Analyse Complexe, de Fourier, Hilbertienne
Cours de DEA, 1^er^ semestre 2003-04

Jean-François Burnol

version du 23 juin 2004

1. **Résumé du cours.** Mots-clés : Espaces de Hardy, factorisation, théorèmes de Beurling. Théorèmes de Wiener et de Paley-Wiener. Théorèmes de Beurling-Lax. Fonctions de Nevanlinna. Théorème de Kreĭn.
2. **Énoncé et corrigé du devoir à la maison.**
3. **Énoncé et corrigé de l'examen.**
4. **Énoncé de l'examen de rattrapage.**

Ce résumé suit de très près le déroulement réel du cours, d'octobre 2003 à début janvier 2004. J'ai rassemblé dans une section annexe plusieurs choses importantes, en complément. Ce résumé ne comporte aucune démonstration complètement formalisée, néanmoins en ce qui concerne le point central que constitue la factorisation des fonctions des espaces de Hardy (pour le disque ou le demi-plan) en facteurs intérieur, extérieur et produit de Blaschke, on peut considérer que la preuve en est donnée ici avec toutes les indications nécessaires.

Le cours a principalement porté sur l'étude des espaces $\mathbf{H}^2$, $\mathbf{H}^\infty$, $\mathbf{H}^1$, et $\mathcal{N}$ pour le disque unité et le demi-plan : rappels sur les notions de base de la théorie des séries de Fourier, de la théorie de l'intégration et de la théorie de la mesure, intégrales de Poisson, théorèmes de Herglotz, de Fatou, de Szëgo-Riesz « $\log|f| \in L^1$ », des frères Riesz, factorisation de Smirnov-Nevanlinna, théorie de Beurling-Lax des espaces invariants pour le décalage discret ou continu, théorèmes de Szëgo-Kolmogorov-Krein et de Wold sur les séries temporelles stationnaires, théorèmes de Paley-Wiener, théorème de convolution de Titchmarsh, la classe $\mathcal{N}$ pour le disque et le demi-plan, condition suffisante pour l'absence de facteur singulier, théorème de Kreĭn (sur les fonctions entières).

Ce cours n'est qu'une *première introduction* à ce merveilleux chapitre de la Théorie des Fonctions, à la confluence de bien des domaines. Presque aucune mention n'a été faite des autres espaces $\mathbf{H}^p$, rien n'a été dit des fonctions conjuguées, des techniques employant les fonctions maximales, ou les fonctions sous-harmoniques, ou les indicateurs de Phragmén-Lindelöf, et absolument rien n'a été dit des développements des trente ou quarante dernières années comme les théorèmes de Carleson, la condition BMO, les techniques probabilistes etc…

Les livres de Duren, Dym-McKean, Hoffman, et Rudin de la bibliographie contiennent presque tout ce dont nous parlons et bien plus encore (à l'exception notable du théorème de Kreĭn). Je recommande aussi tout particulièrement le livre de Rosenblum et Rovnyak (en particulier parce qu'il contient une démonstration du théorème de Kreĭn).

Quelques références en rapport avec, ou prolongeant, ce cours :

– M. Andersson, *Topics in complex analysis* Universitext. Springer-Verlag, 1997.
– N. I. Akhiezer et I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Dover Publications Reprint, 1993.
– L. de Branges, *Espaces hilbertiens de fonctions entières*, Traduit de l'anglais par R. Parrot, Masson et Cie. Éditeurs, Paris, 1972.
– K. Chandrasekharan, *Classical Fourier transforms.* Universitext. Springer-Verlag, 1989.
– P. Duren,*Theory of H^p spaces*, Dover Publications Reprint, 1990.
– H. Dym et H. P. McKean, *Fourier series and integrals*, Academic Press, New York, 1972.
– M. L. Gorbachuk et V. I. Gorbachuk, *M. G. Krein's lectures on entire operators*, Birkhäuser, Basel, 1997.
– H. Helson, *Harmonic analysis*, Addison-Wesley, 1983.
– K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions.* Dover Publications Reprint, 1988.
– P. Koosis, *Introduction to H_p spaces*, Second edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
– P. D. Lax, *Functional analysis*, Wiley-Intersci., New York, 2002.
– B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, AMS, 1996.
– R.E. Paley et N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc., 1934.
– F. Riesz et B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Translated from the second French edition by Leo F. Boron, Reprint of the 1955 original, Dover, New York, 1990.
– M. Rosenblum et J. Rovnyak, *Topics in Hardy classes and univalent functions*, Birkhäuser, Basel, 1994.
– W. Rudin, *Analyse Réelle et Complexe*, Masson, Paris.
– E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann-Zeta Function*, 2nd ed. Oxford 1986.
– N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series. With Engineering Applications*, The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass, 1949
– N. Wiener, *The Fourier Integral and certain of its applications*, Reprint of the 1933 edition. Cambridge University Press, 1988.

La théorie de Beurling, qui est un de nos axes principaux, est intermédiaire entre la période classique (Hardy-Littlewood, F. et M. Riesz, Fatou, Herglotz, Carathéodory, Szëgo, Smirnov, Nevanlinna, etc...) et la période plus contemporaine (méthodes réelles, condition BMO, intégrales singulières, etc...). Les références classiques « modernes » pour les espaces de Hardy $\mathbf{H}^p$, accompagnant la transition à la période plus contemporaine, sont Duren *Theory of H^p spaces*, Hoffman *Banach spaces of analytic functions* et P. Koosis *Introduction to H_p spaces.* Une référence possible en ce qui concerne certains points classiques de la théorie de la mesure, et aussi des espaces de Hardy pour le disque, est le livre de Rudin *Analyse Réelle et Complexe.* En ce qui concerne l'analyse fonctionnelle le livre de Lax *Functional analysis* est tout simplement merveilleux (ne pas oublier aussi de lire les classiques de Riesz-Nagy et Akhiezer-Glazman). Les livres de Helson *Harmonic analysis* et de Dym-McKean *Fourier series and integrals* sont d'une lecture plaisante. Les livres de de Branges *Espaces hilbertiens de fonctions entières* et de Gorbachuk *M. G. Krein's lectures on entire operators* entraîneront le lecteur vers des perspectives originales, exigeantes et pleines de potentialités. Le livre de Rosenblum et Rovnyak *Topics in Hardy classes and univalent functions* donne une présentation des fonctions de Nevanlinna dans un demi-plan dans un esprit proche de celui de ce cours.

Enfin, il **faut** avoir lu les deux livres de N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain* et *The Fourier Integral and certain of its applications*, ainsi que *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. Je promets de m'y mettre bientôt.

Semaine 1

1. Produit scalaire hermitien. Espaces de Hilbert. L'espace $l^2(\mathbf{N})$ est complet.
2. Si $L \subset K$ avec K Hilbert, alors L est Hilbert si et seulement si il est fermé dans K. Projection orthogonale sur L, fermé dans K. Pour tout sous-espace $L \subset K$ on a $\overline{L} = (L^\perp)^\perp$.
3. Procédé de Gram-Schmidt. Séparabilité. Si séparable, soit la dimension est finie, soit $K \sim l^2(\mathbf{N})$. Si $L \subset K$ est de dimension finie, alors L est fermé.
4. L'espace $L^2(0, 2\pi; \frac{d\theta}{2\pi})$ est un espace de Hilbert, séparable (théorème de Riesz-Fischer).
5. Si f est dans L^2 et $S_j = \sum_{|k|\leq j} \widehat{f}(k) \exp(ki\theta)$ sa j^{e} somme partielle de Fourier, et g_N la moyenne arithmétique des $N+1$ premiers S_j alors g_N est la convolution de f avec le noyau de Fejér $K_N(\theta) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2 \frac{N+1}{2}\theta}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta}$.
6. En utilisant la positivité du noyau de Fejér et $\int_0^{2\pi} K_N(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = 1$ on montre aisément que g_N tend vers f au sens L^2. On en déduit que le système trigonométrique est complet dans L^2 et donc l'égalité de Bessel-Parseval et le fait que les S_j convergent aussi au sens L^2 vers f.
7. Digressions :
   (a) de toute suite L^2-convergente on peut extraire une sous-suite ponctuellement presque partout convergente. Mais en fait (L. Carleson) on a convergence ponctuelle p.p. de S_j vers f sans avoir à passer à une sous-suite (on n'en donne pas la démonstration dans le cours).
   (b) continuité L^2 des translations. Énoncé analogue pour L^1.
   (c) si f est continue les g_N convergent uniformément vers f. Énoncé analogue pour L^1.

Semaine 2

1. Soit U l'opérateur de multiplication par $z = \exp(i\theta)$ sur $K = L^2(S^1, \frac{d\theta}{2\pi}) = L^2(0, 2\pi; dt)$, $\theta = t$. Soit $L \subset K$, fermé et exactement invariant sous U ($U(L) = L$). Alors L est de la forme $L_E = \{f \mid f = 0 \text{ presque partout sur } E\} = \mathbf{1}_{E^c} \cdot L^2$, pour un certain sous-ensemble mesurable $E \subset S^1$. De plus la réciproque est vraie ; et $L_E = L_F$ si et seulement si $E \Delta F$ est négligeable.
2. Pour la preuve, on commence par déterminer tous les opérateurs bornés V qui commutent avec U. Ce sont les opérateurs de la forme $V(g) = a \cdot g$, avec a une fonction mesurable (essentiellement) bornée sur S^1. La norme opératorielle de V est la norme sup (essentielle) de a.
3. On prouve ensuite que le plus petit espace fermé exactement invariant contenant une fonction f de L^2 donné est l'espace L_E avec E le lieu des zéros de f (qui est

défini à un négligeable près). Donc les $z^n f$, $n \in \mathbf{Z}$ engendrent K si et seulement si le lieu des zéros de f est de mesure nulle.

4. Digressions :
   (a) le théorème de Banach-Steinhaus (si les l_j sont des formes linéaires continues sur un espace normé complet telles que pour tout v fixé les $|l_j(v)|$ sont bornés alors les $\|l_j\|$ sont bornées).
   (b) le théorème de Riesz-Fréchet portant sur les formes linéaires continues sur un Hilbert.
   (c) si ($\psi \in L^2 \Rightarrow \phi\psi \in L^1$) alors $\phi \in L^2$.
   (d) dans la suite du cours un objectif principal sera de comprendre non plus les espaces exactement invariants ($U(L) = U$) mais les espaces (simplement) invariants sous U ($U(L) \subset L$), et donc aussi de déterminer quand les $z^n f$, $n \in \mathbf{N}$ engendrent K.

5. L'espace de Hardy $\mathbf{H}^2 \subset L^2(S^1, d\theta/2\pi)$. Si $f \not\equiv 0$ est dans $\mathbf{H}^2$ alors $\log|f|$ est dans L^1 (théorème de Szëgo). On prouve en fait, pour $f \sim c_k e^{ki\theta} + c_{k+1}e^{(k+1)i\theta} + \dots$ (avec $c_k \neq 0$) :

$$\log|c_k| + \sum_{f(a)=0, a\neq 0, |a|<1} \log\frac{1}{|a|} \leq \int \log|f(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}$$

   où la somme porte sur les zéros, comptés avec leurs multiplicités, de f qui est aussi vue comme fonction analytique sur $D(0,1) = \{z, |z| < 1\}$. L'inégalité peut être stricte. Elle est obtenue par un passage à la limite (utilisant astucieusement le lemme de Fatou de la théorie de l'intégration) d'égalités de Jensen sur les disques de rayons strictement inférieurs à 1. Elle montre que pour $f \in \mathbf{H}^2$ on a $\int \log|f(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} > -\infty$ (il était clair que $\int \log^+|f(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} < +\infty$, puisque $f \in L^2$). Une conséquence est aussi que les zéros non nuls vérifient la condition de Blaschke (les zéros sont comptés avec leurs multiplicités) :

$$\prod_{f(a)=0, a\neq 0, |a|<1} |a| \ > 0 \qquad \text{ou encore :} \qquad \sum_{f(a)=0, |a|<1} (1 - |a|) < +\infty$$

6. Digression : on a prouvé en passant (comme corollaire à la classique égalité de Jensen) que pour f non nulle analytique sur $D(0,1)$,

$$0 < r < 1 \mapsto \int \log|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}$$

   est une fonction continue et croissante de r. Il est également vrai que

$$0 \leq r < 1 \mapsto \int \log^+|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}$$

est une fonction continue et croissante de r. Mais pour montrer la croissance on a besoin du noyau de Poisson (inégalité de Jensen-Poisson) que nous étudierons plus tard. Le noyau de Poisson permet aussi de montrer que

$$\int |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \qquad \text{et} \qquad \int |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$$

sont des fonctions (continues et) croissantes de r (c'est évident pour la dernière qui vaut $\sum_{n\geq 0} r^{2n}|a_n|^2$ pour $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$).

Semaine 3

1. L'étude de l'espace de Hardy $\mathbf{H}^2$ nécessite les outils classiques de la théorie de la mesure. En particulier le théorème de Riesz-Kakutani qui identifie le dual de l'espace des fonctions continues sur un espace topologique vérifiant certaines conditions à un espace de mesures. Cela nécessite aussi la discussion des mesures complexes. Pour le cas des formes linéaires positives, nous avons suivi un appendice du récent et beau livre de P. Lax *Functional Analysis*.
2. Soit donc X un espace métrique compact (par exemple S^1 ou un intervalle $[a, b]$). Soit λ une forme linéaire « positive » sur $\mathcal{C}(X)$ (espace des fonctions continues sur X). Le complété séparé L de $\mathcal{C}(X)$ pour la semi-norme $\|g\| = \lambda(|g|)$ est introduit. Le volume $|U|$ d'un ouvert U est défini comme étant le supremum des $\lambda(g)$ pour g continue à support fermé inclus dans U et à valeurs dans $[0, 1]$. Le volume est σ-additif sur les ouverts. On dira que A est négligeable si $0 = \inf_{A\subset U} |U|$.
3. Toute suite de Cauchy pour $\|\cdot\|$ d'éléments g_n de $\mathcal{C}(X)$ possède une suite-extraite convergeant ponctuellement en-dehors d'une partie négligeable. La fonction $\widetilde{f}$ sur X ainsi définie à équivalence près (pour l'égalité en dehors d'un négligeable) ne dépend pas du choix de la suite extraite et est donc associée à $f = \lim g_n$ dans L. On prouve que si $\widetilde{f}$ est (équivalente à la fonction) nulle alors f est nulle.
4. On dira que $B \subset X$ est mesurable si $\mathbf{1}_B$ est (équivalente à) la réalisation d'un élément de L. On prouve que les parties mesurables forment une tribu qui contient les Boréliens (et qui est Lebesgue-complète). De plus si on pose $\mu(B) = \lambda(\mathbf{1}_B)$ on définit une mesure (positive, finie) sur cette tribu. Enfin on a

$$\forall g \in \mathcal{C}(X) \quad \lambda(g) = \int_X g\, d\mu$$

5. Finalement on identifie L avec $L^1(X, \mu)$ et on prouve l'unicité de μ. Réciproquement toute mesure positive finie définit une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(X)$ par la formule précédente. Ainsi on a comme corollaire que les fonctions continues sont denses dans $L^1(X, \mu)$ (on peut établir que cela vaut aussi dans $L^2(X, \mu)$).
6. Un autre corollaire important est la régularité de la mesure μ :

$$\forall B \qquad \mu(B) = \inf_{U\supset B,\ \text{ouvert}} \mu(U) = \sup_{F\subset B,\ \text{fermé}} \mu(F)$$

7. On montre, pour $X = S^1$ (ou un intervalle fermé), la compacité faible-étoile de l'espace des mesures positives finies : si les $\mu_n(S^1)$ sont bornés, alors il existe une suite extraite μ_{n_k} et une mesure positive finie μ telles que $\lim \int g d\mu_{n_k} = \int g d\mu$ soit vrai pour tout $g \in \mathcal{C}(S^1)$.
8. Toujours pour S^1 nous avons aussi (suivant la méthode (inégalité maximale) employée dans le livre de W. Rudin, *Real and complex analysis*) défini la notion de points de Lebesgue de $f \in L^1(d\theta/2\pi)$, et montré que presque tout point est un point de Lebesgue.

