-1) = 1$? et une solution vérifiant $y(1) = 1$?
3. Trouver une solution particulière polynomiale de degré au plus deux à l'équation $x^2 y' - (2x + 1)y = x^2$.
4. Déterminer les solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de $x^2 y' - (2x + 1)y = x^2$ telles que $y(1) = 1$.

238.

1. Montrer que $y = \sin(x)$ est solution particulière de l'équation $\cos(x)y' + \sin(x)y = 1$.
2. On considère l'équation homogène $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$. La résoudre sur chaque intervalle $I_N =]-\frac{\pi}{2} + N\pi, +\frac{\pi}{2} + N\pi[$.
3. Déterminer toutes les solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x)y' + \sin(x)y = 1$.

239. On considère l'équation $x(1 - x)y' = (1 - 2x)y$. Déterminer toutes les solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Faites-en de même pour l'équation $x(1 - x)y' = 2(1 - 2x)y$.

240. On considère l'équation $(x+1)(x-2)y' = 3(x-1)y$. Déterminer toutes les solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

241. On considère l'équation différentielle : $xy' - (x+1)y = x^2$.

1. La résoudre sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

242. On considère une équation différentielle

$$y' + y = g(x)\ e^{-x}$$

avec une certaine fonction continue donnée $g(x)$, définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

1. Déterminer l'unique solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$. Indication : on cherchera y sous la forme $y = k(x)e^{-x}$ avec une fonction $k(x)$ inconnue.
2. On suppose que la fonction g est bornée : $\exists M\ \forall x\ |g(x)| \leq M$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle vérifie : $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

243.

1. Déterminer l'unique fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = a$, $y'(0) = b$ et $y'' + 3y' + 2y = 0$, où a et b sont des constantes données.
2. Trouver toutes les solutions de $y'' + 3y' + 2y = e^x$.
3. Trouver une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$.
4. Trouver une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{ch}(x)$.
5. Trouver une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = x^2$.

244.

1. Déterminer les solutions (à valeurs réelles) sur $\mathbb{R}$ de $y'' - 2y' + 2y = 0$.
2. Trouver une solution particulière à : $y'' - 2y' + 2y = \sin(x)$.
3. Déterminer la solution de l'équation $y'' - 2y' + 2y = \sin(x)$ qui vérifie $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

245. Trouver une solution particulière complexe de l'équation $y'' + y = e^{ix}$, et en déduire une solution particulière réelle de $y'' + y = \cos(x)$ et de $y'' + y = \sin(x)$. Plus généralement donner une solution particulière de $y'' + y = \sin(x - \varphi)$.

246. Trouver une solution particulière complexe de $y'' + y' + y = e^{2ix}$ et en déduire une solution particulière réelle de $y'' + y' + y = \sin(2x)$.

247. On considère une équation différentielle $y'' = V(x)y$, avec une certaine fonction $V(x)$. Soit y_1 une solution de classe C^2 sur un intervalle $I =]-\gamma, +\gamma[$; on suppose que $y_1 > 0$ sur I.

1. Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur la fonction w pour que wy_1 soit aussi solution ? Montrer que cette condition nécessaire et suffisante est que w soit un multiple d'une primitive de $\frac{1}{y_1^2}$.

2. On note y_2 la fonction $x \mapsto y_1(x) \int_0^x \frac{1}{y_1(t)^2}\, dt$. Montrer que les solutions de $y'' = V(x)y$ sur I sont les combinaisons linéaires $Ay_1 + By_2$ et que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.
3. On considère deux solutions y et z. Que peut-on dire de leur Wronskien $W(y,z) = yz' - y'z$ (calculer la dérivée) ? Que vaut le Wronskien de y_1 et de y_2 ?
4. On se donne une solution y sur I. Montrer qu'il existe au plus un $x_0 \in I$ avec $y(x_0) = 0$. (raisonner par l'absurde en montrant que si $y = Ay_1 + By_2$ a deux zéros $x_0 \neq x_1$ alors $A = B = 0$).
5. On suppose pour conclure que la fonction $V(x)$ est la constante -1. Dans ce cas on peut prendre $y_1 = \cos(x)$ (et $I =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$). La fonction y_2 est solution de $y'' + y = 0$, elle est nulle en $x = 0$, et son Wronskien avec $y_1 = \cos(x)$ vaut 1. En déduire $y_2 = \sin(x)$. Que vaut $\int_0^x \frac{1}{\cos^2(t)} dt$?

248. Résoudre $y' = y$, $y' = y^2$, $y' = y^3$, $y' = y^n$ ($n \in \mathbb{N}$). On précisera les intervalles maximaux de définition, suivant la valeur de $y(0)$.

249. Résoudre $y' = e^{-x}y$, $y' = e^{-x}y^2$, $y' = e^{-x}y^3$, $y' = e^{-x}y^n$ ($n \in \mathbb{N}$). On précisera les intervalles maximaux de définition, suivant la valeur de $y(0)$.

250. Résoudre $y' = y(1-y)$, en précisant suivant la valeur de $y(0)$ l'intervalle maximal de définition de y.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1$^{\text{ère}}$ année - Mathématiques
Sections 1, 2, 3 et 4

Partiel, son Corrigé, Examen de janvier, Examen de septembre pour le premier semestre MIAS1, année 2003/2004.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS $1^{\text{ère}}$ année - Mathématiques
Sections 1, 2, 3 et 4
Devoir surveillé du 15 novembre 2003
Durée : 2 heures. SANS DOCUMENT NI CALCULATRICE.

Avertissement : on insiste sur la nécessité de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, pour justifier les réponses. Le barême donné a seulement une valeur indicative.

Note : les deux écritures $x \equiv y \mod (N)$ et $x \equiv y\ [N]$ ont la même signification.

Exercice 1 (2 points)

Résoudre l'équation diophantienne en x et y dans $\mathbb{Z}$: $10x - 55y = 15$.

Exercice 2 (4 points)

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Justifier les réponses.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $f(n) = n + 1$.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par : $g(n) = |n|$.
3. $h : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par : $h(n, m) = 2^n(2m + 1)$

Exercice 3 (5 points)

1. Quelles sont les factorisations en nombres premiers de 23 et de 80 ? Que valent $\mathrm{pgcd}(23, 80)$ et $\mathrm{ppcm}(23, 80)$?
2. Trouver u et v avec $23u + 80v = 1$.
3. Déterminer tous les $x \in \mathbb{Z}$ avec $x \equiv 1\ [23]$ et $x \equiv 2\ [80]$.

— **Tournez la page** —

Exercice 4 (6 points)

On admettra que le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$. Soit $H = \{a+b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que H, muni de l'addition, est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Montrer que $]0, +\infty[$, muni de la multiplication, est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
3. Soit $x \in H$. Montrer qu'il existe un <u>unique</u> couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.
4. Soit $f : H \to]0, +\infty[$ l'application définie par $f(a + b\sqrt{2}) = 3^{a+b}$.
   (a) Montrer que f est un morphisme de groupes.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 5 (3 points)

Soient a et b deux entiers ≥ 1.
Dans $\mathbf{Z}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y$ si $\Big(x \equiv y \mod (a)$ et $x \equiv y \mod (b)\Big)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer : $x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \mod (\mathrm{ppcm}(a, b))$.

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1$^{\text{ère}}$ année - Mathématiques
Sections 1, 2, 3 et 4
Devoir surveillé du 15 novembre 2003
Durée : 2 heures. SANS DOCUMENT NI CALCULATRICE.

CORRIGÉ

Note : les deux écritures $x \equiv y \mod (N)$ et $x \equiv y\ [N]$ ont la même signification.

Exercice 1

Résoudre l'équation diophantienne en x et y dans $\mathbb{Z}$: $\quad 10x - 55y = 15$.

Corr. : Remarque : la méthode étant enseignée en cours, il n'était pas nécessaire d'en justifier à nouveau toutes les étapes. Le pgcd de 10 et 55 est 5. Le terme de droite 15 est un multiple de 5 : il y aura bien des solutions. On divise par 5 pour obtenir l'équation équivalente $2x - 11y = 3$. On cherche tout d'abord une solution particulière (x_0, y_0). Pour ce faire commençons par appliquer l'algorithme d'Euclide à 11 et 2 : $11 = 5 \times 2 + 1$ donc $11 - 5 \times 2 = 1$. On multiplie par 3 ce qui donne $3 \times 11 - 15 \times 2 = 3$. Ainsi $(x_0, y_0) = (-15, -3)$ est solution particulière. Les couples solutions sont donc les couples (x, y) de la forme $(-15 + 11k, -3 + 2k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Justifier les réponses.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $f(n) = n + 1$.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par : $g(n) = |n|$.
3. $h : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par : $h(n, m) = 2^n(2m + 1)$

Corr. :

1. Si $f(n) = f(n')$ alors $n + 1 = n' + 1$ donc $n = n'$. Ainsi f est injective. Mais f n'est pas surjective car $\forall n \in \mathbb{N}\ f(n) \geq 1$ donc 0 n'a pas d'antécédent. Elle n'est donc pas bijective.
2. Comme $g(1) = 1 = g(-1)$ l'application g n'est pas injective. Par contre elle est surjective puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n = g(m)$ avec m choisi égal à n. L'application g n'étant pas injective n'est pas bijective.
3. Cette application est injective : supposons $2^{n'}(2m' + 1) = 2^n(2m + 1)$. Comme le nombre entier $2m + 1$ est impair il n'a aucun diviseur premier en commun avec $2^{n'}$, le seul diviseur premier possible de $2^{n'}$ étant 2 (si $n' = 0$ il n'y a même pas de diviseur premier du tout). Bref, $2m + 1$ et $2^{n'}$ sont premiers entre eux. Par le théorème de Gauss comme $2^{n'}$ divise le produit $2^n(2m + 1)$, c'est que $2^{n'}$ divise 2^n,

donc $2^{n-n'}$ est entier, c'est-à-dire $n \geq n'$. Comme la situation est symétrique (on refait le raisonnement avec 2^n au lieu de $2^{n'}$) on a aussi $n' \geq n$. Donc $n' = n$. Donc $2m' + 1 = 2m + 1$, ce qui implique $m' = m$.

Le petit piège maintenant c'est que h n'est pas surjective puisque $\forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\ \ 2^n(2m + 1) \neq 0$. Donc 0 n'a pas d'antécédent (par contre tous les autres ont un unique antécédent). L'application h n'est donc pas bijective.

Exercice 3

1. Quelles sont les factorisations en nombres premiers de 23 et de 80 ? Que valent $\mathrm{pgcd}(23, 80)$ et $\mathrm{ppcm}(23, 80)$?
2. Trouver u et v avec $23u + 80v = 1$.
3. Déterminer tous les $x \in \mathbb{Z}$ avec $x \equiv 1\ [23]$ et $x \equiv 2\ [80]$.