Semaine 4

1. Sur un espace X muni d'une tribu, une mesure complexe ν (au sens strict) est une fonction σ-additive sur la tribu à valeurs dans $\mathbf{C}$ (attention si la mesure est positive, elle doit donc être finie pour être une mesure complexe en ce sens). On a admis (*cf.* W. Rudin, *loc. cit.*) que $\mu(A) = \sup_{\text{partitions de } A} \sum_j |\nu(A_j)|$ définit alors une mesure positive et finie, qui est appelée la mesure des variations de ν et notée $|\nu|$.
2. On a prouvé que l'on pouvait écrire $\nu = h \cdot |\nu|$ avec une certaine fonction h mesurable sur X à valeurs complexes de module 1. Pour cela on a établi le théorème de Lebesgue-Radon-Nikodým : soit σ une mesure positive finie sur X, espace mesuré quelconque. Soit τ une mesure complexe (finie, donc) sur X. Alors on peut écrire de manière unique $\tau = g\sigma + \tau_s$ avec $g \in L^1(\sigma)$ et τ_s une mesure complexe (finie) qui est singulière par rapport à σ.
3. En utilisant ces outils, on a ensuite prouvé la forme générale du théorème de Riesz, pour les formes linéaires continues : elles correspondent aux mesures complexes (strictes) (on suppose X espace métrique compact). De plus la norme opératorielle ce cette forme linéaire est la variation totale de la mesure complexe. En fait $|\mu|(X) = \sup_{g \in \mathcal{C}(X), |g| \leq 1} \left|\int g\, d\mu\right|$ et plus généralement pour $f \in \mathcal{C}(X)$ à valeurs positives, on a $\int f\, d|\mu| = \sup_{g \in \mathcal{C}(X), |g| \leq f} \left|\int g\, d\mu\right|$.
4. On prouve la compacité faible étoile de l'espaces des mesures complexes sur S^1 : si les μ_n sont une suite de mesures complexes de variations totales bornées, alors il existe une sous-suite et une mesure complexe qui en est la limite faible (essentiellement, c'est ce qui s'appelle le principe de sélection de Helly dans la littérature classique).

Semaine 5

1. On voit S^1 comme l'intervalle $[0, 2\pi]$, les extrémités étant identifiées, ce qui permet de noter un arc ouvert sous la forme $]x-k, x+k[$ par exemple. Soit μ une mesure complexe (au sens strict) sur S^1. On a prouvé que

$$\lim_{k \to 0} \frac{\mu(]x-k, x+k[)}{2k/2\pi}$$

existait en presque tout x et que la fonction $g(x)$ ainsi définie correspondait au $g \in L^1(dx/2\pi)$ de la décomposition de Lebesgue-Radon-Nikodým $\mu = g \cdot \frac{dx}{2\pi} + \mu_s$.

2. Soit $f \in \mathbf{H}^2$. On peut prendre comme définition initiale de $\mathbf{H}^2$ le sous espace fermé de $L^2(S^1, dt/2\pi)$ engendré par $1, w, w^2, \ldots$ avec $w = \exp(it)$. La (classe d'équivalence) f définit une vraie fonction sur $D(0,1)$ par la formule $f(z) = \sum_{n\geq 0} \widehat{f}(n) z^n$, $|z| < 1$, $\widehat{f}(n) = \int f(w) w^{-n} \frac{dt}{2\pi}$. Parfois on aura envie d'écrire $\widetilde{f}$ lorsqu'il s'agit d'un représentant de la classe d'équivalence f, comme fonction sur S^1. On a une formule à la Cauchy :
$$|z| < 1 \Rightarrow \quad f(z) = \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(w) \frac{1}{1 - zw^{-1}} \frac{dt}{2\pi}$$
3. La *formule de Poisson* est essentielle pour ce cours (noyau positif, de norme L^1 majoré, en fait 1) :
$$|z| < 1 \Rightarrow \quad f(z) = \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(w) \frac{1 - |z|^2}{|z - w|^2} \frac{dt}{2\pi}$$
Il est utile d'écrire cela sous la forme :
$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \widetilde{f}(e^{i\,t}) \frac{dt}{2\pi}$$
qui fait intervenir $P_r(\alpha) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha)+r^2}$ et représente f_r comme la convolution $P_r * f$. On remarquera à ce propos $f_r = P_{r/s} * f_s$, pour $0 \leq r < s$.
4. On note les formules ($z \neq w$, $|w| = 1$) :
$$P(z, w) = \frac{1 - |z|^2}{|z - w|^2} = \mathrm{Re}\frac{w + z}{w - z} = P(\frac{z}{w}, 1) \quad \text{et} \quad P_r(\alpha) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{ni\alpha}$$
Comme fonction de z, $P(z, w)$ n'est pas une fonction analytique, mais une fonction harmonique à valeurs réelles.
5. Pour μ une mesure complexe sur S^1 on notera $P[\mu]$ la fonction
$$h(z) = \int_{S^1} P(z, e^{i\,t})\, d\mu(e^{i\,t})$$
On a $\widehat{h_r}(n) = r^{|n|} \widehat{\mu}(n)$. Pour $g \in L^1$ on écrira aussi $P[g]$ au lieu de $P[g \cdot \frac{dt}{2\pi}]$.
6. Lorsque $g \in \mathcal{C}(S^1)$ la fonction qui vaut $P[g](z)$ pour $|z| < 1$ et $g(z)$ pour $|z| = 1$ est une fonction continue. Réciproquement si H est une fonction continue sur $|z| \leq 1$, harmonique à l'intérieur, alors H est l'intégrale de Poisson de sa restriction au bord.
7. En fait, si on suppose seulement que g est intégrable et (essentiellement) continue en $e^{i\theta_0}$, alors $\lim_{z \to e^{i\theta_0},\, |z|<1} P[g](z) = g(e^{i\theta_0})$.

8. Dans le cas général la fonction $h = P[\mu]$ est une fonction harmonique dans $D(0,1)$ et de plus les fonctions h_r sont de normes L^1 bornées.
9. Réciproquement si h est une fonction harmonique dans $D(0,1)$ telle que les fonctions h_r soient de normes L^1 bornées alors il existe une unique mesure complexe (finie) μ sur S^1 telle que $h = P[\mu]$. Les $h_r(e^{i\,t})\frac{dt}{2\pi}$ convergent faiblement-étoile vers μ lorsque $r \to 1$.
10. On prouve le théorème de Herglotz : si f, analytique sur $D(0,1)$ a sa partie réelle à valeurs positives, alors il existe une unique mesure μ positive et finie sur S^1 et un unique $c \in \mathbf{R}$ tels que :
$$f(z) = \int_{S^1} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(e^{it}) + i\,c$$
11. On prouve le théorème de Fatou : soit μ une mesure complexe sur S^1 et $h = P[\mu]$. En tout θ où $\lim_{k\to 0} \mu(]\theta-k,\theta+k[)/(2k/2\pi)$ existe on a
$$\lim_{r\to 1} h(re^{i\theta}) = \lim_{k\to 0} \frac{\mu(]\theta-k,\theta+k[)}{2k/2\pi}$$
12. Digression : comme évoqué sans détails en cours, sous une hypothèse un peu plus forte on a aussi la convergence « non-tangentielle » dans le théorème de Fatou (*cf.* K. Hoffman *Banach spaces of analytic functions*).

Semaine 6

On prouve toute une série de théorèmes :

1. Soit h une fonction harmonique à valeurs complexes sur $D(0,1)$. Alors les fonctions $r \mapsto \|h_r\|_1$, $r \mapsto \|h_r\|_2$, $r \mapsto \|h_r\|_\infty$, sont des fonctions continues et croissantes de $0 \le r < 1$. On pose $\|h\|_1 = \sup_r \|h_r\|_1$, $\|h\|_2 = \sup_r \|h_r\|_2$, $\|h\|_\infty = \sup_r \|h_r\|_\infty = \sup |h(z)|$.
2. Si $\|h\|_1 < \infty$ alors $h = P[\mu]$ pour une unique mesure complexe sur S^1. La réciproque est vraie. Par le théorème de Fatou les limites radiales donnent la densité de la partie absolument continue de μ. Si les h_r convergent au sens L^1 vers une fonction g alors $h = P[g]$. La réciproque est vraie.
3. Si $\|h\|_2 < \infty$ alors en fait $h = P[g]$ avec $g \in L^2$. La réciproque est vraie. De plus on a $h_r \to_{L^2} g$.
4. Si $\|h\|_\infty < \infty$ alors $h = P[g]$ avec $g \in L^\infty$. La réciproque est vraie et pour presque tout θ on a $g(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} h(re^{i\theta})$. (C'est cela que l'on appelle classiquement le Théorème de Fatou). On a $\lim_{r\to 1} \|h_r\|_\infty = \sup_{|z|<1} |h(z)| = \|h\|_\infty = \|g\|_\infty$.
5. La fonction $h = P[\mu]$, harmonique à valeurs complexes, est analytique si et seulement si les coefficients de Fourier négatifs de μ sont nuls. On notera $\mathbf{H}^1$ (resp. $\mathbf{H}^2$, $\mathbf{H}^\infty$) l'espace vectoriel des fonctions *analytiques* f sur $D(0,1)$ telles que les normes L^1 (resp. L^2, L^∞) des f_r soient bornées. On a $\mathbf{H}^\infty \subset \mathbf{H}^2 \subset \mathbf{H}^1$. On sait déjà que $\mathbf{H}^2$ est canoniquement identifié à un sous-espace de $L^2(S^1, d\theta/2\pi)$ (c'est cette incarnation que notre notation $\mathbf{H}^2$ désignait initialement).

6. Pour que $P[g]$ soit dans $\mathbf{H}^1$ (resp. $\mathbf{H}^2$, $\mathbf{H}^\infty$) il faut et il suffit que g soit dans L^1 (resp. L^2, L^∞) et que les coefficients de Fourier négatifs de g soient nuls.
7. Par les théorèmes précédents les limites radiales définissent une fonction $\widetilde{f}$. Dans les cas $\mathbf{H}^2$ et $\mathbf{H}^\infty$ on sait déjà que $\widetilde{f}$ est dans L^2 (resp. L^∞) et que $\mu = \widetilde{f}\frac{dt}{2\pi}$. On prouvera plus tard (Théorème de F. et M. Riesz) que cela vaut aussi pour $\mathbf{H}^1$ (le cas analytique est donc distinct du cas harmonique général). La formule à la Cauchy reliant f à $\widetilde{f}$ marche.
8. Dans le cas de $f \in \mathbf{H}^2$, $f \not\equiv 0$, nous avons vu précédemment que $\log|\widetilde{f}| \in L^1$ (théorème de Szëgo) et que les zéros de f vérifient la condition de Blaschke. Cela vaut donc aussi pour $\mathbf{H}^\infty$ puisque $\mathbf{H}^\infty \subset \mathbf{H}^2$. En ce qui concerne $\mathbf{H}^1$ on prouve qu'il est vrai à nouveau que $\log|\widetilde{f}| \in L^1$ et que les zéros vérifient la condition de Blaschke (théorème de F. Riesz). Pour cela on établit en fait pour $f = c_k z^k + c_{k+1}z^{k+1} + \dots$ ($c_k \neq 0$) l'inégalité de Jensen généralisée :
$$\log|c_k| + \sum_{f(a)=0, a\neq 0, |a|<1} \log\frac{1}{|a|} \leq \int \log|\widetilde{f}(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}$$
Mais la démonstration en est moins simple que celle donnée pour $\mathbf{H}^2$ (par passage à la limite dans des égalités de Jensen classiques). On obtient tout de même dans un premier temps
$$\sum_j \log\frac{1}{|a_j|} < \infty\ ,$$
où l'on a noté a_j, avec $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ les zéros non nuls, si il y en a, de f, et qui vérifient donc la condition de Blaschke.
9. On prouve sous cette condition que le produit de Blaschke
$$B(z) = z^k \prod_j \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j}z}\frac{\overline{a_j}}{|a_j|}$$
est absolument convergent, uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$ qui ne rencontre ni les a_j, ni l'ensemble (inclus dans S^1) des points d'accumulation des a_j, ni les $1/\overline{a_j}$ (qui sont en-dehors de $\overline{D(0,1)}$). De plus comme $|B(z)| \leq 1$ pour $|z| < 1$ on a $B \in \mathbf{H}^\infty$. On prouve que $\widetilde{B}$ est une fonction presque partout de module 1 (cela découle de l'inégalité ci-dessus pour B, qui est valide puisque $B \in \mathbf{H}^\infty$).
10. On démontre ensuite que f/B est dans $\mathbf{H}^1$ avec $\|f/B\|_1 = \|f\|_1$ (théorème de factorisation de F. Riesz). Comme f/B est sans zéros on peut considérer une branche de sa racine carrée, qui sera dans $\mathbf{H}^2$. Ainsi $f = g_1g_2$ avec g_1 et g_2 dans $\mathbf{H}^2$. Il est alors facile de montrer que les f_r converge au sens L^1 vers $\widetilde{f}$ lorsque $r \to 1$. Par ce qui précède, c'est donc que $f = P[\widetilde{f}]$ et on a démontré le théorème de F. et M. Riesz : une mesure complexe « analytique » est absolument continue.
11. On sait maintenant que $\|f_r\|_1 \to \|\widetilde{f}\|_1$ et on peut alors terminer l'adaptation au cas $\mathbf{H}^1$ de la preuve de l'inégalité de Jensen généralisée, initialement donnée pour le cas $\mathbf{H}^2$ (ou encore avec $f = g_1g_2$ on somme les inégalités pour g_1 et g_2).

12. On appelle inégalité classique de Jensen-Poisson l'inégalité

$$|z| < 1 \Rightarrow \quad \log|f(z)| \leq P[\log|f|](z)$$

pour f analytique sur un voisinage ouvert du disque unité fermé : la démonstration est alors élémentaire.

13. En passant à la limite (grâce au lemme de Fatou de la théorie de l'intégration, à $|x| - \log|x| \geq 0$, et à $f_r \to \widetilde{f}$ au sens L^1) dans des inégalités de Jensen-Poisson pour les cercles de rayons r, $r \to 1$, on obtient un résultat fondamental pour la suite :

$$f \in \mathbf{H}^1 \quad \Rightarrow \quad \log|f(z)| \leq P[\log|\widetilde{f}|](z) \quad (\text{pour } |z| < 1)$$

14. Soit alors, avec $g = \widetilde{f}$:

$$E(z) = \exp\left(\int_{S^1} \frac{w+z}{w-z} \log|g(w)| \frac{dt}{2\pi}\right)$$

Suivant une terminologie de A. Beurling, une telle fonction est dite « extérieure » (à juste titre, Beurling autorise dans E une constante multiplicative de module 1 en sus, mais nous nous en tiendrons à cette convention qui impose $E(0) > 0$). Il est facile de montrer que si la fonction $g(e^{it})$ est choisie quelconque dans L^1 (resp. L^2, L^∞) alors $E \in \mathbf{H}^1$ (resp. $\mathbf{H}^2$, $\mathbf{H}^\infty$; $E \equiv 0$ si $\log|g| \notin L^1$). Si E est construite avec $g = \widetilde{f}$, $f \in \mathbf{H}^1$, alors par l'inégalité de Jensen-Poisson généralisée :

$$|z| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \log|f(z)| \leq \log|E(z)|$$

Semaine 7

1. On remarque que E ne s'annule pas et que la fonction $I = f/E$ est bornée par 1. Par le Théorème de Fatou, $\log|E|$ a (presque partout) les mêmes valeurs limites radiales que $\log|f|$, qui sont (presque partout) non nulles puisque $\log|\widetilde{f}| \in L^1$. Donc la fonction I de $\mathbf{H}^\infty$ vérifie $|\widetilde{I}| = 1$ p.p. sur S^1. Une telle fonction, toujours suivant A. Beurling, est dite « intérieure » (fonction bornée dont les limites radiales ont presque partout module 1). Un produit de Blaschke est une fonction intérieure et on montre que la fonction sans zéro I/B (B formé avec les zéros de f) est bornée : comme ses valeurs aux bords sont de module 1, elle est intérieure. En divisant par une constante de module 1, on se ramène à S, intérieure, sans zéro, avec $S(0) > 0$. Prenons la détermination de $\log S$ qui est réelle en $z = 0$. Par le théorème de Herglotz la fonction analytique $-\log S$ est de la forme

$$-\log S(z) = \int_{S^1} \frac{w+z}{w-z} d\nu(w)$$

pour une certaine mesure positive finie ν. En appliquant le théorème de Fatou à la partie réelle de cette égalité on voit que ν est une mesure singulière. On a donc obtenu une factorisation de $f \in \mathbf{H}^1$, non identiquement nulle (théorème de Smirnov) :

$$\begin{aligned}
f(z) &= c \cdot B(z) \cdot S(z) \cdot E(z) && (|c| = 1) \\
B(z) &= z^k \prod_j \frac{a_j - z}{1 - \overline{a_j} z} \frac{\overline{a_j}}{|a_j|} && (\textstyle\prod_j |a_j| > 0) \\
E(z) &= \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{w+z}{w-z} \log |g(w)| \frac{dt}{2\pi} \right) && (w = e^{it}; |g| \in L^1; \log|g| \in L^1) \\
S(z) &= \exp\left(- \int_{S^1} \frac{w+z}{w-z} d\nu(w) \right) && (\nu \text{ mesure positive finie singulière})
\end{aligned}$$

2. La factorisation est unique et la fonction g coïncide avec $\widetilde{f}$. Le facteur extérieur E est dans $\mathbf{H}^2$ (resp. $\mathbf{H}^\infty$) si et seulement si $f \in \mathbf{H}^2$ (resp. $\mathbf{H}^\infty$). Supposons $f(0) \neq 0$, $f \in \mathbf{H}^1$. On a alors l'égalité de Jensen généralisée :

$$\log |f(0)| + \sum_j \log \frac{1}{|a_j|} + \int_{S^1} d\nu = \int_0^{2\pi} \log |\widetilde{f}(e^{it})| \frac{dt}{2\pi}$$

3. On utilise la théorie de la factorisation pour établir des théorèmes de Beurling :
   - soit $L \subset \mathbf{H}^2$, fermé, non nul, avec $zL \subset L$. Alors $L = f\mathbf{H}^2$ avec f une fonction intérieure qui est unique à une constante multiplicative près.
   - soit $F \in \mathbf{H}^2$, non nulle. Le plus petit sous-espace invariant de $\mathbf{H}^2$ qui contienne F est $I \cdot \mathbf{H}^2$ avec I le facteur intérieur de F.
   - l'espace $\mathbf{H}^2$ est engendré par F, zF, z^2F, ..., si et seulement si F est, à une constante multiplicative près, une fonction extérieure, si et seulement si $\log |F(0| = \int_0^{2\pi} \log |\widetilde{F}(e^{it})| \frac{dt}{2\pi}$.
4. Soit $L \subset L^2$ un sous-espace fermé avec $U(L) \subset L$ (U = multiplication par e^{it}). Alors soit $U(L) = L$ et L est alors de la forme $\mathbf{1}_B \cdot L^2$, avec $B \subset S^1$, unique à une partie mesurable près, soit $U(L) \neq L$ et alors $L = f \cdot \mathbf{H}^2$ avec une fonction f de module p.p. 1, unique à une constante près.