Corr. :

1. 23 est un nombre premier (il n'est divisible ni par 2, ni par 3 qui sont les seuls nombres premiers de carrés plus petits que 23) et $80 = 8 \times 10 = 16 \times 5 = 2^4 \cdot 5$. Comme le nombre premier 23 ne divise pas 80 il est premier avec lui et $\mathrm{pgcd}(23, 80) = 1$ et $\mathrm{ppcm}(23, 80) = 23 \times 80 = 1840$.
2. On ne demandait qu'une solution particulière, pas toutes les solutions (mais il est vrai que connaître toutes les solutions était utile pour la question suivante, dans une méthode un peu différente que celle choisie dans ce corrigé). On suit l'algorithme d'Euclide : $80 = 3 \times 23 + 11$, $23 = 2 \times 11 + 1$. Donc $11 = 80 - 3 \times 23$ et $1 = 23 - 2 \times (80 - 3 \times 23) = 7 \times 23 - 2 \times 80$. On peut donc prendre $u = 7$ et $v = -2$.
3. On cherche d'abord une solution particulière x_0. On l'obtiendra sous la forme $x_0 = A + 2B$ si A vérifie $A \equiv 1\ [23]$ et $A \equiv 0\ [80]$ tandis que B vérifie $B \equiv 0\ [23]$ et $B \equiv 1\ [80]$. Par la question précédente on peut prendre $A = 80v = -160$ et $B = 23u = 161$. Cela nous donne $x_0 = -160 + 2 \times 161 = 162$. Pour que x soit solution il est nécessaire et suffisant que $x - x_0$ soit divisible à la fois par 23 et par 80 ce qui équivaut au fait que $x - x_0$ soit multiple de $\mathrm{ppcm}(23, 80) = 1840$. Les $x \in \mathbb{Z}$ recherchés sont donc ceux de la forme $162 + 1840k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4

On admettra que le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$. Soit $H = \{a + b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que H, muni de l'addition, est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Montrer que $]0, +\infty[$, muni de la multiplication, est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
3. Soit $x \in H$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.
4. Soit $f : H \to]0, +\infty[$ l'application définie par $f(a + b\sqrt{2}) = 3^{a+b}$.
   (a) Montrer que f est un morphisme de groupes.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Corr. :

1. Pour montrer qu'un sous-ensemble H d'un groupe $(G, *)$ est un sous-groupe, il suffit de montrer deux choses :
   (a) H est non-vide.
   (b) Si h et h' sont dans H alors $h * (h')^{-1}$ est aussi dans H.

   Souvent la façon la plus simple d'établir (1a) est de vérifier que l'élément neutre de G est dans le sous-ensemble H, car de toute façon si H se trouve être un sous-groupe son élément neutre coïncide obligatoirement avec celui de G. Par ailleurs en ce qui concerne (1b) on peut aussi montrer séparément la stabilité de H sous la loi $*$ et par le passage à l'inverse. Venons-en maintenant à notre $H = \{a + b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$. Il est non-vide car $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ est dans H. Si $h = a + b\sqrt{2}$ et $h' = a' + b'\sqrt{2}$ alors $h + (-h') = a + b\sqrt{2} - a' - b'\sqrt{2} = (a - a') + (b - b')\sqrt{2}$ avec $a - a'$ et $b - b'$ dans $\mathbb{Z}$ donc $h - h' \in H$. Cela établit que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Notons $K =]0, +\infty[$. Cet ensemble est non-vide et si $a \in K$ et $b \in K$ alors $a \times b^{-1} = a/b$ est bien aussi dans K puisque $a > 0$ et $b > 0$ donc $a/b > 0$. Donc K est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
3. Soit $x \in H$. Supposons $x = a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$. Si l'on avait $b \neq b'$ on pourrait alors en déduire $a - a' = (b' - b)\sqrt{2}$ puis $\frac{a-a'}{b'-b} = \sqrt{2}$ et donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Or l'énoncé nous dit d'admettre $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc c'est que $b' = b$. Mais alors on a aussi $a = a'$. Le couple (a, b) avec $x = a + b\sqrt{2}$ est donc unique, ce qu'il fallait établir.
4. Soit $f : H \to]0, +\infty[$ l'application définie par $f(a + b\sqrt{2}) = 3^{a+b}$. On remarque que c'est l'unicité de (a, b) qui autorise à définir f ainsi.
   (a) Pour montrer que f est un morphisme de groupes il suffit de montrer : d'abord bien sûr que $f(h)$ est bien un élément de $]0, +\infty[$ pour tout $h \in H$, ce qui est vrai, puis surtout que $f(h + h') = f(h)f(h')$ pour tout h et h' dans H (on notera bien que dans H on a l'addition comme loi de groupe et dans $]0, \infty[$ on a la multiplication). Ce dernier point se montre comme suit : $h = a + b\sqrt{2}$, $h' = a' + b'\sqrt{2}$ donc $h + h' = (a + a') + (b + b')\sqrt{2}$ donc $f(h + h') = 3^{(a+a')+(b+b')} = 3^{(a+b)+(a'+b')} = 3^{a+b}3^{a'+b'} = f(h)f(h')$.
   (b) Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f consiste en les $h \in H$ avec $f(h) = 1$ (puisque 1 est l'élément neutre de $(]0, +\infty[, \times)$). Or $f(h) = 1$ si et seulement si $a + b = 0$, c'est-à-dire si h est de la forme $a - a\sqrt{2} = a(1 - \sqrt{2})$, $a \in \mathbb{Z}$. L'image $\mathrm{Im}(f)$ consiste en le sous-ensemble de $]0, \infty[$ des puissances de 3 et de $1/3$, y-compris 1.
   (c) L'application f n'est pas injective puisque son noyau n'est pas réduit à l'élément neutre du groupe de départ. Elle n'est pas surjective parce que par exemple 2 n'est pas dans son image. Elle n'est donc pas bijective.

Exercice 5

Soient a et b deux entiers ≥ 1.
Dans $\mathbf{Z}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y$ si $\Big(x \equiv y \mod (a)$ et $x \equiv y \mod (b)\Big)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Montrer : $x\mathcal{R}y \iff x \equiv y \mod (\text{ppcm}(a,b))$.

Corr. :

1. – Réflexivité : on a bien $x \equiv x \mod (a)$ et $x \equiv x \mod (b)$ donc $x\mathcal{R}x$.
   – Symétrie : Si $x\mathcal{R}y$ alors $x \equiv y \mod (a)$ donc $y \equiv x \mod (a)$. De même $y \equiv x \mod (b)$. Donc $y\mathcal{R}x$.
   – Transitivité : Si $x\mathcal{R}y$ et si $y\mathcal{R}z$ alors en particulier $x \equiv y \mod (a)$ et $y \equiv z \mod (a)$ donc par transitivité de la relation d'équivalence "être congrus modulo a" on a bien $x \equiv z \mod (a)$. On montre de même $x \equiv z \mod (b)$. Donc $x\mathcal{R}z$.

   Ces trois propriétés montrent que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Pour que $x\mathcal{R}y$ il faut que a et b divisent $x-y$ donc il faut que $\text{ppcm}(a,b)$ divise $x-y$. Réciproquement si $\text{ppcm}(a,b)$ divise $x-y$ alors en particulier a divise $x-y$ autrement dit $x \equiv y \mod (a)$. De plus si $\text{ppcm}(a,b)$ divise $x-y$ alors $x \equiv y \mod (b)$ et donc si $\text{ppcm}(a,b)$ divise $x-y$ alors $x\mathcal{R}y$. Ainsi on a prouvé l'équivalence entre $x\mathcal{R}y$ et $x-y \equiv 0 \mod (\text{ppcm}(a,b))$, ou encore entre $x\mathcal{R}y$ et $x \equiv y \mod (\text{ppcm}(a,b))$.

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS $1^{\text{ère}}$ année - Mathématiques
Sections 1, 2, 3 et 4
Examen du 24 janvier 2004
Durée : 3 heures. SANS DOCUMENT NI CALCULATRICE.

Avertissement : on insiste sur la nécessité de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, pour justifier les réponses. Le barême donné a seulement une valeur indicative.

Exercice 1 (4 points)

Calculer la limite de chacune des suites définies par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \ (n \geq 1), \qquad v_n = \frac{\cos(e^n)}{n} \ (n \geq 1), \quad w_n = \frac{e^n}{n!} \ (n \geq 0).$$

Exercice 2 (5 points)

Soit

$$f : x \in [0, +\infty[\ \mapsto f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

1. Calculer la dérivée de la fontion f, et déterminer son signe suivant la valeur de x. Dessiner l'allure du graphe de f. Suivant la valeur de x quel est le signe de $f(x) - x$? (justifier).
   Soit $u_0 > 0$ et soit (u_n) la suite définie par récurrence par :
   $$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2} \ , \ (n \geq 0)$$
2. Montrer que $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ et montrer que la suite (u_n) est croissante pour $n \geq 1$.
3. En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 (5 points)

Soit $p \in]0, 1[$, fixé. On veut prouver :

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \ , \qquad \text{pour } a > 0, \ b > 0. \tag{7}$$

Soit g la fonction $u \mapsto u^p + (1-u)^p$, pour $u \in [0, 1]$.

1. Montrer
   $$(7) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall u \in]0,1[, \quad 1 \leq g(u).$$
   Ind. : prendre $u = a/(a+b)$.

—— **Tournez la page** ——

2. Montrer que la fonction g est continue sur $[0,1]$, et dérivable sur $]0,1[$ et calculer g'.
3. Montrer pour $0 < u < 1$: $\quad g'(u) > 0 \iff \left(\frac{u}{1-u}\right)^{p-1} > 1$.
4. Montrer pour $0 < u < 1$: $\quad g'(u) > 0 \iff u/(1-u) < 1 \iff 0 < u < \frac{1}{2}$.
   On rappelle que l'on a supposé $0 < p < 1$.
5. En déduire que la fonction g est croissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{1}{2}, 1[$ et conclure la preuve de (7).

Exercice 4 (4 points)

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable de dérivée continue) sur $[a,b]$.
   Montrer que la fonction dérivée f' est bornée sur $[a,b]$, puis qu'il existe un réel $M > 0$ tel que :
$$\forall x, y \in [a,b], \qquad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$
2. Soit $a > 0$. Montrer que
$$\forall x, y \in [-a,a], \qquad |x\cos(x) - \sin(x) - y\cos(y) + \sin(y)| \leq a|x-y|.$$

Exercice 5 (4 points)

Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{-i\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \mapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Prouver
$$f(z) - \overline{f(z)} = -4i\,\frac{\mathbf{Re}(z)}{|z+i|^2},$$
   et en déduire : $\qquad f(z) \in \mathbb{R} \iff \mathbf{Re}(z) = 0$.
   On rappelle que la notation $\mathbf{Re}(z)$ désigne la partie réelle x du nombre complexe $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.
3. Prouver $\quad |f(z)| = 1 \iff z \in \mathbb{R}$.

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1$^{\text{ère}}$ année - Mathématiques
Sections 1, 2, 3 et 4
Examen du ... septembre 2004
Durée : 3 heures. SANS DOCUMENT NI CALCULATRICE.

Avertissement : on insiste sur la nécessité de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, pour justifier les réponses. Le barême donné a seulement une valeur indicative.

Exercice 1 (4 points)

1. Résoudre l'équation diophantienne en x et y dans $\mathbb{Z}$: $\quad 33x - 18y = 15 \quad (E)$.
2. En déduire les solutions (x, y) de (E) avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.
3. Résoudre la congruence : $33x \equiv 15 \mod (18)$.

Exercice 2 (4 points)

Soient a et b deux entiers tels que $(a, b) \neq (0, 0)$
et $H = a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = \{au + bv; \quad u, v \in \mathbf{Z}\}$.

1. Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$.
2. Enoncer le théorème du cours portant sur les sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$. En déduire qu'il existe un entier $d \geq 1$ tel que $H = d\mathbf{Z}$.
3. Montrer que d divise a et b. Montrer que tout entier c qui divise à la fois a et b divise d. Comment appelle-t-on d ?.

Exercice 3 (3 points)

On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :
$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante, que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 1$ et que $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$. Quel nom donne-t-on en général a deux suites ayant ces propriétés ?
2. Enoncer le théorème du cours portant sur les suites croissantes majorées et expliquer pourquoi il implique la convergence des deux suites (u_n) et (v_n). Prouver que ces deux suites admettent la même limite.

—— Tournez la page ——

Exercice 4 (4 points)

Soit $u_0 > 0$ et soit la suite définie par récurrence par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}\ ,\ (n \geq 0)$$

1. Montrer que $0 < u_n < 1$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
3. En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5 (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si} \quad \mathrm{x} \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad \mathrm{x} = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$

Exercice 6 (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = x \sin x + e^x \cos x$.
En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS $1^{\text{ère}}$ année - Mathématiques
Sections 1 et 2
Année 2003/2004 ; deuxième semestre

Le partiel, son corrigé, l'examen de juin et celui de septembre.

page suivante, S.V.P.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS $1^{\text{ère}}$ année - Mathématiques
Sections 1 et 2
Partiel du 3 avril 2004
Durée : 3 heures. SANS DOCUMENT NI CALCULATRICE.

---

1. Les exercices sont indépendants les uns des autres. 2. Soignez la rédaction et la présentation.

Exercice 1

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

En se ramenant à une somme de Riemann déterminer la valeur de $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 2

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1+h)^{-1/2}$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $(\cos x)^{-1/2}$.

Exercice 3

On pose :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 2\cos\sqrt{2}x + \cos\sqrt{3}x}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

1. Écrire un développement limité à l'ordre 4 en 0 du numérateur de cette fraction.
2. En déduire que f est continue et aussi dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?
3. En utilisant à nouveau le résultat de la question 1 donner un développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ en 0.
4. Quelle est la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point $P = (0, f(0))$, au voisinage de ce point ?

Exercice 4

1. Décomposer $\dfrac{3t-1}{(t+1)(t^2+1)}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{3t-1}{(t+1)(t^2+1)}\,dt$, pour $x > 0$.
3. Que vaut $\lim_{x \to +\infty} F(x)$?

— **Tournez la page** —

Exercice 5

On considère la matrice A, avec 3 lignes et 4 colonnes à coefficients réels :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Déterminer :

1. le rang de A,
2. une base de son espace-colonne,
3. une base de son espace-ligne,
4. une base de son noyau.

Exercice 6

Soit V un espace vectoriel (avec $\mathbb{R}$ comme corps des scalaires) de dimension 3 et soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de V. On pose :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{v_3} &= \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

De plus, on note f l'application linéaire de V vers V vérifiant :

$$f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_2},\ f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_3},\ f(\overrightarrow{v_3}) = -\overrightarrow{v_1}\ .$$

1. Montrer que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de V et déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ dans cette base.
2. En utilisant la réponse à la question précédente exprimer $f(\overrightarrow{e_1})$, $f(\overrightarrow{e_2})$, et $f(\overrightarrow{e_3})$ comme des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, et $\overrightarrow{v_3}$, puis comme des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, et $\overrightarrow{e_3}$.
3. Quelle est la matrice A de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$?
4. Que peut-on dire de l'application linéaire $g = f \circ f \circ f$? (ind. : on calculera $g(\overrightarrow{v_1})$, $g(\overrightarrow{v_2})$, et $g(\overrightarrow{v_3})$ en fonction de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, et $\overrightarrow{v_3}$.)
5. Montrer sans calculs supplémentaires : $A^6 = I_3$ (on rappelle que I_3 est une notation pour la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1$^{\text{ère}}$ année - Mathématiques
Sections 1 et 2
Partiel du 3 avril 2004
Durée : 3 heures. SANS DOCUMENT NI CALCULATRICE.

CORRIGÉ

Exercice 1

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

En se ramenant à une somme de Riemann déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Corr. : On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2(1 + (\frac{k}{n})^2)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + (\frac{k}{n})^2} ,$$

qui est une somme de Riemann pour la fonction $t \mapsto 1/(1 + t^2)$ et l'intervalle $[0, 1]$, avec la subdivision en n sous-intervalles de même longueur. Les sommes S_n convergent donc vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt$, puisque la fonction est continue, et donc Riemann-intégrable sur cet intervalle fermé $[0, 1]$. Cela donne :

$$\lim S_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2}\, dt = [\mathrm{Arctg}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 2

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1 + h)^{-1/2}$.

   Corr. : Il s'agit d'un cas particulier du développement limité

   $$(1 + h)^\alpha = 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} h^2 + h^2\epsilon(h) ,$$

   qui découle de la formule générale de Taylor-Young. Ici on a $\alpha = -\frac{1}{2}$ et l'on obtient donc :

   $$(1 + h)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - 1)}{2} h^2 + h^2\epsilon(h) = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2 + h^2\epsilon(h) .$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $(\cos x)^{-1/2}$.

Corr. : Tout d'abord on a à l'ordre 4 en 0 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon_1(x)$$

On pose donc

$$h = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon_1(x) \ ,$$

et l'on substitue dans la réponse de la question précédente, en utilisant :

$$h^2 = \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_2(x),$$

donc $h^2\epsilon(h) = x^4\epsilon_3(x)$ et au total :

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + \frac{3}{8}\frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_4(x) \\
&= 1 + \frac{x^2}{4} + (-\frac{1}{48} + \frac{3}{32})x^4 + x^4\epsilon_4(x) \\
&= 1 + \frac{x^2}{4} + (-\frac{2}{96} + \frac{9}{96})x^4 + x^4\epsilon_4(x) \\
&= 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{96}x^4 + x^4\epsilon_4(x) \ .
\end{aligned}$$

Exercice 3

On pose :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 2\cos\sqrt{2}x + \cos\sqrt{3}x}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

1. Écrire un développement limité à l'ordre 4 en 0 du numérateur de cette fraction.