Semaine 8

1. Soit K un espace de Hilbert. On dit qu'une suite de vecteurs $(X_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est « stationnaire » si (X_n, X_m) ne dépend que de $n - m$: $(X_n, X_m) = \gamma(n - m)$ (par convention notre produit scalaire est linéaire en la première, sesquilinéaire en la deuxième variable).
2. On prouve qu'il existe une unique mesure positive finie sur S^1 avec $\widehat{\mu}(n) = \int z^{-n} d\mu = \gamma(n)$. Soit $K(X)$ l'espace fermé engendré par les X_n (« histoire » de X). Il existe une isométrie (unique) de $L^2(S^1, \mu)$ sur K_X qui identifie X_n avec z^{-n}. On dit que μ est la « mesure spectrale » de X.

3. Il existe donc un unique opérateur unitaire sur $K(X)$ tel que $S(X_n) = X_{n+1}$. On notera K_N (« passé jusqu'à N ») l'espace engendré par les X_n, $n \leq N$, et $K_{-\infty}$ l'intersection des K_N (« passé lointain »). Soit Z_n la projection orthogonale de X_n sur le passé lointain, et soit Y_n tel que $X_n = Y_n + Z_n$. On prouve que (Y_n) et (Z_n) sont des suites stationnaires (car $S(Y_n) = Y_{n+1}$ et $S(Z_n) = Z_{n+1}$).
4. La suite (Y_n) est « purement innovante » : ce qui signifie que son passé lointain est réduit à $\{0\}$. la suite (Z_n) est « déterministe » : ce qui signifie que Z_n est dans l'adhérence des combinaisons des Z_m, $m < n$, ou encore que son histoire est identique avec son passé lointain.
5. La décomposition $X_n = Y_n + Z_n$ est la décomposition de Wold. On a prouvé (ce n'est pas immédiat) que c'était l'unique façon d'écrire X comme la somme d'une suite purement innovante et d'une suite déterministe, perpendiculaires, dans l'histoire de X.
6. On appelle innovation fondamentale ϵ_n la différence entre X_n et sa projection orthogonale sur K_{n-1}. L'innovation fondamentale de Y est la même. À chaque instant Y et ϵ ont le même passé qui est le complément perpendiculaire dans le passé de X de son passé lointain. On notera $\sigma_X = \|\epsilon_n\|$ (qui est indépendant de n).
7. Supposons $\sigma_X > 0$: alors les (ϵ_n) sont une base orthogonale de l'histoire de Y. Écrivons $Y_0 = \epsilon_0 + c_1\epsilon_{-1} + c_2\epsilon_{-2} + \dots$. On prouve (en utilisant le théorème de Beurling) que $f(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ est une fonction extérieure de $\mathbf{H}^2$. La mesure spectrale de Y est $\mu_Y = \sigma_X^2 |f(e^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi}$.
8. Nous démontrons le théorème de Szëgo-Wold-Kolmogorov-Kreĭn : soit μ_X la mesure spectrale de X et soit $h_X(e^{it})$ la densité de sa partie absolument continue. On a
$$\sigma_X = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log h_X(e^{it})\frac{dt}{2\pi}\right)$$
Si $\log h_X \in L^1$ alors la mesure spectrale de Y est $h_X(e^{it})\frac{dt}{2\pi}$ et celle de Z est la partie singulière de μ_X. Sinon on a $X = Z$. La suite stationnaire X non nulle est purement innovante si et seulement si sa mesure spectrale est absolument continue avec une densité h telle que $\log h \in L^1$ (ce qui équivaut à $h = |F|^2$ pour $F \in \mathbf{H}^2$).
9. On a ainsi : soit μ une mesure positive finie sur S^1 ; pour que 1 soit dans l'adhérence dans $L^2(S^1, \mu)$ des e^{-nit}, $n \geq 1$ il faut et il suffit que $\int \log h(e^{it})\frac{dt}{2\pi} = -\infty$ (avec h la densité de la partie abs. cont. de μ). Évidemment le critère est le même pour que 1 soit dans l'adhérence des e^{+nit}, $n \geq 1$. Cela sera le cas si par exemple les zéros de h ne forment pas une partie négligeable pour $dt/2\pi$.
10. Supposons $\sigma_X > 0$. Soit $B \subset S^1$ choisi de sorte que B^c soit à la fois de mesure de Lebesgue nulle, et de mesure pleine pour la partie singulière de la mesure spectrale μ de X. La fonction $\mathbf{1}_B \in L^2(S^1, \mu)$ ne dépend pas du choix de B. Nous avons prouvé que dans l'isométrie $L^2(S^1, \mu) \xrightarrow{\sim} K(X)$ le sous-espace $\mathbf{1}_B \cdot L^2(S^1, \mu)$ est envoyé sur l'histoire de Y et $\mathbf{1}_{B^c} \cdot L^2(S^1, \mu)$ est envoyé sur l'histoire de Z (passé lointain de X).

Semaine 9

1. On révise la construction de la transformation de Fourier-Plancherel par la méthode des fonctions de la classe $\mathcal{S}$ de Schwartz. Notre normalisation est :

$$f\,\widehat{}\,(\gamma) = \widehat{f}(\gamma) = \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\gamma x} f(x)\, dx,$$

cette formule ayant un sens direct si $f \in L^1(\mathbf{R}, dx)$. Si f est dans $\mathcal{S}$ alors $\widehat{f}$ aussi.

2. Si f_1 et f_2 sont dans L^1 alors leur convolution additive $f_1 * f_2$ l'est aussi et on a par Fubini $\widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f_1}\widehat{f_2}$. Si f_1 et f_2 sont dans $\mathcal{S}$ il en est de même de $f_1 * f_2$ (il suffit que $f_1 \in \mathcal{S}$ et que f_2, $|x|f_2$, $|x|^2 f_2$, ..., soient tous dans L^1).

3. Par la technique de régularisation par convolution on montre que $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, donc aussi $\mathcal{S}$ est dense dans $L^2(\mathbf{R})$.

4. On prouve la Formule d'inversion de Lévy : soit μ une mesure complexe finie sur $\mathbf{R}$ et $F(\gamma) = \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\gamma x} d\mu(x)$, qui est une fonction continue et bornée. Pour $A < B$:

$$\frac{1}{2}\mu(\{A\}) + \mu(]A, B[) + \frac{1}{2}\mu(\{B\}) = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-2\pi iA\gamma} - e^{-2\pi iB\gamma}}{2\pi i\gamma} F(\gamma)\, d\gamma$$

En particulier si $f \in L^1$ vérifie $\widehat{f} = 0$ alors $f = 0$.

5. Comme corollaire on obtient la formule d'inversion de Fourier, pour $f \in \mathcal{S}$:

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i\gamma x} \widehat{f}(\gamma)\, d\gamma$$

On prendra note de $f\,\widehat{}\,\widehat{}\,(x) = f(-x)$.

6. Avec $f^\tau(x) = \overline{f(-x)}$ on a $\widehat{f^\tau} = \overline{\widehat{f}}$. Cela permet d'établir en combinant avec ce qui précède l'identité de Parseval $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ pour $f \in \mathcal{S}$.

7. L'opérateur linéaire unitaire (isométrique et surjectif) de Fourier-Plancherel $\mathcal{F}$: $L^2 \simeq L^2$ est alors obtenu par « complétion » de $f \mapsto \widehat{f}$ pour $f \in \mathcal{S}$. On prouve la chose suivante : si $g \in L^2$ est aussi dans L^1 alors $\mathcal{F}(g)$ est la fonction $\widehat{g}$ définie préalablement.

8. On emploie souvent le lemme suivant : si $f \in L^2$ alors $\int_{-u}^{u} \widehat{f}(\gamma + v)\, dv$ est une fonction continue de γ, bornée, qui est la transformée de Fourier de la fonction $\frac{\sin(2\pi ux)}{\pi x} f(x)$ de $L^1 \cap L^2$.

9. Supposons $f \in L^2([0, +\infty[; dx)$ et posons :

$$H_f(z) = H(z) = \int_0^\infty e^{2\pi izx} f(x)\, dx \qquad (\mathrm{Im}(z) > 0)$$

Cette fonction est analytique dans le demi-plan $D^+ = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$. La fonction $H_b : a \mapsto H(a + ib)$ est la transformée de Fourier de $e^{-2\pi bx} f(x)$. Sa norme L^2 est donc majorée par celle de f et H_b converge vers $\widehat{f}$ lorsque $b \to 0^+$.

10. On désignera par $\mathbf{H}^2(D^+)$, ou $\mathbf{H}^{2+}$ ou simplement $\mathbf{H}^2$ l'espace vectoriel (de Hardy) des fonctions analytiques $F(z)$ dans le demi-plan supérieur telles que
$$\sup_{0<b<\infty} \|F_b\|_2 < \infty.$$
On démontre un théorème de R.E. Paley et N. Wiener : une fonction analytique $F(z)$ dans le demi-plan supérieur est dans $\mathbf{H}^2$ si et seulement si elle est de la forme H_f pour un (unique) $f \in L^2([0, +\infty[; dx)$.
11. Comme corollaire de ce théorème on a la validité d'une formule à la Cauchy :
$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{F(\gamma)}{\gamma - z}\, d\gamma$$
La fonction $\gamma \mapsto F(\gamma)$ ne désigne pour l'instant qu'une classe d'équivalence L^2, à savoir la transformée de Fourier-Plancherel de $f \in L^2([0, +\infty[; dx)$, qui est aussi la limite au sens L^2 de $F(\gamma + i\epsilon)$ lorsque $\epsilon \to 0^+$. La formule peut se montrer en interprétant l'intégrale comme un produit scalaire. Un raisonnement analogue donne aussi :
$$\begin{aligned} z \in D^+ \Rightarrow \quad & 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{F(\gamma)}{\gamma - \overline{z}}\, d\gamma \\ F_1, F_2 \in \mathbf{H}^2 \Rightarrow \quad & \int_{\mathbf{R}} F_1(\gamma) F_2(\gamma)\, d\gamma = 0 \end{aligned}$$
En effet $L^2(\mathbf{R}, d\gamma) = \mathbf{H}^{2+} \perp \mathbf{H}^{2-}$ et $(\gamma \in \mathbf{R}) : F(\gamma) \in \mathbf{H}^{2+} \iff \overline{F(\gamma)} \in \mathbf{H}^{2-}$.

Semaine 10

1. En combinant convenablement les deux formules à la Cauchy on obtient la formule de Poisson :
$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\mathbf{R}} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{\gamma - z}\right) F(\gamma)\, d\gamma \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\pi} \frac{b}{(a-\gamma)^2 + b^2} F(\gamma)\, d\gamma \qquad (z = a + ib, \quad b > 0) \end{aligned}$$
2. On prend note de plusieurs formules importantes relatives au noyau de Poisson :
$$\frac{1}{\gamma - z} - \frac{\gamma}{1+\gamma^2} = \frac{1 + \gamma z}{\gamma - z}\frac{1}{1+\gamma^2} = \frac{z}{1+\gamma^2} + \frac{1+z^2}{(\gamma - z)(1+\gamma^2)}$$
3. La formule de Poisson permet de démontrer des théorèmes (à la Fatou) plus précis sur le lien entre $F(z)$ et ses valeurs au bord $F(\gamma)$. Mais dans le cours nous avons d'abord exploité le lien entre $\mathbf{H}^{2+}$ et $\mathbf{H}^2(D(0,1))$. En effet $z \mapsto \alpha = \frac{z-i}{z+i}$ représente conformément D^+ sur $D(0,1)$, avec $\gamma \mapsto e^{i\theta}$, $\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{d\gamma}{\pi(1+\gamma^2)}$. Soit $F(\gamma) \in L^2(\mathbf{R}, d\gamma)$ et posons $f(e^{i\theta}) = \sqrt{\pi}\frac{\gamma+i}{i}F(\gamma)$. Cela établit une identification isométrique entre $L^2(\mathbf{R}, d\gamma)$ et $L^2(S^1, \frac{d\theta}{2\pi})$.

4. On prouve que cela identifie $\mathbf{H}^{2+}$, qui est vu comme un sous-espace de $L^2(\mathbf{R}, d\gamma)$, avec $\mathbf{H}^2(D(0,1))$ qui est vu comme un sous espace de $L^2(S^1, \frac{d\theta}{2\pi})$. De plus dans cette identification on a bien $f(\alpha) = \sqrt{\pi}\frac{z+i}{i}F(z)$ ($|\alpha| < 1$, $\mathrm{Im}(z) > 0$).
5. On peut alors transférer la théorie de factorisation faite pour le disque au demi-plan. Les conséquences en sont nombreuses (pour $F \in \mathbf{H}^{2+}$, non identiquement nulle) :
   – les zéros β_j de F dans D^+ vérifient (avec leurs multiplicités) :

$$\sum_j \frac{\mathrm{Im}(\beta_j)}{|\beta_j + i|^2} < \infty$$

   ce qui s'écrit aussi $\sum_{|\beta_j|\leq 1} \mathrm{Im}(\beta_j) + \sum_{|\beta_j|>1} \frac{\mathrm{Im}(\beta_j)}{|\beta_j|^2} < \infty$.
   – on a (Théorème de Wiener) :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\big|\log|F(\gamma)|\big|}{1+\gamma^2}\, d\gamma < \infty$$

   – on a une factorisation : $F(z) = c \cdot e^{ikz} \cdot B(z) \cdot S(z) \cdot E(z)$ avec :

$$\begin{aligned}
|c| &= 1 \\
k &\geq 0 \\
B(z) &= \prod_{|\beta_j|\leq 1} \frac{z - \beta_j}{z - \overline{\beta_j}} \prod_{|\beta_j|>1} \frac{1 - z/\beta_j}{1 - z/\overline{\beta_j}} \\
E(z) &= \exp\left(\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbf{R}} \frac{1+\gamma z}{\gamma - z} \log|F(\gamma)| \frac{d\gamma}{1+\gamma^2}\right) \\
S(z) &= \exp\left(-\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbf{R}} \frac{1+\gamma z}{\gamma - z} \frac{d\nu(\gamma)}{1+\gamma^2}\right) \\
&(\nu \text{ mesure positive singulière avec } \int_{\mathbf{R}} \frac{d\nu(\gamma)}{1+\gamma^2} < \infty)
\end{aligned}$$

   On peut normaliser $B(z)$ autrement, ce qui changerait c : par exemple si 0 n'est pas point d'accumulation des β_j on peut prendre tous les termes comme ceux pour $|\beta_j| > 1$ dans la formule donnée.
   – On notera que $\log|E|$ (resp. $\log|S|$) est l'intégrale de Poisson de $\log|F(\gamma)|$ (resp. de la mesure $-\nu$). Le facteur spécial e^{ikz} provient de l'éventuelle masse en $e^{i\theta} = 1$ de la mesure singulière intervenant dans la factorisation dans le disque de $f(\alpha)$.
   – Si $F(z) \neq 0$, $z = a + ib$, $b > 0$, on déduit de la factorisation la formule suivante, disons « de Jensen-Poisson-Smirnov-Nevanlinna » :

$$\log|F(z)| + kb + \int_{\mathbf{R}} \frac{b}{\pi((a-\gamma)^2 + b^2)} d\nu(\gamma) + \sum_j \log\left|\frac{z - \overline{\beta_j}}{z - \beta_j}\right| = \int_{\mathbf{R}} \frac{b}{\pi((a-\gamma)^2 + b^2)} \log|F(\gamma)|\, d\gamma$$

6. On définit $\mathbf{H}^\infty(D^+)$ comme étant l'espace vectoriel des fonctions analytiques bornées dans D^+. Les facteurs c, e^{ikz}, $B(z)$ et $S(z)$ sont tous dans $\mathbf{H}^\infty$, avec des valeurs au bord de module (p.p.) 1 : ce sont des fonctions intérieures, et toute fonction intérieure est un produit $c \cdot e^{ikz} \cdot B(z) \cdot S(z)$. Ici on n'a plus $\mathbf{H}^\infty \subset \mathbf{H}^2$, mais si $F \in \mathbf{H}^\infty$ alors $F(z)/(z+i) \in \mathbf{H}^2$. Cela permet de montrer que le théorème de Wiener et la factorisation marche aussi, avec un facteur extérieur E qui sera dans $\mathbf{H}^\infty$. De plus on prouve que la formule de Poisson marche pour $F(z)$ ce qui permettra de préciser la notion de valeurs au bord (si on avait la version forte de Fatou pour le disque, on saurait déjà que $F(\gamma+i0^+)$ existe ponctuellement presque partout ; pour l'instant $F(\gamma)$, $\gamma \in \mathbf{R}$ est défini de manière indirecte comme $\gamma + i$ fois la limite L^2 de $F(\gamma + i\epsilon)/(\gamma + i\epsilon + i)$).
7. Nous prouvons le théorème important suivant : pour que $L \subset \mathbf{H}^{2+} \subset L^2(\mathbf{R}, d\gamma)$, fermé, soit invariant sous l'action du semi-groupe
$$F(\gamma) \mapsto e^{ih\gamma} \cdot F(\gamma), \qquad (h \geq 0),$$
il faut et il suffit qu'il soit invariant sous $F(\gamma) \mapsto \frac{\gamma-i}{\gamma+i} F(\gamma)$.
8. Ces deux conditions (pour $L \neq \{0\}$) sont équivalentes (théorème de Beurling-Lax) à ce que L soit de la forme $I \cdot \mathbf{H}^{2+}$ avec I une fonction intérieure qui est unique à une constante de module 1 près. Pour $F \in \mathbf{H}^{2+}$, non nulle, le plus petit espace fermé, invariant par ces semi-groupes, contenant F est $I_F \cdot \mathbf{H}^{2+}$.
9. Corollaire : soit $f \neq 0$, $f \in L^2(0, +\infty; dx)$. Pour que les $f(x - x_0)$, $x_0 \geq 0$ engendrent $L^2(0, +\infty; dx)$ il faut et il suffit que
$$\log \left| \int_0^\infty e^{-2\pi x} f(x)\, dx \right| = \int_{\mathbf{R}} \log |\widehat{f}(\gamma)| \frac{d\gamma}{\pi(1+\gamma^2)}$$

Semaine 11

1. Soit $f \in L^2(0, +\infty; dx)$, non nulle. On prouve que le $k \geq 0$ apparaissant dans la factorisation $H_f(z) = c \cdot e^{ikz} \cdot B(z) \cdot S(z) \cdot E(z)$ est tel que $k/2\pi$ est l'infimum du support (essentiel, fermé) de f (autrement dit le plus grand avec $f \in L^2(\frac{k}{2\pi}, +\infty; dx)$).
2. On démontre (pour des fonctions continues pour simplifier la notion de support) le Théorème de convolution de Titchmarsh : le support convexe fermé de la convolution de deux fonctions à supports compacts est l'enveloppe convexe de la somme des supports.
3. On définit les notions d'ordre et de type exponentiel pour une fonction analytique dans le plan, ou un secteur angulaire. On démontre un autre théorème de Paley-Wiener : une fonction entière est de la forme $F(z) = \int_{-T}^{T} g(u) e^{izu}\, du$ avec $g \in L^2$ si et seulement si $F(z)$ est de type exponentiel au plus T et est de carré sommable sur l'axe réel.

4. Pour cette démonstration on utilise la théorie des espaces de Hardy, mais aussi des théorèmes dans le style Phragmén-Lindelöf (on peut éliminer tout recours à la théorie de $\mathbf{H}^2$, mais sans doute pas aux résultats à la Phragmén-Lindelöf). On démontre en particulier : si $F(z)$ est analytique dans le secteur angulaire $\alpha < \operatorname{Arg}(z) < \beta$, si $|F|$ a une extension par continuité au bord, si F est d'ordre exponentiel strictement inférieur à $\pi/(\beta-\alpha)$, et si $|F| \leq 1$ sur le bord alors $|F| \leq 1$ dans le secteur angulaire.
5. Le résultat précédent vaut sous l'hypothèse plus faible que F est de type minimal pour l'ordre exponentiel $\pi/(\beta - \alpha)$.
6. On montre aussi : si $F(z)$ est analytique dans D^+, avec $|F|$ ayant une extension continue à $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, et si F est d'ordre exponentiel < 2 (ou ≤ 2 mais de type minimal pour l'ordre 2), si F est bornée sur $i\mathbf{R}^+$ et si $|F| \leq 1$ sur $\mathbf{R}$ alors on a $|F| \leq 1$ sur $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.
7. Soit $F(z)$ dans $\mathbf{H}^\infty$ ou $\mathbf{H}^2$ et soit $k \geq 0$ apparaissant dans la factorisation $F(z) = c \cdot e^{ikz} \cdot B(z) \cdot S(z) \cdot E(z)$. On prouve :

$$\limsup_{b \to +\infty} \frac{1}{b} \log |F(ib)| = -k$$

La partie délicate est de montrer $\limsup_{b \to +\infty} \frac{1}{b} \log |B(ib)| = 0$ pour un produit de Blaschke. Le nombre réel $h = -k$ est appelé « type moyen » de F. Il est donc négatif ou nul pour $F \in \mathbf{H}^\infty$ ou $F \in \mathbf{H}^2$.
8. On revient à l'étude du noyau de Poisson dans le demi-plan. Par mesure complexe sur $\mathbf{R}$, on entendra dorénavant une expression $\mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$ avec μ_j une mesure positive, finie sur tout compact. De manière équivalente μ est une famille compatible de mesures complexes (au sens strict) sur les intervalles $[-A, +A]$, $A \to \infty$. Sous l'hypothèse $\int_{\mathbf{R}} \frac{d|\mu|(\gamma)}{1+\gamma^2} < \infty$ on peut définir l'intégrale de Poisson, pour $b \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$:

$$P[\mu](a + ib) = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\pi} \frac{b}{(a-\gamma)^2 + b^2} \; d\mu(\gamma)$$

9. La fonction $P[\mu]$ est harmonique ; en fait elle est définie par cette formule et harmonique sur l'ouvert complémentaire dans $\mathbf{C}$ du support fermé de la mesure μ. Elle est identiquement nulle sur l'intersection (si elle est non vide) de $\mathbf{R}$ et de cet ouvert.
10. On prouve :

$$\forall \gamma_0 \in \mathbf{R} \quad \limsup_{\epsilon \to 0^+} \Big| P[\mu](\gamma_0 + i\epsilon) \Big| \leq \limsup_{k \to 0^+} \frac{\big|\mu[\gamma_0 - k, \gamma_0 + k]\big|}{2k}$$

puis on établit le Théorème de Fatou : en tout γ_0 tel que $\lim_{k \to 0^+} \frac{\mu[\gamma_0 - k, \gamma_0 + k]}{2k}$ existe (et elle existe Lebesgue-presque partout) on a

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} P[\mu](\gamma_0 + i\epsilon) = \lim_{k \to 0^+} \frac{\mu[\gamma_0 - k, \gamma_0 + k]}{2k}$$

Si $\mu = f(\gamma)d\gamma$ alors cette limite vaut $f(\gamma_0)$ en tout γ_0 qui est un point de Lebesgue de f.

11. On prouve aussi : si $\mu = g(\gamma)d\gamma$ avec g continue en γ_0 alors

$$\lim_{z \to \gamma_0,\, \mathrm{Im}(z)>0} P[\mu](z) = g(\gamma_0)$$

En particulier si g est continue sur $\mathbf{R}$ alors $P[g]$ s'étend par continuité sur $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ et coïncide avec g sur $\mathbf{R}$.

Semaine 12

1. On prouve que $P[\mu](\gamma + i\epsilon)d\gamma$ converge faiblement vers μ lorsque $\epsilon \to 0^+$, c'est-à-dire :
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbf{R}} P[\mu](\gamma + i\epsilon)k(\gamma)\, d\gamma = \int_{\mathbf{R}} k(\gamma)\, d\mu(\gamma)$$
pour toute fonction continue k à support compact.
2. On laisse en exercice la formule d'inversion de Stieltjes ($a < b$) :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^b P[\mu](\gamma + i\epsilon)\, d\gamma = \frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \mu(]a, b[) + \frac{1}{2}\mu(\{b\})$$

3. On aborde l'étude de la classe $\mathcal{N}(D)$ des fonctions ayant la propriété de Nevanlinna : ce sont les fonctions analytiques sur un ouvert connexe D donné de $\mathbf{C}$ qui peuvent s'écrire comme quotient de fonctions analytiques bornées sur D. Tout d'abord, pour $D = D(0, 1)$ on démontre le Théorème de Nevanlinna :
Soit $f(z)$ une fonction non nulle analytique sur le disque unité. Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est le quotient de deux fonctions analytiques bornées.
   (b) $\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty$
   (c) Il existe (de manière unique) c, $|c| = 1$, un produit de Blaschke $B(z)$, et une mesure réelle (on dit aussi signée), finie, μ tels que :

$$f(z) = c \cdot B(z) \cdot \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(e^{it})\right)$$

4. Si $f \not\equiv 0$ est dans $\mathcal{N}(D(0,1))$ alors la limite radiale $\widetilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$ existe et est non nulle en presque tout θ et de plus la partie absolument continue de la mesure μ dans la factorisation de Nevanlinna est $\log |\widetilde{f}(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$.
5. Une condition équivalente aux autres est que $\log^+ |f(re^{i\theta})|$ admette un majorant harmonique $u(re^{i\theta})$. En effet si c'est le cas les intégrales sont majorées par $u(0)$, donc f est de classe $\mathcal{N}$. Et réciproquement si f est de classe $\mathcal{N}$ on prendra pour u l'intégrale de Poisson de μ^+, partie positive de μ dans la décomposition de Hahn-Jordan.

6. Pour le demi-plan supérieur on a prouvé l'énoncé suivant :
Soit $F(z)$ une fonction non nulle analytique sur le demi-plan supérieur. Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) F est le quotient de deux fonctions analytiques bornées.
   (b) Il existe (de manière unique) c, $|c| = 1$, $h \in \mathbf{R}$, un produit de Blaschke $B(z)$, et une mesure réelle, μ avec $\int_{\mathbf{R}} \frac{d|\mu|(\gamma)}{1+\gamma^2} < \infty$, qui vérifient :
$$F(z) = c \cdot e^{-ihz} \cdot B(z) \cdot \exp\left(\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbf{R}} \frac{1+\gamma z}{\gamma - z}\frac{d\mu(\gamma)}{1+\gamma^2}\right)$$
7. Le nombre réel h est appelé « type moyen » de F. Il vaut $\limsup_{b\to+\infty} \frac{1}{b}\log|F(ib)|$.
8. Si $F \not\equiv 0$ est de classe $\mathcal{N}$ pour le demi-plan supérieur alors la limite verticale $\widetilde{F}(\gamma) = \lim_{\epsilon\to 0^+} F(\gamma + i\epsilon)$ existe et est non nulle en presque tout γ et la partie absolument continue de la mesure μ est $\log|\widetilde{F}(\gamma)|\, d\gamma$. En particulier
$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\left|\log|\widetilde{F}(\gamma)|\right|}{1+\gamma^2} d\gamma < \infty$$
9. Les espaces $\mathbf{H}^2(D^+)$ et $\mathbf{H}^\infty(D^+)$ sont inclus dans $\mathcal{N}(D^+)$.
10. On commence la démonstration d'un important théorème de M. G. Kreĭn :
Soit $F(z)$ une fonction entière. Les conditions suivantes sont équivalentes :
– F est de type exponentiel fini et
$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\log^+|F(\gamma)|}{1+\gamma^2} d\gamma < \infty$$
– F est de la classe $\mathcal{N}$ à la fois pour le demi-plan supérieur et pour le demi-plan inférieur.
De plus le type exponentiel de F est alors le maximum des types moyens dans les demi-plans supérieur et inférieur.
11. On a établi pour mener à bien la démonstration un autre théorème à la Phragmén-Lindelöf : si $F(z)$ est analytique dans le secteur angulaire $\alpha < \mathrm{Arg}(z) < \beta$, avec $\beta - \alpha < \pi$, si $|F|$ a une extension par continuité au bord, si F est d'ordre exponentiel strictement inférieur à $\pi/(\beta-\alpha)$ (ou même simplement si F est de type minimal pour cet ordre), et si $|F|$ est de type exponentiel fini sur le bord alors F est de type exponentiel fini dans le secteur angulaire. Mais le temps a manqué pour aborder dans ce cours la théorie générale de la fonction indicatrice de Phragmén-Lindelöf.

Semaine 13

1. Nous avons complété la démonstration du théorème de Kreĭn, y-compris l'affirmation $\tau = \max(h_+, h_-)$ avec τ le type exponentiel de f, h_+ son type moyen dans le demi-plan supérieur, h_- son type moyen dans le demi-plan inférieur. L'un des deux doit donc être non-négatif.
2. On notera que dans le cadre de cette preuve nous avons établi que toute fonction analytique F et de type exponentiel fini dans le demi-plan supérieur, telle que $|F|$ admette une extension continue à $\mathbf{R}$ avec $\int_{\mathbf{R}} \frac{\log^+ |F(\gamma)|}{1+\gamma^2} d\gamma < \infty$, est de classe $\mathcal{N}$.
3. Nous revenons au disque unité pour montrer que pour toute fonction analytique et tout $p > 0$ les fonctions :
$$0 \leq r < 1 \mapsto \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \qquad 0 \leq r < 1 \mapsto \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}$$
sont (continues) et croissantes. Les ensembles $\mathbf{H}^p$ des fonctions analytiques vérifiant $\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty$ sont des espaces vectoriels qui sont tous inclus dans $\mathcal{N}$.
4. Nous montrons que la condition :
$$\sup_{0\leq r<1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty$$
équivaut à
$$\limsup_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \Big| \log |f(re^{i\theta})| \Big| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty$$
5. Nous prouvons pour $f \in \mathcal{N}(D(0,1))$, non nulle, que la mesure $\mu(e^{i\theta})$ apparaissant dans la factorisation de Nevanlinna est la limite faible pour $r \to 1$ des mesures $\log |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$.
6. Comme corollaire nous prouvons que si f admet un prolongement analytique à travers un arc ouvert de S^1 alors la partie singulière de la mesure μ est supportée dans le complémentaire de cet arc.
7. Il en résulte que si F, de la classe $\mathcal{N}$ du demi-plan supérieur, admet un prolongement analytique à travers un intervalle ouvert de l'axe réel, alors la partie singulière de la mesure associée est supportée dans la complémentaire de cet intervalle ouvert. En particulier si la fonction F admet un prolongement analytique à un ouvert contenant le demi-plan supérieur fermé alors il n'y a pas de facteur singulier dans sa factorisation de Smirnov-Nevanlinna.
8. Pour le disque nous avons montré préalablement, pour tout produit de Blaschke :
$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \log |B(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = 0.$$

Nous montrons le résultat analogue, ce qui est moins simple, pour le demi-plan :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}} \frac{\log|B(\gamma+i\epsilon)|}{\pi(1+\gamma^2)}\,d\gamma = 0.$$

9. Cela permet de montrer que les mesures $\log|F(\gamma+i\epsilon)|\,d\gamma$ convergent faiblement (on intègre contre des fonctions continues à support *compact*) lorsque $\epsilon\to 0^+$ vers la mesure μ de la factorisation de Nevanlinna de F.
10. Finalement le cours s'est achevé sur une évocation rapide de l'application que l'on peut en faire à l'étude de la fonction dzêta de Riemann.

Compléments

1. On a vu que si h est une fonction harmonique (à valeurs complexes) sur $D(0,1)$ telle que les fonctions h_r soient de normes L^1 bornées alors il existe une unique mesure complexe (finie) μ sur S^1 telle que $h = P[\mu]$. Les $h_r(e^{i\,t})\frac{dt}{2\pi}$ convergent faiblement-étoile vers μ lorsque $r\to 1$.
2. On montre aussi (ce qui n'est pas impliqué a priori par une convergence faible-étoile) que leurs normes L^1 convergent vers la variation totale de la mesure μ. De plus il est vrai que $|h_r(e^{i\,t})|\frac{dt}{2\pi}$ converge faiblement-étoile vers $|\mu|$, où $|\mu|$ est la mesure des variations de μ. Le plus petit majorant harmonique de $|h|$ est $P[|\mu|]$ lorsque $h = P[\mu]$.
3. Soit $f\in\mathcal{N}(D(0,1))$, non nulle, et soit μ la mesure apparaissant dans la factorisation de Smirnov-Nevanlinna de f. On a alors :

$$|\mu|(S^1) = \lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\Big|\log|f(re^{i\theta})|\Big|\frac{d\theta}{2\pi}$$

4. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f\not\equiv 0$, analytique dans le disque unité ouvert, soit un produit de Blaschke (à une constante de module 1 près) est donc $\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\big|\log|f(re^{i\theta})|\big|\frac{d\theta}{2\pi} = 0$.
5. Il est naturel d'introduire la sous-classe $\mathcal{N}^+(D(0,1))\subset\mathcal{N}(D(0,1))$ comprenant la fonction nulle et les fonctions de $\mathcal{N}$ pour lesquelles la partie singulière de la mesure apparaissant dans la factorisation est négative (les espaces de Hardy sont inclus dans $\mathcal{N}^+$). On peut prouver (théorème de M$^{\text{me}}$ Kotchine) :

$$f\in\mathcal{N}^+ \Leftrightarrow \quad \lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi}\log^+|\widetilde{f}(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}$$

6. Le facteur extérieur d'un élément de $\mathbf{H}^p(D(0,1))$ est aussi dans $\mathbf{H}^p$ et le facteur singulier est associé à une mesure singulière négative (enfin, positive, mais avec un signe moins devant, comme dans la façon d'écrire la factorisation pour $\mathbf{H}^1$).