Corr. : On a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon_1(x) \ ,$$

et donc :

$$\cos\sqrt{2}x = 1 - \frac{2x^2}{2} + \frac{4x^4}{24} + x^4\epsilon_2(x) \ ,$$

$$\cos\sqrt{3}x = 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{9x^4}{24} + x^4\epsilon_3(x) \ ,$$

d'où, en notant $N(x)$ le numérateur de la fraction définissant $f(x)$:

$$N(x) = (1 - 2 + 1) - \frac{(1 - 4 + 3)x^2}{2} + \frac{(1 - 8 + 9)x^4}{24} + x^4\epsilon_4(x) = \frac{x^4}{12} + x^4\epsilon_4(x) \ .$$

2. En déduire que f est continue et aussi dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

   Corr. : On peut donc écrire, pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{N(x)}{x^2} = \frac{1}{12}x^2 + x^2\epsilon_4(x)$$

   ce qui implique $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Donc f est continue en 0. Si l'on évalue $(f(x) - f(0))/x$, pour $x \neq 0$ on trouve donc : $\frac{1}{12}x + x\epsilon_4(x)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Donc $f'(0)$ existe et vaut 0.

3. En utilisant à nouveau le résultat de la question 1 donner un développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ en 0.

   Corr. : Comme $f(0) = 0$ et que pour $x \neq 0$ on a l'écriture $f(x) = \frac{1}{12}x^2 + x^2\epsilon_4(x)$ avec ϵ_4 continue en 0 et valant 0 en 0, cela implique que pour tout x on a $f(x) = \frac{1}{12}x^2 + x^2\epsilon_4(x)$. Il s'agit donc, puisque ϵ_4 est continue en 0 et vaut 0 en 0, d'un (du) développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

4. Quelle est la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point $P = (0, f(0))$, au voisinage de ce point ?

   Corr. : Le graphe est au-dessus de la tangente au voisinage de ce point. En effet si $Q = (x, y = f(x))$ est un point sur le graphe, on a $y = \frac{1}{12}x^2 + x^2\epsilon_4(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_4(x) = 0$. On peut donc choisir $\delta > 0$ tel que $0 < |x| < \delta \implies |\epsilon_4(x)| \leq \frac{1}{24}$, donc aussi $0 < |x| < \delta \implies \epsilon_4(x) \geq -\frac{1}{24}$. On a alors :

$$0 < |x| < \delta \implies y \geq \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{24}x^2 \implies y \geq \frac{1}{24}x^2 \implies y > 0\,,$$

   et par ailleurs la tangente au point $P = (0, f(0))$ est donnée par l'équation $y = 0$.

Exercice 4

1. Décomposer $\dfrac{3t-1}{(t+1)(t^2+1)}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

   Corr. : Sur $\mathbb{C}$, on a $(t+1)(t^2+1) = (t+1)(t-i)(t+i)$ et on cherche donc :

$$\frac{3t-1}{(t+1)(t-i)(t+i)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-i} + \frac{C}{t+i}$$

   On sait alors que l'on obtient A (resp. B, C) en multipliant par $t+1$ (resp. $t-i$, $t+i$), puis en substituant $t = -1$ (resp. $t = i$, $t = -i$). Cela donne

$$\begin{aligned}
A &= \frac{-4}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-4}{2} = -2\\
B &= \frac{3i-1}{(1+i)2i} = \frac{-1+3i}{-2+2i} = \frac{(-1+3i)(-2-2i)}{(-2)^2+2^2} = \frac{8-4i}{8} = 1 - \frac{1}{2}i\\
C &= \frac{-3i-1}{(1-i)(-2i)} = \frac{-1-3i}{-2-2i} = \frac{1+3i}{2+2i} = \frac{(1+3i)(2-2i)}{2^2+2^2} = \frac{8+4i}{8} = 1 + \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

On a donc obtenu :
$$\frac{-2}{t+1}+\frac{1-\frac{1}{2}i}{t-i}+\frac{1+\frac{1}{2}i}{t+i}\ ,$$
et si l'on combine les deux derniers termes pour revenir à $\mathbb{R}$ on obtient :
$$\begin{aligned}\frac{(1-\frac{1}{2}i)(t+i)+(1+\frac{1}{2}i)(t-i)}{t^2+1} &= \frac{(1-\frac{1}{2}i+1+\frac{1}{2}i)t+(1-\frac{1}{2}i-1-\frac{1}{2}i)i}{t^2+1}\\ &= \frac{2t+1}{t^2+1}\ ,\end{aligned}$$
d'où finalement :
$$\frac{3t-1}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{-2}{t+1}+\frac{2t+1}{t^2+1}$$

2. Déterminer $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{3t-1}{(t+1)(t^2+1)}\,dt$, pour $x>0$.

   Corr. : Cela vaut
$$\int_0^x \left(\frac{-2}{t+1}+\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt\ ,$$
   soit :
$$\left[-2\log(1+t)+\log(t^2+1)+\operatorname{Arctg}(t)\right]_0^x=\log\frac{x^2+1}{(x+1)^2}+\operatorname{Arctg}(x)\ .$$

3. Que vaut $\lim_{x\to+\infty}F(x)$?

   Corr. : Il s'agit de trouver
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log\frac{x^2+1}{(x+1)^2}+\operatorname{Arctg}(x)\right)\ .$$
   Le deuxième terme tend vers vers $\frac{\pi}{2}$ et en ce qui concerne le premier terme, en écrivant :
$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2}=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x})^2}\ ,$$
   on voit qu'il tend vers $\log(1)=0$. La limite demandée est donc $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5

On considère la matrice A, avec 3 lignes et 4 colonnes à coefficients réels :
$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\1&-1&1&2\\1&-1&2&3\end{bmatrix}$$

Déterminer :

1. le rang de A,
2. une base de son espace-colonne,

3. une base de son espace-ligne,
4. une base de son noyau.