7. Une fonction générale dans la classe $\mathcal{N}$ du demi-plan supérieur n'a pas de raison d'être de type exponentiel fini, ni même d'ordre exponentiel fini. Mais elle sera de type exponentiel fini dans tout secteur $|z| \geq \epsilon > 0$, $\mathrm{Arg}(z) \in [\theta, \pi - \theta]$, pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. De plus elle sera de type minimal pour l'ordre exponentiel deux dans tout demi-plan $\mathrm{Im}(z) \geq \epsilon > 0$.
8. On peut se demander quelle est la condition analogue pour le demi-plan de la condition $\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty$ pour le disque unité. La traduction directe (par représentation conforme) de cette condition pour F dans le demi-plan donne quelque chose de peu élégant faisant intervenir les cercles $|z - i| = r|z + i|$, $0 < r < 1$. Si l'on recherche une condition portant sur des intégrales de $\log^+ |F(z)|$ sur les droites horizontales, le critère suivant est très satisfaisant : une fonction $F(z)$ analytique dans le demi-plan supérieur, est dans la classe $\mathcal{N}$ si et seulement si :
$$\exists C \quad \forall b > 0 \qquad \int_{\mathbf{R}} \frac{\log^+ |F(a+ib)|}{1 + a^2 + b^2} \, da \leq C$$
Il est dû à Wishard (1942) et à Flett et Kuran (1971) pour son extension au cas sous-harmonique. La démonstration en est donnée dans le livre de Rosenblum et Rovnyak de la bibliographie. Il existe d'autres conditions, seulement suffisantes (voir par exemple le premier chapitre du livre de de Branges), qui dans la pratique peuvent être plus utiles que la condition nécessaire et suffisante ci-dessus. On peut aussi se contenter de la condition d'apparence plus faible qui dit que l'intégrale double sur $b_1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq b_2$ de la même quantité est $O(b_2 - b_1)$. Par ailleurs il est aussi possible de caractériser les fonctions de la classe $\mathcal{N}$ qui sont de « type moyen » négatif ou nul.
9. Le critère donné au paragraphe précédent se traduit par une nouvelle caractérisation de l'appartenance d'une fonction analytique f dans le disque unité à la classe $\mathcal{N}$: cela sera le cas si et seulement si les moyennes de $\log^+ |f|$ sur les cercles C_ϵ de rayon ϵ, qui sont tangents en 1 au cercle unité, sont (finies et) $O(1/\epsilon)$, $0 < \epsilon < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\sup_{0<\epsilon<1} \int_{C_\epsilon} \log^+ |f(z)| \, |dz| < \infty$.

Voir aussi les énoncés et corrigés du devoir et de l'examen pour quelques résultats supplémentaires.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

Analyse Complexe, de Fourier, Hilbertienne
Cours de DEA (1^{er} semestre 2003-2004)

J.F. Burnol

Devoir et son corrigé

Énoncé

Le 10 décembre 2003 : ce devoir est à rendre au plus tard le mercredi 7 janvier 2004.
Soyez concis : évitez de reproduire des calculs déjà identiquement effectués dans le cours.
Soyez concis : les démonstrations d'apparence trop longues ne seront pas lues.
Soyez précis : il n'y aura aucun "bénéfice du doute" sur les points subtils éventuels.

1. Soit f une fonction mesurable sur $\mathbf{R}$. On note :

$$U_f = \{x : \exists\epsilon > 0 \int_{]x-\epsilon,x+\epsilon[} |f(u)|du = 0\}$$

Montrer que U_f est un ouvert et que tout ouvert sur lequel f est presque partout nulle est inclus dans U_f. Montrer que f est presque partout nulle sur U_f. Le fermé complémentaire de U_f s'appelle le support (fermé, essentiel) de la fonction mesurable f.

2. Soit $\phi(x)$ une fonction sommable sur $\mathbf{R}$. Soit $g(y) = \int_{\mathbf{R}} \exp(2\pi ixy)\phi(x)dx$ sa transformée de Fourier, qui est une fonction continue. On suppose que g est de carré sommable sur $\mathbf{R}$. Montrer qu'il en est de même pour ϕ. Vous devrez justifier tout résultat concernant Fourier-Plancherel autre que ceux démontrés dans le cours, mais ne devez pas redémontrer ce qui a été déjà fait dans le cours.

3. On dit qu'une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de nombres complexes est de "type positif" si pour tout choix de $a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$, nuls sauf un nombre fini d'entre eux, on a :

$$\sum_{n,m} a_n\overline{a_m}\gamma_{m-n} \geq 0$$

Montrer que cela est le cas si et seulement si les γ_n sont les coefficients de Fourier d'une mesure positive finie sur S^1. Ind. : Montrer que les fonctions

$$h_N(\theta) = \frac{1}{N+1} \sum_{|m|\leq N} (N+1-|m|)\gamma_m e^{mi\theta}$$

sont à valeurs positives. En obtenir la mesure comme limite faible.

4. On se donne des vecteurs X_n, $n \in \mathbf{Z}$, dans un espace de Hilbert, formant une "suite stationnaire". En utilisant la théorie du cours, montrer que si X_0 est dans l'adhérence des combinaisons des X_n, $n \leq -1$, alors il est aussi dans l'adhérence des combinaisons des X_n, $n \geq 1$. Plus généralement on note P_X le "passé lointain", $P_X = \cap_n \overline{\mathrm{Vect}(X_m, m \leq n)}$ et F_X le "futur lointain", $F_X = \cap_n \overline{\mathrm{Vect}(X_m, m \geq n)}$. Montrer $P_X = F_X$.

5. Ce problème est composé de questions qui se suivent, plus ou moins.

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq 0$. En utilisant la série entière de $\log(1-x)$ déterminer la série de Fourier de la fonction $\log|\alpha e^{i\theta} - \beta|$ de $L^2(S^1, d\theta/2\pi)$. Ind. : pour le cas spécial $|\alpha| = |\beta|$ on pourra montrer que $\log|\alpha e^{i\theta} - \lambda\beta|$ tend au sens L^2 vers $\log|\alpha e^{i\theta} - \beta|$ lorsque $\lambda > 1$ tend vers 1.
2. En déduire, pour $R > 0$ et pour $\beta \in \mathbf{C}$ les valeurs des intégrales : $\int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - \beta|\frac{d\theta}{2\pi}$, $\int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - \beta|\sin(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}$, ainsi que $\int_0^{\pi} \log\left|\frac{Re^{i\theta}-\beta}{Re^{i\theta}-\overline{\beta}}\right|\sin(\theta)\,d\theta$.
3. Soit $P(z) = \prod_{1\leq j\leq N}(1-\lambda_j z)$ avec $N \geq 1$ et $\forall j\ \lambda_j \neq 0$. Que vaut $\int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}$? Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur les λ_j pour que P soit une fonction extérieure pour le disque unité ? Montrer que dans la factorisation $cBSE$ de P dans $\mathbf{H}^\infty(|z| < 1)$ le facteur extérieur E est un polynôme que l'on exprimera explicitement et le facteur singulier S est absent.
4. Soit $f(z)$ une fonction qui est analytique sur un voisinage ouvert du disque unité fermé. On suppose d'abord que f n'a pas de zéros sur le disque unité fermé. En utilisant la fonction $1/f$, montrer directement que $1 \in L^2(S^1, d\theta/2\pi)$ est dans l'adhérence L^2 de f, zf, $z^2 f$, ... En déduire que f est à une constante multiplicative près une fonction extérieure. Montrer que le résultat persiste même si f a des zéros sur le cercle unité. Dans le cas général, montrer qu'il n'y a pas de facteur singulier dans la factorisation, et donner la condition nécessaire et suffisante sur les zéros de f pour que f soit à une constante multiplicative près une fonction extérieure.
5. On sait donc que la fonction $1 - z$ est une fonction extérieure sur le disque unité. Prouver directement que les $z^n - z^{n+1}$, $n \geq 0$ engendrent $\mathbf{H}^2(|z| < 1)$.
6. Soit $\gamma_0 \in \mathbf{R}$. Déterminer, pour $z \notin \mathbf{R}$ la valeur de
$$\exp\left(\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbf{R}} \frac{1+\gamma z}{\gamma - z}\log|\gamma - \gamma_0|\frac{d\gamma}{1+\gamma^2}\right)$$
Ind. : on pourra effectuer les changements de variables $\alpha = \frac{z-i}{z+i}$, $e^{i\theta} = \frac{\gamma-i}{\gamma+i}$, $e^{i\theta_0} = \frac{\gamma_0-i}{\gamma_0+i}$ et utiliser les résultats précédents.
7. Soit $B(z)$ un produit de Blaschke pour le demi-plan $\mathrm{Im}(z) > 0$, avec ses zéros β, comptés avec leurs multiplicités (et vérifiant la condition de Blaschke). Soit $R > 0$.

Prouver

$$\frac{2}{\pi R}\int_0^\pi \log|B(Re^{i\theta})|\sin(\theta)d\theta = -2\sum_\beta \frac{\mathrm{Im}(\beta)}{\max(|\beta|,R)^2}$$

8. Soit $F \in \mathbf{H}^2(\mathrm{Im}(z) > 0)$, non nulle. Soit $k_F \geq 0$ le nombre apparaissant dans le facteur spécial e^{ikz} de la factorisation de F. Prouver :

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{2}{\pi R}\int_0^\pi \log|F(Re^{i\theta})|\sin(\theta)d\theta = -k_F$$

On aura peut-être besoin d'établir et d'utiliser l'inégalité $\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z-\gamma|^2} \leq \frac{2}{\sin(\theta)}\frac{R}{R^2+\gamma^2}$ pour $z = Re^{i\theta}$, $R > 0$, $0 < \theta < \pi$, et $\gamma \in \mathbf{R}$.

Correction

1. Si $x \in U_f$ il existe $\epsilon > 0$ avec $\int_{]x-\epsilon,x+\epsilon[} |f(u)|du = 0$; donc pour $|y-x| < \epsilon/2$ on a $\int_{]y-\epsilon/2,y+\epsilon/2[} |f(u)|du = 0$ et ainsi $y \in U_f$. Donc U_f est ouvert.

Soit U ouvert tel que f soit presque partout nulle sur U. Soit $x \in U$ et soit $\epsilon > 0$ avec $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset U$. Comme f est presque partout nulle sur $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ on a $\int_{]x-\epsilon,x+\epsilon[} |f(u)|du = 0$ et donc $x \in U_f$: ainsi $U \subset U_f$.

L'ouvert U_f est union dénombrable d'intervalles $]a_j, b_j[$ et il suffit de montrer que f est presque partout nulle sur chacun d'entre eux. Il suffira de montrer que f est presque partout nulle sur $[a_j+\frac{1}{N}, b_j-\frac{1}{N}]$, pour $N \gg 1$. On recouvre ce compact par un nombre fini d'intervalles du type $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ tels que $\int_{]x-\epsilon,x+\epsilon[} |f(u)|du = 0$. Comme la somme des fonctions indicatrices de ces intervalles majore la fonction $\mathbf{1}_{[a_j+\frac{1}{N},b_j-\frac{1}{N}]}$ on a aussi en sommant $\int_{[a_j+\frac{1}{N},b_j-\frac{1}{N}]} |f(u)|du = 0$ donc f est presque partout nulle sur $[a_j+\frac{1}{N}, b_j-\frac{1}{N}]$, c.q.f.d.

2. Comme g est de carré sommable, elle est la transformée de Fourier-Plancherel d'une certaine fonction G de $L^2(\mathbf{R}, dx)$. Par un lemme utilisé dans le cours on sait qu'alors la fonction $y \mapsto \int_{y-1}^{y+1} g(z)\,dz$ est la transformée de Fourier-Plancherel de la fonction $\frac{\sin 2\pi x}{\pi x}G(x)$ (qui est à la fois L^1 et L^2).

Par ailleurs on a la formule $g(y) = \int_{\mathbf{R}} \exp(2\pi ixy)\phi(x)dx$ par hypothèse avec ϕ de classe L^1. Par le théorème de Fubini il vient $\int_{y-1}^{y+1} g(z)\,dz = \int_{\mathbf{R}} \exp(2\pi ixy)\frac{\sin 2\pi x}{\pi x}\phi(x)dx$.

Les deux fonctions sommables $\frac{\sin 2\pi x}{\pi x}G(x)$ et $\frac{\sin 2\pi x}{\pi x}\phi(x)$ ont donc la même transformée de Fourier, ce qui par la formule d'inversion de Lévy prouve qu'elles sont égales (p.p.). Mais alors $\phi = G$ presque partout et donc ϕ est bien de carré sommable.

3. Par hypothèse on a :

$$\sum_{n,m} a_n\overline{a_m}\gamma_{m-n} \geq 0$$

pour tout choix fini de nombres complexes a_n. Prenons $a_n = e^{-ni\theta}$, pour $0 \leq n \leq N$, et $a_n = 0$ pour $n < 0$ ou $n > N$. On obtient :

$$\sum_{n,m:\ 0\leq n,m\leq N} e^{(m-n)i\theta}\gamma_{m-n} \geq 0$$

Mais cela donne exactement :

$$\sum_{-N\leq k\leq +N} (N+1-|k|)e^{ki\theta}\gamma_k \geq 0$$

Donc la fonction de l'énoncé $h_N(\theta)$ est bien à valeurs positives ou nulles. Comme $\int_0^{2\pi} h_N(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = 1$ on peut appliquer un théorème du cours et en déduire l'existence d'une mesure finie sur S^1 telle qu'une suite extraite des mesures $h_N(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}$ converge faiblement vers μ. La mesure μ sera une mesure positive et son Jieme coefficient de Fourier sera la limite des Jiemes coefficients de Fourier pour la suite extraite des $h_N(\theta)$: cela donne exactement que le Jieme coefficient de Fourier de μ est γ_J.

Réciproquement si on peut écrire $\gamma_n = \int_{S^1} z^{-n} d\mu$ ($z = e^{i\theta}$) avec une mesure positive finie alors

$$\begin{aligned}\sum_{n,m} a_n \overline{a_m} \gamma_{m-n} &= \int_{S^1} \sum_{n,m} a_n \overline{a_m} z^{n-m} d\mu \\ &= \int_{S^1} |\sum_n a_n z^n|^2 d\mu \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

les sommes étant toutes finies par hypothèse.

4. Supposer que X_0 est dans l'adhérence des X_n, $n \leq -1$ c'est supposer que la suite stationnaire X est "déterministe". Par le cours et le théorème de Szëgo-Wold-Kolmogorov-Krein cela signifie exactement que la partie absolument continue de la mesure spectrale μ_X de X a une densité h avec $\int \log h \, d\theta = -\infty$.

On fait maintenant la remarque que la suite $X'_n = X_{-n}$ est aussi une suite stationnaire, dont les covariances valent :

$$\begin{aligned}\gamma'_n = (X'_n, X'_0) = (X_{-n}, X_0) = \overline{(X_0, X_{-n})} &= \overline{\gamma_n} \\ &= \int_{S^1} \overline{z^{-n}} \, d\mu(z) \\ &= \int_{S^1} z^{-n} \, d\mu(\overline{z}),\end{aligned}$$

autrement dit la mesure spectrale de X' est la mesure μ^τ définie par $\mu^\tau(A) = \mu(\overline{A})$, pour $A \subset S^1$ mesurable.

La densité de la partie absolument continue de μ^τ étant la fonction $h(-\theta)$, il est clair que la suite X' est elle aussi "déterministe". Donc X'_0 est dans l'adhérence des X'_n, $n \leq -1$, c'est-à-dire, X_0 est dans l'adhérence des (combinaisons des) X_m, $m \geq 1$.

Plus généralement rappelons la décomposition de Wold : $X_n = Y_n + Z_n$. On a aussi une décomposition de Wold pour X' : $X'_n = Y'_n + Z'_n$. Posons $Y_n^{(2)} = Y'_{-n}$ et $Z_n^{(2)} = Z'_{-n}$. On a donc $X_n = Y_n^{(2)} + Z_n^{(2)}$. De plus les $Y_n^{(2)}$ sont tous perpendiculaires aux $Z_m^{(2)}$ et les $Y_n^{(2)}$ comme les $Z_n^{(2)}$ sont dans l'histoire de X. On vient de voir que comme Z' est déterministe il en est de même de $Z^{(2)}$. Le même raisonnement sur la mesure spectrale montrerait que comme Y' est purement innovante il en est de même pour $Y^{(2)}$. Mais nous avons montré en cours que la décomposition de Wold est unique. C'est donc que

$$Y_n = Y_n^{(2)} = Y'_{-n} \text{ et } Z_n = Z_n^{(2)} = Z'_{-n}$$

L'histoire de Z (espace engendré par les Z_n) est donc identique à l'histoire de Z'. Or l'histoire de Z est par construction le passé lointain de X tandis que l'histoire de

Z' est le futur lointain de X. Les deux espaces P_X et F_X sont donc identiques ! (ce qui confirme l'adage "rien de nouveau sous le soleil"...)

5. 1. Supposons $|\alpha| > |\beta|$: on a alors

$$\begin{aligned}
\log|\alpha e^{i\theta} - \beta| &= \log|\alpha| + \log|1 - \frac{\beta}{\alpha}e^{-i\theta}| \\
&= \log|\alpha| + \mathrm{Re}\left(-\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{\beta^k}{\alpha^k}e^{-ki\theta}\right) \\
&= \log|\alpha| - \sum_{j>0}\frac{1}{2j}\left(\frac{\overline{\beta}^j}{\overline{\alpha}^j}e^{ji\theta} + \frac{\beta^j}{\alpha^j}e^{-ji\theta}\right)
\end{aligned}$$

Supposons $|\alpha| < |\beta|$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\log|\alpha e^{i\theta} - \beta| &= \log|\beta| + \log|1 - \frac{\alpha}{\beta}e^{i\theta}| \\
&= \log|\beta| + \mathrm{Re}\left(-\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{\alpha^k}{\beta^k}e^{ki\theta}\right) \\
&= \log|\beta| - \sum_{j>0}\frac{1}{2j}\left(\frac{\alpha^j}{\beta^j}e^{ji\theta} + \frac{\overline{\alpha}^j}{\overline{\beta}^j}e^{-ji\theta}\right)
\end{aligned}$$

Si $0 \neq |\alpha| = |\beta|$, posons, pour $\lambda \geq 1$: $g_\lambda(e^{i\theta}) = \log|\alpha e^{i\theta} - \lambda\beta|$. Lorsque l'on parcourt une droite la distance à un point fixé décroît, puis croît après avoir franchi la projection du point sur la droite. Si l'on trace la demi-droite perpendiculaire en un point P à un cercle et extérieure au cercle, la distance entre un point fixé Q du cercle et un point P' de la demi-droite est donc une fonction croissante de P' lorsque P' va vers l'infini. Il en résulte que $\lambda \mapsto g_\lambda(e^{i\theta})$ est une fonction croissante de λ sur $[1, +\infty[$. On a donc pour $1 < \lambda < 2$ les inégalités :

$$0 < g_\lambda(e^{i\theta}) - g_1(e^{i\theta}) \leq g_2(e^{i\theta}) - g_1(e^{i\theta}),$$

(en remarquant que pour $e^{i\theta_0} = \frac{\beta}{\alpha}$ cela s'écrit $0 < +\infty \leq +\infty$), et comme la fonction $(g_2 - g_1)^2$ est clairement intégrable (singularité logarithmique de $g_1 = \log|\alpha| + \log 2\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}$ en θ_0) on a une convergence presque partout vers zéro de $|g_\lambda - g_1|^2$, qui est dominée, ce qui prouve $\|g_\lambda - g_1\|_2 \to_{\lambda\to 1^+} 0$. Donc pour obtenir les coefficients de la série de Fourier de g_1 on prend les limites pour $\lambda \to 1^+$ de ceux pour g_λ ; autrement dit les formules pour $|\alpha| < |\beta|$ marchent pour $|\alpha| = |\beta|$. On remarquera a posteriori qu'il n'y a pas de discontinuité avec les formules pour $|\alpha| > |\beta|$.

5. 2. En prenant $\alpha = R$ et en consultant le résultat précédent on obtient :

$$\begin{aligned}
R > |\beta| \Rightarrow \quad & \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - \beta| \, \frac{d\theta}{2\pi} = \log R \\
& \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - \beta| e^{i\theta} \, \frac{d\theta}{2\pi} = -\frac{\beta}{2R} \\
& \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - \beta| \sin(\theta) \, \frac{d\theta}{2\pi} = -\frac{\mathrm{Im}(\beta)}{2R} \\
& \int_0^{2\pi} \log\left|\frac{Re^{i\theta} - \beta}{Re^{i\theta} - \overline{\beta}}\right| \sin(\theta) \, d\theta = -2\pi \, \frac{\mathrm{Im}(\beta)}{R} \\
& \int_0^{\pi} \log\left|\frac{Re^{i\theta} - \beta}{Re^{i\theta} - \overline{\beta}}\right| \sin(\theta) \, d\theta = -\pi \, \frac{\mathrm{Im}(\beta)}{R} \\
R \leq |\beta| \Rightarrow \quad & \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - \beta| \, \frac{d\theta}{2\pi} = \log|\beta| \\
& \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - \beta| e^{i\theta} \, \frac{d\theta}{2\pi} = -\frac{R}{2\overline{\beta}} = -\frac{R\beta}{2|\beta|^2} \\
& \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - \beta| \sin(\theta) \, \frac{d\theta}{2\pi} = -\frac{R\,\mathrm{Im}(\beta)}{2|\beta|^2} \\
& \int_0^{2\pi} \log\left|\frac{Re^{i\theta} - \beta}{Re^{i\theta} - \overline{\beta}}\right| \sin(\theta) \, d\theta = -2\pi R \, \frac{\mathrm{Im}(\beta)}{|\beta|^2} \\
& \int_0^{\pi} \log\left|\frac{Re^{i\theta} - \beta}{Re^{i\theta} - \overline{\beta}}\right| \sin(\theta) \, d\theta = -\pi R \, \frac{\mathrm{Im}(\beta)}{|\beta|^2}
\end{aligned}$$

On a utilisé dans chaque cas la parité en θ de la fonction intégrée dans les dernières intégrales.

5. 3. Par le résultat précédent on a :

$$\int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_j \log^+ |\lambda_j|$$

Par ailleurs comme $\log|P(0)| = 0$ la condition nécessaire et suffisante pour que P soit une fonction extérieure pour le disque unité est donc que tous les λ_j vérifient $|\lambda_j| \leq 1$, ou encore que les racines de P soient à l'extérieur ou sur le cercle unité.

Donc si $|\lambda| \leq 1$, $1 - \lambda z$ est une fonction extérieure. Par contre si $|\lambda| > 1$, on a un zéro en λ^{-1} et on factorise en mettant en évidence le terme de Blaschke :

$$1 - \lambda z = \frac{1/\lambda - z}{1 - z/\overline{\lambda}} \, \frac{|\lambda|}{\overline{\lambda}} \cdot |\lambda| \left(1 - \frac{z}{\overline{\lambda}}\right),$$

où l'on constate l'absence de c et du facteur singulier S. En faisant le produit de toutes ces contributions on obtient que dans la factorisation $P = cBSE$ on a $c = 1$, $S = 1$, et :

$$E(z) = \prod_{|\lambda_j|\leq 1} (1-\lambda_j z) \cdot \prod_{|\lambda_j|>1} |\lambda_j| \left(1 - \frac{z}{\overline{\lambda_j}}\right)$$

5. 4. On suppose que f est analytique sur un voisinage du disque unité fermé, donc au moins sur un disque $D(0, 1+\epsilon)$, $\epsilon > 0$, et qu'elle n'a pas de zéros sur $\overline{D(0,1)}$, donc on peut prendre $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que f n'ait pas de zéros dans $D(0, 1+\epsilon)$. La fonction $1/f$ a sa série entière de rayon de convergence au moins $1 + \epsilon$. Cette série converge donc absolument uniformément sur $\overline{D(0,1)}$, et en prenant ses sommes partielles on obtient des polynômes $P(z)$ avec $\sup_{|z|\leq 1} |P(z) - 1/f(z)|$ arbitrairement petit. Mais alors $\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta}) - 1/f(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$, et donc aussi (puisque f est bornée sur S^1)

$$\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) - 1|^2 \frac{d\theta}{2\pi},$$

peuvent être rendus arbitrairement petits. Donc par le théorème de Beurling f est à une constante multiplicative près une fonction extérieure (*nota bene :* en fait il suffit d'utiliser la formule de Jensen pour conclure $\log|f(0)| = \int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$, ce qui caractérise les fonctions extérieures à une constante de module 1 près ; ou encore on fait directement appel à la formule de Jensen-Poisson pour explicitement montrer que f est une fonction extérieure à une constante près).

Si f a des zéros sur le cercle unité (mais pas à l'intérieur), on écrit $f(z) = \prod_{|\lambda_j|=1}(1-\lambda_j z) g(z)$ avec $g(z)$ sans zéros sur le disque unité, et comme le premier terme est une fonction extérieure par la question précédente, on obtient à nouveau que f est une fonction extérieure à une constante de module 1 près.

Dans le cas général, on écrit $f(z) = \prod_{|\alpha_j|>1}(1-\alpha_j z) k(z)$ avec $k(z)$ du type précédent donc extérieur à une constante près, et le premier terme est traité à la question précédente et n'a pas de facteur singulier. Ainsi la fonction f n'a pas de facteur singulier et la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit à une constante près une fonction extérieure est l'absence de zéros dans l'intérieur du disque unité.

5. 5. Première méthode : supposons que $f \sim \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ soit perpendiculaire aux $z^n - z^{n+1}$. C'est donc que $c_n = c_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Mais alors $\sum_n |c_n|^2 < \infty$ n'est possible que si ils sont tous nuls.

Deuxième méthode : Posons $u_n = z^n - z^{n+1}$, puis $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1 - z^{n+1}$, puis $w_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = n + 1 - (z + z^2 + \cdots + z^{n+1})$. On a alors $\|1 - \frac{w_n}{n+1}\|^2 = \frac{1}{n+1} \to_{n\to\infty} 0$.

5. 6. On veut déterminer la valeur, pour $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, et $\gamma_0 \in \mathbf{R}$, de :

$$A(z) = \exp\left(\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{1+\gamma z}{\gamma - z} \log|\gamma - \gamma_0| \frac{d\gamma}{1+\gamma^2}\right)$$

On effectue les changements de variables indiqués :

$$\alpha=\frac{z-i}{z+i},\ z=i\frac{1+\alpha}{1-\alpha},\ e^{i\theta}=\frac{\gamma-i}{\gamma+i},\ \gamma=i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}},\ \frac{d\theta}{2\pi}=\frac{d\gamma}{\pi(1+\gamma^2)}\ ,$$

qui peuvent paraître effrayants, mais ne le sont pas en fait, et de plus ont déjà été rencontrés en cours. Un calcul simple donne en effet

$$\frac{1+\gamma z}{\gamma-z}=i\,\frac{e^{i\theta}+\alpha}{e^{i\theta}-\alpha}\ ,$$

et donc :

$$A(z)=a(\alpha)=\exp\left(\int_{S^1}\frac{e^{i\theta}+\alpha}{e^{i\theta}-\alpha}\log|\gamma-\gamma_0|\,\frac{d\theta}{2\pi}\right)\ ,$$

où l'on a volontairement laissé $\log|\gamma-\gamma_0|$ tel quel. Posons $f(\beta)=w-\gamma_0$ avec $w=i\frac{1+\beta}{1-\beta}$, il s'agit donc d'une fraction rationnelle de β avec un pôle simple en 1 et un zéro simple en $e^{i\theta_0}$, donc *sans calcul* :

$$f(\beta)=c\,\frac{\beta-e^{i\theta_0}}{\beta-1}$$

pour une certaine constante non nulle $c\in\mathbf{C}$. Alors $a(\alpha)$ est $|c|$ fois le quotient du facteur extérieur de $\beta\mapsto\beta-e^{i\theta_0}$ et de celui de $\beta\mapsto\beta-1$, et nous savons que ces fonctions sont à des constantes de module 1 près extérieures sur le disque unité. Donc, *sans calcul* :

$$A(z)=a(\alpha)=|c|\,c'\,\frac{\alpha-e^{i\theta_0}}{\alpha-1}=c''\,(z-\gamma_0)$$

avec des constantes c' et c'' de module 1. Mais en $z=i$ on a

$$A(i)=\exp(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\log|\gamma-\gamma_0|\frac{d\gamma}{1+\gamma^2})>0\ ,$$

et donc $c''=|i-\gamma_0|/(i-\gamma_0)$. Le résultat final est donc obtenu presque sans calculs :

$$\mathrm{Im}(z)>0\Rightarrow\quad A(z)=\frac{|i-\gamma_0|}{i-\gamma_0}\,(z-\gamma_0)$$

Mais **attention**, comme nous l'avons écrit tout cela ne vaut *que pour Im*$(z)>0$! car il est indispensable que $|\alpha|<1$ pour que nos affirmations sur la valeur de $a(\alpha)$ soient fondées.

Notons la formule immédiate (attention au i dans l'intégrale) :

$$\overline{A(z)}=\frac{1}{A(\overline{z})}\ ,$$

ou encore $A(z)=1/\overline{A(\overline{z})}$, ce qui donne en conclusion :

$$\mathrm{Im}(z)<0\Rightarrow\quad A(z)=\frac{|i-\gamma_0|}{i-\gamma_0}\,\frac{1}{z-\gamma_0}$$

5. 7. Par construction (avec multiplicités) :

$$\mathrm{Im}(z) > 0 \Rightarrow \quad |B(z)| = \prod_\beta \left|\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}\right| \ ,$$

et donc

$$0 < \theta < \pi \Rightarrow \quad \log|B(Re^{i\theta})| = \sum_\beta \log\left|\frac{Re^{i\theta}-\beta}{Re^{i\theta}-\overline{\beta}}\right| \ ,$$

où tous les termes sont négatifs (éventuellement $-\infty$) donc il n'y a pas d'ambiguïté dans l'arrangement de la somme et de plus le théorème de la convergence monotone (qui, en fait, n'est pas autre chose que Fubini pour des intégrales/sommes positives) permet d'affirmer :

$$\int_0^\pi \log|B(Re^{i\theta})|\sin(\theta)d\theta = \sum_\beta \int_0^\pi \log\left|\frac{Re^{i\theta}-\beta}{Re^{i\theta}-\overline{\beta}}\right|\sin(\theta)d\theta$$

Par la question **2.** on a

$$\int_0^\pi \log\left|\frac{Re^{i\theta}-\beta}{Re^{i\theta}-\overline{\beta}}\right|\sin(\theta)\ d\theta = -\pi R\ \frac{\mathrm{Im}(\beta)}{\max(R,|\beta|)^2} \ ,$$

et donc :

$$\frac{2}{\pi R}\int_0^\pi \log|B(Re^{i\theta})|\sin(\theta)d\theta = -2\ \sum_\beta \frac{\mathrm{Im}(\beta)}{\max(R,|\beta|)^2}$$

5. 8. On commence par ($z = Re^{i\theta}$, $R > 0$, $0 < \theta < \pi$, $\gamma \in \mathbf{R}$) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z-\gamma|^2} &= \frac{R\sin\theta}{R^2+\gamma^2-2R\gamma\cos\theta}\\ &\leq \frac{R\sin\theta}{R^2+\gamma^2-2R|\gamma||\cos\theta|}\\ &\leq \frac{R\sin\theta}{(R^2+\gamma^2)(1-|\cos\theta|)}\\ &\leq \frac{R}{R^2+\gamma^2}\frac{1}{\sin\theta}(1+|\cos(\theta)|)\\ &\leq \frac{2}{\sin\theta}\frac{R}{R^2+\gamma^2}\end{aligned}$$

Soit maintenant $F \in \mathbf{H}^{2+}$, non nulle ; on a donc $F(z) = c \cdot e^{ikz} \cdot B(z) \cdot S(z) \cdot E(z)$, avec $|c| = 1$ et $\log|S(z)E(z)|$ est l'intégrale de Poisson

$$\int_\mathbf{R} \frac{\mathrm{Im}(z)}{\pi|z-\gamma|^2}\ d\mu(\gamma)$$

d'une certaine mesure réelle sur avec $\int \frac{d|\mu|(\gamma)}{\pi(1+\gamma^2)} < \infty$. On a donc par l'inégalité précédente :

$$\Big|\log|S(Re^{i\theta})E(Re^{i\theta})|\Big| \leq \frac{2}{\sin\theta} \int_{\mathbf{R}} \frac{R}{\pi(R^2+\gamma^2)}\, d|\mu|(\gamma) \ ,$$

d'où

$$\frac{2}{\pi R}\left|\int_0^\pi \log|SE(Re^{i\theta})|\sin(\theta)d\theta\right| \leq \frac{4}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cdot \int_{\mathbf{R}} \frac{d|\mu|(\gamma)}{\pi(R^2+\gamma^2)} \ ,$$

et (convergence dominée vers zéro) :

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{2}{\pi R}\int_0^\pi \log|SE(Re^{i\theta})|\sin(\theta)d\theta = 0 \ .$$

Par ailleurs, on a établi :

$$\frac{2}{\pi R}\int_0^\pi \log|B(Re^{i\theta})|\sin(\theta)d\theta = -2\sum_\beta \frac{\mathrm{Im}(\beta)}{\max(R,|\beta|)^2}$$

d'où par le théorème de la convergence dominée (qui s'applique car chaque terme est décroissant lorsque R croît et pour $R=1$ par exemple la somme est finie) :

$$\lim_{R\to\infty} \frac{2}{\pi R}\int_0^\pi \log|B(Re^{i\theta})|\sin(\theta)d\theta = 0 \ .$$

Finalement en ce qui concerne le facteur spécial e^{ikz} on a $|e^{ikz}| = e^{-kR\sin\theta}$ et

$$\int_0^\pi \log|e^{ikz}|\sin(\theta)d\theta = -kR\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta = -k\,\frac{\pi R}{2} \ ,$$

ce qui donne $\lim_{R\to\infty}\frac{2}{\pi R}\int_0^\pi \log|e^{ikz}|\sin(\theta)d\theta = -k$. En conclusion :

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{2}{\pi R}\int_0^\pi \log|F(Re^{i\theta})|\sin(\theta)d\theta = -k \ .$$

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

Analyse Complexe, de Fourier, Hilbertienne
Cours de DEA (1^er^ semestre 2003-2004)
J.F. Burnol

Examen du 9 janvier 2004 (durée : 4 heures)

Exercice 1

1. Que vaut (pour $\gamma \in \mathbf{R}$) : $\int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\gamma x} e^{-2\pi|x|}\, dx$?