Corr. : D'après le cours toutes les réponses découlent du résultat de la réduction de A suivant la méthode des pivots. Nous réduisons donc cette matrice, en modifiant ses lignes. Nous utilisons des signes $\leftrightarrow$ pour rappeler que la nouvelle matrice découle de l'ancienne, mais que l'ancienne peut aussi se reconstituer à partir de la nouvelle ; si l'on interpréte les matrices comme définissant des systèmes d'équations linéaires homogènes, les signes $\leftrightarrow$ peuvent alors se lire comme des équivalences logiques $\Leftrightarrow$.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix} &\leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\\ &\leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Il y a deux pivots : le rang de la matrice est donc 2. D'après le cours une base de son espace-colonne est donnée par les deux colonnes d'origine où sont apparus les pivots, soit ici : $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)$. La méthode des pivots ne modifie pas l'espace ligne de la matrice. Une base de l'espace-ligne est donnée par les lignes finales contenant les pivots, soit ici : $\mathcal{C} = ([1\ \ -1\ 0\ 1],\ [0\ 0\ 1\ 1])$. Finalement, pour trouver les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

du noyau de la matrice A, on utilise le fait que les équations équivalentes sont

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_4 &= 0\\ x_3 + x_4 &= 0\ ,\end{aligned}$$

soit $x_1 = x_2 - x_4$ et $x_3 = -x_4$, donc :

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2 - x_4\\x_2\\-x_4\\x_4\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Une base du noyau est donc $\mathcal{D} = ([1\ 1\ 0\ 0]^t, [-1\ 0\ \ -1\ 1]^t)$. Notez le symbole de transposition ^{t} qui me permet pour des raisons purement typographiques d'écrire ces colonnes sous la forme de lignes, car cela prend moins de place sur la page.

Exercice 6

Soit V un espace vectoriel (avec $\mathbb{R}$ comme corps des scalaires) de dimension 3 et soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de V. On pose :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_1} &= \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{v_3} &= \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}\end{aligned}$$

De plus, on note f l'application linéaire de V vers V vérifiant :

$$f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_2},\ f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_3},\ f(\overrightarrow{v_3}) = -\overrightarrow{v_1}\ .$$

1. Montrer que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de V et déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ dans cette base.

   Corr. : Tout d'abord, soit M la matrice qui exprime les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\ .$$

   On sait d'après le cours que la condition nécessaire et suffisante pour que les trois vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ forment une base est que M soit inversible. De plus une fois calculée M^{-1} ses colonnes donneront les coordonnées des $\overrightarrow{e_j}$ dans cette base. On procède donc par la méthode de réduction enseignée en cours pour calculer M^{-1} (et on voit en passant si celle-ci existe ou non) :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\end{array}\right]$$

   La matrice M est donc inversible et

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}\ .$$

   La j^{e} colonne de cette matrice donne les coordonnées de $\overrightarrow{e_j}$ dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$.

2. En utilisant la réponse à la question précédente exprimer $f(\overrightarrow{e_1})$, $f(\overrightarrow{e_2})$, et $f(\overrightarrow{e_3})$ comme des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, et $\overrightarrow{v_3}$, puis comme des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, et $\overrightarrow{e_3}$.

   Corr. : On a, puisque $f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_2}, f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_3}, f(\overrightarrow{v_3}) = -\overrightarrow{v_1}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} &\Rightarrow f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3} &\Rightarrow f(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1} = -\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} + 2\overrightarrow{v_3} &\Rightarrow f(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} - 2\overrightarrow{v_1} = -2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3}\end{aligned}$$

   Puis, en remplaçant les $\overrightarrow{v_j}$ par leurs expressions comme combinaisons des $\overrightarrow{e_k}$:

$$\begin{aligned}f(\overrightarrow{e_1}) &= \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_3} \\ f(\overrightarrow{e_2}) &= -\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = -2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} \\ f(\overrightarrow{e_3}) &= -2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} = -4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3}\end{aligned}$$

3. Quelle est la matrice A de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$?

   Corr. : D'après la question à la question précédente, il s'agit de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

   Comme la matrice qui exprime la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ dans la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est la matrice M^{-1} on a aussi l'expression :

$$A = \left(M^{-1}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot M^{-1} = M \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot M^{-1},$$

   et l'on peut vérifier que cela donne le même résultat.

4. Que peut-on dire de l'application linéaire $g = f \circ f \circ f$? (ind. : on calculera $g(\overrightarrow{v_1})$, $g(\overrightarrow{v_2})$, et $g(\overrightarrow{v_3})$ en fonction de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, et $\overrightarrow{v_3}$.)

   Corr. : On constate : $g(\overrightarrow{v_1}) = -\overrightarrow{v_1}$, $g(\overrightarrow{v_2}) = -\overrightarrow{v_2}$, $g(\overrightarrow{v_3}) = -\overrightarrow{v_3}$, donc g est l'application linéaire : $\overrightarrow{v} \mapsto -\overrightarrow{v}$.

5. Montrer sans calculs supplémentaires : $A^6 = I_3$ (on rappelle que I_3 est une notation pour la matrice $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.)