2. Montrer pour tout $b > 0$, $c > 0$, $a \in \mathbf{R}$:

$$\frac{b+c}{a^2+(b+c)^2} = \frac{bc}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{d\gamma}{((a-\gamma)^2+b^2)(\gamma^2+c^2)}$$

On justifiera la continuité de l'intégrale comme fonction de a.

Exercice 2

Soit

$$\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{pour } 0 < \theta < \pi \\ -\frac{1}{\sqrt{|\theta|}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{pour } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$

et soit $h(z) = P[\phi](z)$ la fonction harmonique à valeurs réelles qui est son intégrale de Poisson ($|z| < 1$).

3. Montrer que h est identiquement nulle sur $]-1, +1[$.

4. Montrer que h a une extension continue à $\overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$ avec comme valeurs au bord $\phi(\theta)$, $\theta \neq 0$.

5. Montrer que h est bornée sur tout rayon $\{r\, e^{i\theta}\}$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$ mais que h n'est bornée ni supérieurement ni inférieurement sur $D(0,1)$.

6. On considère la fonction analytique sur $D(0,1)$ donnée par la formule :

$$f(z) = \exp\left(\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\phi(\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi}\right)$$

Montrer que la fonction f est bornée sur tout rayon $\{r\,e^{i\theta}\}$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$ mais que $\sup_{|z|<1} |f(z)| = +\infty$.

Exercice 3

Soit $\mu = h(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}$ une mesure positive finie absolument continue, et soit K l'espace de Hilbert $K = L^2(S^1, \mu)$.

7. Montrer que le complément perpendiculaire de $\{z^j, j \in \mathbf{Z}, j \neq 0\}$ dans K est de dimension 0 ou 1.

8. On suppose :

$$\int \frac{1}{h(\theta)}\,\frac{d\theta}{2\pi} < \infty$$

Montrer que le complément perpendiculaire de $\{z^j, j \neq 0\}$ dans K est engendré par la fonction $1/h(\theta)$.

9. Montrer dans tous les cas la formule :

$$\inf \int_{S^1} |1 - \sum_{j\neq 0} a_j z^j|^2\, d\mu = \frac{1}{\int_{S^1} \frac{1}{h(\theta)}\,\frac{d\theta}{2\pi}}$$

où le inf est pris sur tous les choix de nombres complexes a_j, $j \in \mathbf{Z}$, $j \neq 0$, avec seulement un nombre fini d'entre eux non nuls.

Exercice 4

Soit $B(z)$ un produit de Blaschke pour le demi-plan $\mathrm{Im}(z) > 0$. On rappelle que $B(\gamma)$ pour $\gamma \in \mathbf{R}$ est défini presque partout et est de module 1.

10. Prouver pour tout $F(z) \in \mathbf{H}^{2+}$:

$$\left(B(\gamma)F(\gamma),\ \frac{1}{\gamma + i} - \overline{B(i)}\,\frac{B(\gamma)}{\gamma + i}\right)_{L^2(\mathbf{R}, d\gamma)} = 0$$

On écrira ce produit scalaire sous la forme d'une intégrale sur $\mathbf{R}$ et on l'évaluera en utilisant la formule de Cauchy qui est valable pour les éléments de $\mathbf{H}^{2+}$.

11. En déduire que la projection orthogonale de $\frac{1}{z+i}$ sur $B \cdot \mathbf{H}^{2+}$ est la fonction $\overline{B(i)}\frac{B(z)}{z+i}$ et que la norme de cette projection orthogonale vaut $\sqrt{\pi}|B(i)|$.

Problème

A Première Partie

On rappelle qu'une fonction à valeurs réelles, harmonique sur un ouvert U, peut s'écrire comme la partie réelle d'une fonction analytique sur tout ouvert simplement connexe qui est contenu dans U.

12. Soit h une fonction harmonique réelle sur U. On suppose que h s'annule identiquement au voisinage de $P \in U$. Montrer que h est nulle sur la composante connexe de U qui contient P.

13. Soit h une fonction harmonique réelle sur un ouvert U borné, ayant une extension continue à l'adhérence de U. On suppose $h \geq 0$ sur ∂U. Montrer (sans invoquer le "principe du maximum", il s'agit de le redémontrer) $h \geq 0$ sur U.

14. Toujours sous les hypothèses de la question précédente ($h \geq 0$ sur ∂U), on suppose de plus U connexe. Montrer que si h n'est pas identiquement nulle alors $h > 0$ sur U.

B Deuxième Partie

Dans toute cette partie on considère $0 < r_1 < r_2$ et on note $\rho = r_2/r_1 > 1$. On note $\mathcal{A}$ l'anneau $r_1 < |z| < r_2$, et $\partial\mathcal{A} = C_{r_1} \cup C_{r_2} = C_1 \cup C_2$ le bord de $\mathcal{A}$.

15. Soit $K(z)$ la fonction analytique qui est donnée pour $|z| < r_2$ par :

$$K(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1-\rho^{-2n}} \left(\frac{z}{r_2}\right)^n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\rho^n - \rho^{-n}} \left(\frac{z}{r_1}\right)^n \tag{1}$$

Prouver que l'on a aussi :

$$K(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{z}{r_2\rho^{2k} - z} \tag{2}$$

et que la fonction K est méromorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier avec ses pôles en r_2, $\rho^2 r_2$, etc...

16. On considère la fonction $J(z)$, méromorphe sur $\mathbf{C}$ privé de l'origine, donnée par :

$$J(z) = K(z) - K(\frac{r_1^2}{z}) \tag{3}$$

Quelle est la série de Fourier de $J(r\,e^{i\theta})$ pour $\frac{1}{\rho}\, r_1 < r < \rho\, r_1$?

17. Montrer que la fonction $J(z) - \frac{z}{r_2 - z}$ est analytique pour $\frac{r_1}{\rho} < r < \rho^2 r_2$.

18. On pose

$$Q_2(z) = \frac{\log|z| - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} + 2\,\mathrm{Re}J(z) \tag{4}$$

Montrer que la fonction Q_2 est harmonique sur $\mathbf{C}$ privé de certains points que l'on précisera et qu'elle est identiquement nulle sur le cercle C_1 de rayon r_1.

On rappelle le noyau de Poisson :

$$P(\zeta) = \mathrm{Re}\frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\zeta|^2} = 1 + 2\,\mathrm{Re}\frac{\zeta}{1-\zeta}$$

19. Montrer que $Q_2(z) - P(z/r_2)$ est une fonction harmonique sur $\frac{r_1}{\rho} < r < \rho^2 r_2$. Quelle est sa série de Fourier sur le cercle de rayon r, $\frac{1}{\rho}r_1 < r < r_2$? En déduire que l'on a $Q_2(z) = 0$ pour $|z| = r_2$, $z \neq r_2$.

20. Soit ϕ_2 une fonction continue sur le cercle C_2. On notera :

$$H(z) = Q_2 * \phi_2 = \int_0^{2\pi} Q_2(z\,e^{-it})\phi_2(r_2 e^{it})\,\frac{dt}{2\pi} \tag{5}$$

Montrer que H est une fonction harmonique de z sur l'anneau $\frac{1}{\rho}r_1 < r < r_2$.

21. Montrer que H s'étend en une fonction continue sur $\overline{\mathcal{A}}$ avec $H = 0$ sur C_1 et $H = \phi_2$ sur C_2.

22. On suppose $\phi_2 \geq 0$. Montrer $H \geq 0$ sur $\overline{\mathcal{A}}$.

23. En déduire $Q_2(z) \geq 0$ pour $z \in \mathcal{A}$.

24. Prouver le théorème suivant :

Théorème 1 *La fonction $Q_2(z)$ vérifie pour $\frac{1}{\rho}r_1 < r < r_2 = \rho r_1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, la formule :*

$$Q_2(r\,e^{i\theta}) = \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{(r/r_1)^n - (r/r_1)^{-n}}{\rho^n - \rho^{-n}} \cos n\theta\,, \tag{6}$$

Elle est une fonction harmonique, nulle pour $|z| = r_1$, strictement positive pour $r_1 < |z| < r_2$, nulle pour $|z| = r_2$, $z \neq r_2$. La fonction $Q_2(z) - P(z/r_2)$ est harmonique dans l'anneau $\frac{1}{\rho}r_1 < r < \rho^2 r_2$. Si ϕ_2 est une fonction continue sur C_2 l'unique fonction H harmonique sur $\mathcal{A}$, continue sur $\overline{\mathcal{A}}$, nulle sur C_1 et égale à ϕ_2 sur C_2 est $Q_2 * \phi_2$.

On pose $Q_1(z) = Q_2(r_1 r_2/\overline{z})$. Si ϕ_1 est une fonction continue sur C_1 on pose

$$Q_1 * \phi_1 = \int_0^{2\pi} Q_1(z\, e^{-it}) \phi_1(r_1 e^{it}) \, \frac{dt}{2\pi} \tag{7}$$

Finalement, on convient que :

$$\text{pour } z \in \mathbf{C}, w \in \partial\mathcal{A} \quad Q(z,w) = \begin{cases} Q_1(z/\,e^{it}) & \text{si } w = r_1\, e^{it} \\ Q_2(z/\,e^{it}) & \text{si } w = r_2\, e^{it} \end{cases} \tag{8}$$

25. Prouver le théorème suivant :

Théorème 2 *Soit H une fonction continue sur $\overline{\mathcal{A}}$, harmonique sur $\mathcal{A}$. On a :*

$$z \in \mathcal{A} \Rightarrow \quad H(z) = \int_{\partial\mathcal{A}} Q(z,w) H(w) \, \frac{dt}{2\pi} \tag{9}$$

26. Soit $z_0 \in \mathcal{A}$ et $H(z) = \int_{\partial\mathcal{A}} Q(z,w) \log|w - z_0| \, \frac{dt}{2\pi}$. En observant que nécessairement $H(z) - \log|z - z_0|$ est positif pour $|z - z_0|$ suffisamment petit, prouver :

$$z \in \mathcal{A} \Rightarrow \quad \log|z - z_0| \leq \int_{\partial\mathcal{A}} Q(z,w) \log|w - z_0| \, \frac{dt}{2\pi} \tag{10}$$

27. Montrer que le résultat précédent vaut encore pour $z_0 \in \partial\mathcal{A}$.

28. Prouver le théorème suivant :

Théorème 3 *Soit f une fonction analytique sur $\overline{\mathcal{A}}$, non identiquement nulle. On a :*

$$z \in \mathcal{A} \Rightarrow \quad \log|f(z)| \leq \int_{\partial\mathcal{A}} Q(z,w) \log|f(w)| \, \frac{dt}{2\pi} \tag{11}$$

29. Établir :

Théorème 4 (Hadamard) *Soit f une fonction analytique sur un anneau (non identiquement nulle). La fonction*

$$r \mapsto \log \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

est une fonction convexe de $\log r$.

30. Établir :

Théorème 5 (Hardy) *Soit $p > 0$ et soit f une fonction analytique sur un anneau (non identiquement nulle). La fonction*

$$r \mapsto \log \int_0^{2\pi} |f(r\,e^{i\theta})|^p \,\frac{d\theta}{2\pi}$$

est une fonction convexe de $\log r$.

Pour la démonstration on pourra commencer par montrer :

$$\int_0^{2\pi} |g(r\,e^{i\theta})|^p \,\frac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \int_0^{2\pi} |g(r_1\,e^{it})|^p \,\frac{dt}{2\pi} + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \int_0^{2\pi} |g(r_2\,e^{it})|^p \,\frac{dt}{2\pi}\,, \quad (12)$$

pour toute fonction g de la forme $Ar^B f$ avec $A > 0$, $B \in \mathbf{R}$. On choisira ensuite A et B de sorte que les intégrales de droite valent 1.

C Troisième Partie

On notera dorénavant $Q_1^{r_1,r_2}(z)$ (resp. $Q_2^{r_1,r_2}(z)$) la fonction $Q_1(z)$ (resp. $Q_2(z)$) de la deuxième partie.

31. Montrer que pour z fixé dans $\mathcal{A}$ on a convergence uniforme de $Q_1^{\lambda r_1, r_2/\lambda}(z\,e^{-it})$ (resp. $Q_2^{\lambda r_1, r_2/\lambda}(z\,e^{-it})$) vers $Q_1(z\,e^{-it})$ (resp $Q_2(z\,e^{-it})$) lorsque $\lambda \to 1^+$ et $t \in [0, 2\pi]$.

On rappelle que toute fonction analytique f dans l'anneau $\mathcal{A}$ s'écrit sous la forme d'une série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j z^j \quad (13)$$

et que le rayon de convergence de $\sum_{j \geq 0} a_j z^j$ est au moins r_2 et le rayon de convergence de $\sum_{j \geq 0} a_{-j} w^j$ est au moins $1/r_1$.

32. Que vaut $\int_0^{2\pi} |f(r\,e^{i\theta})|^2 \,\frac{d\theta}{2\pi}$ pour $r_1 < r < r_2$?

On suppose dorénavant f bornée dans $\mathcal{A}$, non identiquement nulle.

33. Montrer que la limite $\widetilde{f}$ de f au sens L^2 sur $\partial\mathcal{A}$ existe.

34. Montrer

$$z \in \mathcal{A} \Rightarrow \quad f(z) = \int_{\partial \mathcal{A}} Q(z,w) \widetilde{f}(w) \, \frac{dt}{2\pi} \ , \tag{14}$$

et prouver que $f(r\, e^{i\theta})$ converge pour presque tout θ vers $\widetilde{f}(r_1\, e^{i\theta})$ lorsque $r \to r_1$ et vers $\widetilde{f}(r_2\, e^{i\theta})$ lorsque $r \to r_2$.

35. Prouver

$$z \in \mathcal{A} \Rightarrow \quad \log |f(z)| \leq \int_{\partial \mathcal{A}} Q(z,w) \log |\widetilde{f}(w)| \, \frac{dt}{2\pi} \tag{15}$$

et en particulier établir le fait que $\log |\widetilde{f}|$ est intégrable.

On rappelle le lemme de Fatou de la théorie de l'intégration qui dit que $\int \liminf g_n d\nu \leq \liminf \int g_n d\nu$ si les g_n sont minorés par une fonction intégrable et que $\int \limsup g_n d\nu \geq \limsup \int g_n d\nu$ si les g_n sont majorés par une fonction intégrable.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

Analyse Complexe, de Fourier, Hilbertienne
Cours de DEA (1^{er} semestre 2003-2004)
J.F. Burnol

Examen du 9 janvier 2004 (durée : 4 heures) et son Corrigé

Dans ce « corrigé » je ne rédige pas nécessairement comme si j'étais en train moi-même de passer l'examen. Par exemple si un calcul est élémentaire, j'en indique seulement le résultat. De plus je n'ai pas voulu adopter un style de rédaction qui soit trop réminiscent de ce que l'on fait au niveau d'une Licence voire du DEUG.

Exercice 1

1. Que vaut (pour $\gamma \in \mathbf{R}$) : $\int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\gamma x} e^{-2\pi|x|}\,dx$?

Cor. *L'intégrale est absolument convergente (comme $\gamma \in \boldsymbol{R}$ n'était pas indiqué dans le sujet de l'examen, l'on pouvait préciser que l'intégrale convergeait absolument pour $|Im(\gamma)| < 1$). On calcule en séparant suivant le signe de x et on trouve $\frac{1}{\pi(1+\gamma^2)}$.*

2. Montrer pour tout $b > 0$, $c > 0$, $a \in \mathbf{R}$:

$$\frac{b+c}{a^2+(b+c)^2} = \frac{bc}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{d\gamma}{((a-\gamma)^2+b^2)(\gamma^2+c^2)}$$

On justifiera la continuité de l'intégrale comme fonction de a.