   Corr. : A^6 est la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f = g \circ g$. Or $(g \circ g)(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$. Donc A^6 est la matrice dans la base canonique de l'application linéaire “identité”, $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{v}$, et ainsi on a $A^6 = I_3$.

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1ère année - Mathématiques
Sections 1 et 2
Examen du 3 juin 2004
Durée : 3 heures. SANS DOCUMENT NI CALCULATRICE.

---

1. Les exercices sont indépendants les uns des autres.
2. Barême indicatif : 3+4+3+3+5+3 =21
3. Vous devez numérotez vos intercalaires et inscrire sur votre copie leur nombre total, avant de la remettre aux surveillants.

Exercice 1

Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$, définie par :

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi(v) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \end{bmatrix}$$

1. Quelle est la matrice de cette application ϕ dans les bases canoniques ?
2. Quelle est la dimension du noyau de ϕ ?
3. L'application ϕ est-elle surjective ? (*Indication :* on pourra déduire ce résultat de la réponse précédente par un argument simple.)

Exercice 2

On note (e_1, e_2) les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Prouver que les vecteurs
$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$
forment une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice $Q = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2)}^{(e_1,e_2)}$ qui exprime les vecteurs e_1 et e_2 dans la base (u_1, u_2).
2. On note L_1 la droite vectorielle engendrée par u_1 et de même L_2 la droite engendrée par u_2. Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur L_1 parallèlement à L_2. Quelle est la matrice de π dans la base (u_1, u_2) ? Quelle est la matrice de π dans la base (e_1, e_2) ?
3. Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice A dans la base canonique (e_1, e_2) s'écrit :
$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$
Déterminer les vecteurs $\psi(u_1)$ et $\psi(u_2)$. Comment s'écrit la matrice B de ψ dans la base (u_1, u_2) ? Quelle transformation géométrique représente ψ ?

—— Tournez la page ——

Exercice 3

On demande de calculer les déterminants suivants, et de préciser pour quelles valeurs du paramètre T les matrices correspondantes sont inversibles :

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & T \\ 1 & 4 & T^2 \end{vmatrix}$$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & T & T \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle :

$$y'(x) + 2xy(x) = z(x)$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène (c'est-à-dire avec $z = 0$).
2. Par la méthode de la variation de la constante trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation avec second membre $z(x) = (2x + 1)e^x$.

Exercice 5

On fixe un réel non nul $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pour tout l'exercice, et l'on considère l'équation différentielle $y'' + k^2 y = z$, avec $y(x)$ et $z(x)$ des fonctions sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles).

1. Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y'' + k^2 y = 0$.
2. Soit $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{\pm k\}$. Trouver une solution particulière de l'équation :
$$y''(x) + k^2 y(x) = \cos(\omega x)$$
Donner toutes les solutions et expliciter l'unique solution vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
3. Trouver une solution particulière de l'équation :
$$y''(x) + k^2 y(x) = \cos(kx)$$
Donner toutes les solutions et expliciter l'unique solution vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$. Pour les calculs on rappelle que $k \neq 0$.
4. Quelle différence qualitative peut-on observer entre les solutions aux deux questions précédentes ?

Exercice 6

On demande toutes les solutions (à valeurs réelles) de l'équation différentielle

$$y'(x) = e^{-y(x)} ,$$

et l'on précisera les intervalles maximaux de définition. Expliciter l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et son intervalle maximal.

—–oooOooo—–

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS $1^{\text{ère}}$ année - Mathématiques - UE4
UE4 – Sections 1 et 2
Session de Septembre 2004
Durée : 3 heures. SANS DOCUMENT NI CALCULATRICE.

Barême indicatif : 1+4+4+4+5+2. Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\}.$$

Construire une base de H. Quelle est la dimension de H ?

Exercice 2

Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire telle que :

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

1. Comment s'écrit la matrice de cette application (dans les bases naturelles de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$) ?
2. Quelle est la dimension du noyau de ϕ ? L'application ϕ est-elle injective ?
3. Quelle est la dimension de l'image de ϕ ? L'application ϕ est-elle surjective ?

Exercice 3

On travaille dans l'espace $V = \mathbb{R}^2$. On note (e_1, e_2) les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Prouver que les vecteurs
$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
forment une base de $\mathbb{R}^2$.
Comment s'écrit la matrice $P = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}^{(u_1,u_2)}$ qui exprime les vecteurs u_1 et u_2 dans la base (e_1, e_2), et la matrice inverse $Q = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2)}^{(e_1,e_2)}$?
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $\phi(u_1) = u_2$ et $\phi(u_2) = u_1$. Comment s'écrit la matrice de ϕ dans la base (u_1, u_2) ? Et dans la base (e_1, e_2) ?

—— **Tournez la page** ——

Exercice 4

On pose :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^{2x} - 3e^{x} + e^{-x}}{x} & \text{pour } x \neq 0 \, , \\ 0 & \text{pour } x = 0 \, . \end{cases}$$

1. Écrire un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $2e^{2x} - 3e^{x} + e^{-x}$.
2. Prouver en utilisant le résultat précédent que f est continue et dérivable en 0.
3. En utilisant à nouveau le résultat de la question 1 donner un développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2 ; puis déterminer la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point $P = (0, f(0))$, au voisinage de ce point.

Exercice 5

Soit $a : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$ la fonction

$$a(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

1. Décomposer cette fraction en éléments simples. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto a(x)$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
2. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène

   $$y'(x) - a(x)y(x) = 0$$

   sur l'intervalle $]1, +\infty[$?
3. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle avec second membre

   $$y'(x) - a(x)y(x) = x$$

   sur l'intervalle $]1, +\infty[$?

Exercice 6

Existe-t-il des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

qui soient bornées sur $\mathbb{R}$ (en dehors de la solution nulle) ? Justifier soigneusement la réponse.

——oooOooo——