Cor. *Du résultat précédent on déduit que pour $b > 0$, on a $\int_{\boldsymbol{R}} e^{2\pi i\gamma x} e^{-2\pi b|x|}\,dx = \frac{b}{\pi(b^2+\gamma^2)}$, ce que d'ailleurs n'importe qui ayant étudié le noyau de Poisson et l'espace $\boldsymbol{H}^2(Imz > 0)$ plus de deux minutes aurait dû savoir. L'intégrale de droite est une convolution (de deux fonctions L^1 disons). En minorant le premier terme du dénominateur par b^2 on constate qu'elle converge uniformément par rapport à a et est donc une fonction continue de a. Sa transformée de Fourier inverse est donc $\pi e^{-2\pi b|x|} e^{-2\pi c|x|}$ qui est aussi la transformée de Fourier inverse du terme de gauche. Les deux choses sont donc égales presque partout, donc partout car elles sont continues en a. Une alternative (utilisant les mêmes transformées de Fourier) est d'évaluer l'intégrale comme un produit scalaire (via la formule de Parseval)*

Exercice 2

Soit

$$\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{pour } 0 < \theta < \pi \\ -\frac{1}{\sqrt{|\theta|}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{pour } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$

et soit $h(z) = P[\phi](z)$ la fonction harmonique à valeurs réelles qui est son intégrale de Poisson ($|z| < 1$).

3. Montrer que h est identiquement nulle sur $]-1, +1[$.

Cor. *Le noyau de Poisson $P(z, w)$ vérifie $P(\bar{z}, e^{i\theta}) = P(z, e^{-i\theta})$ donc $P[\phi](\bar{z}) = P[\phi(-\theta)](z)$. Comme ϕ est impaire on a ainsi $h(\bar{z}) = -h(z)$, ce qui implique le résultat.*

4. Montrer que h a une extension continue à $\overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$ avec comme valeurs au bord $\phi(\theta)$, $\theta \neq 0$.

Cor. *En effet la fonction (périodique) ϕ est continue (y-compris en π) sauf pour $\theta \equiv 0\ [2\pi]$. Par un théorème du cours $\phi(\theta) = \lim_{z \to e^{i\theta},\, |z|<1} h(z)$.*

5. Montrer que h est bornée sur tout rayon $\{r\, e^{i\theta}\}$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$ mais que h n'est bornée ni supérieurement ni inférieurement sur $D(0,1)$.

Cor. *Pour $e^{i\theta} = 1$ la fonction $r \mapsto h(r\, e^{i\theta})$ est nulle, pour les autres rayons elle admet une extension continue en $r = 1$. Elle est donc bornée sur tout rayon. Si h était bornée supérieurement (resp. inférieurement) il en serait de même de ses valeurs au bord $\phi(\theta)$.*

6. On considère la fonction analytique sur $D(0,1)$ donnée par la formule :

$$f(z) = \exp\left(\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \phi(\theta) \, \frac{d\theta}{2\pi}\right)$$

Montrer que la fonction f est bornée sur tout rayon $\{r\, e^{i\theta}\}$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$ mais que $\sup_{|z|<1} |f(z)| = +\infty$.

Cor. *On sait que $|f(z)| = \exp(h(z))$. Comme h est bornée (supérieurement) sur tout rayon il en est de même de $|f|$. Comme h n'est pas bornée supérieurement il en est de même de $|f|$.*

Exercice 3

Soit $\mu = h(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}$ une mesure positive finie absolument continue, et soit K l'espace de Hilbert $K = L^2(S^1, \mu)$.

7. Montrer que le complément perpendiculaire de $\{z^j, j \in \mathbf{Z}, j \neq 0\}$ dans K est de dimension 0 ou 1.

Cor. *Si la dimension était au moins* 2 *on pourrait y trouver un vecteur* f *non nul, perpendiculaire à* 1*, donc à tous les* z^j*. Mais on sait que les fonctions* z^j *engendrent* K*, donc* f *serait perpendiculaire à lui-même. Contradiction.*

8. On suppose :

$$\int \frac{1}{h(\theta)}\frac{d\theta}{2\pi} < \infty$$

Montrer que le complément perpendiculaire de $\{z^j, j \neq 0\}$ dans K est engendré par la fonction $1/h(\theta)$.

Cor. *Sous l'hypothèse faite on constate que* $1/h$ *est dans* K*, puis que* $1/h$ *est perpendiculaire à tous les* z^j $(j \neq 0)$*. Évidemment il ne s'agit pas du vecteur nul, on a donc la conclusion demandée grâce à la question précédente.*

9. Montrer dans tous les cas la formule :

$$\inf \int_{S^1} |1 - \sum_{j \neq 0} a_j z^j|^2 \, d\mu = \frac{1}{\int_{S^1} \frac{1}{h(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi}}$$

où le inf est pris sur tous les choix de nombres complexes a_j, $j \in \mathbf{Z}$, $j \neq 0$, avec seulement un nombre fini d'entre eux non nuls.

Cor. *Sous l'hypothèse de la question précédente, la projection orthogonale de* 1 *sur l'espace engendré par les* z^j*,* $j \neq 0$ *est* $1 - (1, 1/h)\frac{1/h}{\|1/h\|^2}$ *et la quantité recherchée est donc* $|(1, 1/h)|^2 \|1/h\|^{-2}$ *ce qui donne le résultat demandé.*

Si l'intégrale diverge on remplace h *par* $h + \epsilon$ *avec* $\epsilon > 0$*. Pour cette nouvelle mesure la formule marche et donne un majorant de la quantité demandée. En faisant tendre* ϵ *vers* 0 *ces majorants tendent aussi vers zéro (par le théorème de la convergence monotone).*

Exercice 4

Soit $B(z)$ un produit de Blaschke pour le demi-plan $\mathrm{Im}(z) > 0$. On rappelle que $B(\gamma)$ pour $\gamma \in \mathbf{R}$ est défini presque partout et est de module 1.

10. Prouver pour tout $F(z) \in \mathbf{H}^{2+}$:

$$\left(B(\gamma)F(\gamma),\ \frac{1}{\gamma+i} - \overline{B(i)}\,\frac{B(\gamma)}{\gamma+i} \right)_{L^2(\mathbf{R},d\gamma)} = 0$$

On écrira ce produit scalaire sous la forme d'une intégrale sur $\mathbf{R}$ et on l'évaluera en utilisant la formule de Cauchy qui est valable pour les éléments de $\mathbf{H}^{2+}$.

Cor. *On fait ce qui est dit, ce qui donne puisque* $|B(\gamma)|^2 = 1$ *:*

$$\int_{\boldsymbol{R}} \left(B(\gamma)F(\gamma)\frac{1}{\gamma-i} - B(i)\,\frac{F(\gamma)}{\gamma-i} \right) d\gamma = 2\pi\, iB(i)F(i) - 2\pi\, iB(i)F(i) = 0$$

11. En déduire que la projection orthogonale de $\frac{1}{z+i}$ sur $B \cdot \mathbf{H}^{2+}$ est la fonction $\overline{B(i)}\frac{B(z)}{z+i}$ et que la norme de cette projection orthogonale vaut $\sqrt{\pi}|B(i)|$.

Cor. *En effet la différence entre* $\frac{1}{z+i}$ *et* $\overline{B(i)}\frac{B(z)}{z+i}$ *est perpendiculaire à tout élément de* $B \cdot \boldsymbol{H}^{2+}$ *et* $\overline{B(i)}\frac{B(z)}{z+i}$ *appartient à* $B \cdot \boldsymbol{H}^{2+}$*. La norme au carré vaut :*

$$\int_{\boldsymbol{R}} |B(i)|^2 \frac{1}{1+\gamma^2}\, d\gamma = \pi|B(i)|^2$$

Problème

D Première Partie

On rappelle qu'une fonction à valeurs réelles, harmonique sur un ouvert U, peut s'écrire comme la partie réelle d'une fonction analytique sur tout ouvert simplement connexe qui est contenu dans U.

12. Soit h une fonction harmonique réelle sur U. On suppose que h s'annule identiquement au voisinage de $P \in U$. Montrer que h est nulle sur la composante connexe de U qui contient P.

Cor. *Soit V le sous-ensemble de U des points Q tels que h est identiquement nulle dans un voisinage de Q. L'ensemble V est ouvert. Il est aussi fermé (dans U) : en effet si $R = \lim Q_n$ (avec $R \in U$), prenons $r > 0$ avec $D(R, r) \subset U$ et n avec $Q_n \in D(R, r)$. On a $h = Re(f)$ pour une certaine fonction analytique f sur $D(R, r)$, et f est imaginaire pure dans un voisinage de Q_n, donc constante sur ce voisinage (sinon elle serait une application ouverte), donc constante sur $D(R, r)$. Mais alors $h \equiv 0$ sur $D(R, r)$ donc $R \in V$. Ainsi V est composé d'un certain nombre des composantes connexes de U, et si $P \in V$ alors h est en fait identiquement nulle sur la composante connexe de P. On peut aussi faire un raisonnement qui consiste d'abord à montrer que l'on peut joindre P à tout point de sa composante connexe par un chemin continu composé d'un nombre fini de segments rectilignes, etc...*

13. Soit h une fonction harmonique réelle sur un ouvert U borné, ayant une extension continue à l'adhérence de U. On suppose $h \geq 0$ sur ∂U. Montrer (sans invoquer le "principe du maximum", il s'agit de le redémontrer) $h \geq 0$ sur U.

Cor. *Supposons le contraire. L'adhérence de U est un compact, et par hypothèse h est continue sur ce compact. Soit P un point avec $h(P) = \inf h < 0$. L'ensemble de ces points est aussi un compact on peut donc choisir P avec $|P|$ maximal. Le point P est dans U, par sur son bord. Soit $\epsilon > 0$ avec $D(P, \epsilon) \subset U$. Comme $h(P)$ est la moyenne de h sur tout cercle centré en P de rayon $\rho < \epsilon$, et que h est continue, et minimale en P, c'est que h est constante égale à $h(P)$ sur $D(P, \epsilon)$. Cela contredit le fait que $|P|$ est maximal.*

14. Toujours sous les hypothèses de la question précédente ($h \geq 0$ sur ∂U), on suppose de plus U connexe. Montrer que si h n'est pas identiquement nulle alors $h > 0$ sur U.

Cor. *Si h s'annule en $P \in U$, comme on sait déjà que $h \geq 0$ et comme h est continue et a la propriété de la moyenne on en déduit que h s'annule identiquement sur une (toute) boule $D(P, r) \subset U$. Par la première question $h \equiv 0$.*

E Deuxième Partie

Dans toute cette partie on considère $0 < r_1 < r_2$ et on note $\rho = r_2/r_1 > 1$. On note $\mathcal{A}$ l'anneau $r_1 < |z| < r_2$, et $\partial\mathcal{A} = C_{r_1} \cup C_{r_2} = C_1 \cup C_2$ le bord de $\mathcal{A}$.

15. Soit $K(z)$ la fonction analytique qui est donnée pour $|z| < r_2$ par :

$$K(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 - \rho^{-2n}} \left(\frac{z}{r_2}\right)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\rho^n - \rho^{-n}} \left(\frac{z}{r_1}\right)^n \tag{1}$$

Prouver que l'on a aussi :

$$K(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{z}{r_2\rho^{2k} - z} \tag{2}$$

et que la fonction K est méromorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier avec ses pôles en r_2, $\rho^2 r_2$, etc...

Cor. *La série double*

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} \rho^{-2nk} \left(\frac{z}{r_2}\right)^n$$

est absolument convergente au moins pour $\rho > 1$ (ce qui est le cas) et $|z| < r_2$, puisque la série formée avec les modules est alors majorée par $\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0}\rho^{-2k}a^n = (1-\rho^{-2})^{-1}\,a(1-a)^{-1}$, $(a = |z|/r_2)$. On peut donc sous l'hypothèse $|z| < r_2$ permuter les sommations et on trouve la formule demandée :

$$K(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{z}{r_2\rho^{2k} - z},$$

qui donne une série absolument convergente, uniformément dans tout compact ne rencontrant pas les points $r_2\rho^{2k}$, $k \geq 1$ puisqu'alors on peut majorer en module $\frac{z}{r_2\rho^{2k}-z}$ par $C\rho^{-2k}$ pour une certaine constante C. Elle est donc analytique sur $\mathbf{C}$ tout entier privé de ces points. Si l'on applique le même argument à la série où l'on omet un de ses termes on obtient que les singularités sont des pôles simples en ces points.

16. On considère la fonction $J(z)$, méromorphe sur $\mathbf{C}$ privé de l'origine, donnée par :

$$J(z) = K(z) - K(\frac{r_1^2}{z}) \tag{3}$$

Quelle est la série de Fourier de $J(r\,e^{i\theta})$ pour $\frac{1}{\rho}\,r_1 < r < \rho\, r_1$?

Cor. *On fait la remarque importante que l'anneau $\frac{1}{\rho}r_1 < r < \rho\, r_1 = r_2$ est laissé invariant par la transformation $z \mapsto r_1^2/z$. On peut donc dans cet anneau utiliser la représentation absolument convergente donnée par l'emploi direct de la formule (1). Ainsi dans cet anneau*

$$J(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\rho^n - \rho^{-n}}\left(\frac{z}{r_1}\right)^n - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\rho^n - \rho^{-n}}\left(\frac{z}{r_1}\right)^{-n} = \sum_{n\neq 0} \frac{(z/r_1)^n}{\rho^n - \rho^{-n}}$$

Les coefficents de Fourier de $J(r\,e^{i\theta})$ sont donc $\frac{(r/r_1)^n}{\rho^n-\rho^{-n}}$ pour $n \neq 0$ et 0 pour $n = 0$.

17. Montrer que la fonction $J(z) - \frac{z}{r_2-z}$ est analytique pour $\frac{r_1}{\rho} < r < \rho^2\, r_2$.

Cor. *(l'énoncé de l'examen demandait dans l'anneau plus petit $\frac{r_1}{\rho} < r < \rho\, r_2$). Les pôles de J sont ceux de $K(z)$ et ceux de $K(r_1^2/z)$, soit r_2, $\rho^2 r_2$, etc...et $r_1^2/r_2 = \rho^{-2}r_2$,*

$\rho^{-4}r_2$, ..., c'est-à-dire les $\rho^{2k}r_2$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Comme 0 est point d'accumulation de pôles, c'est une singularité essentielle et c'est pour cela que l'on a dit dans l'énoncé que J était méromorphe sur $\boldsymbol{C}$ privé de l'origine. Le seul pôle de J dans l'anneau $\frac{r_1}{\rho} < r < \rho^2\, r_2$ est en r_2 et il provient du terme $\frac{z}{r_2 - z}$ dans K.

18. On pose

$$Q_2(z) = \frac{\log|z| - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} + 2\,\mathrm{Re} J(z) \tag{4}$$

Montrer que la fonction Q_2 est harmonique sur $\mathbf{C}$ privé de certains points que l'on précisera et qu'elle est identiquement nulle sur le cercle C_1 de rayon r_1.

Cor. *La fonction Q_2 est harmonique dans $\boldsymbol{C}$ privé de l'origine et des pôles de J, puisque J est analytique dans ce domaine, et que l'on sait bien sûr que $\log|z|$ est une fonction harmonique sur $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$. Sur le cercle de rayon r_1 la série de Fourier de $J(r_1\, e^{i\theta})$ donne en passant à la partie réelle $\sum_{n\neq 0} \frac{\cos(n\theta)}{\rho^n - \rho^{-n}} = 0$. Donc $Q_2 \equiv 0$ sur ce cercle.*

On rappelle le noyau de Poisson :

$$P(\zeta) = \mathrm{Re}\frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\zeta|^2} = 1 + 2\,\mathrm{Re}\frac{\zeta}{1-\zeta}$$

19. Montrer que $Q_2(z) - P(z/r_2)$ est une fonction harmonique sur $\frac{r_1}{\rho} < r < \rho^2\, r_2$. Quelle est sa série de Fourier sur le cercle de rayon r, $\frac{1}{\rho}\, r_1 < r < r_2$? En déduire que l'on a $Q_2(z) = 0$ pour $|z| = r_2$, $z \neq r_2$.

Cor. *On a*

$$\begin{aligned} Q_2(z) - P(z/r_2) &= \frac{\log|z| - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} + 2\, Re(J(z)) - 1 - 2\, Re(\frac{z}{r_2 - z}) \\ &= \frac{\log|z| - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} - 1 + 2\, Re(J(z) - \frac{z}{r_2 - z})\ , \end{aligned}$$

et il s'agit donc une fonction harmonique dans l'anneau considéré puisque celui-ci est exempt de pôles de $J(z) - \frac{z}{r_2 - z}$. La serie de Fourier de $P(z/r_2)$ sur le cercle de rayon $r < r_2$ est $\sum_n (r/r_2)^{|n|} \exp(i\, n\theta)$, tandis que par la réponse à la question 16 celle de Q_2 sur le même cercle est (pour $\frac{1}{\rho} r_1 < r < r_2$)

$$\begin{aligned} Q_2(r\, e^{i\theta}) &= \frac{\log(r/r_1)}{\log\rho} + 2\sum_{n\neq 0} \frac{(r/r_1)^n}{\rho^n - \rho^{-n}} \cos(n\theta) \\ &= \frac{\log(r/r_1)}{\log\rho} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{(r/r_1)^n - (r/r_1)^{-n}}{\rho^n - \rho^{-n}} \cos(n\theta) \end{aligned}$$

La série de Fourier demandée est donc :

$$\frac{\log(r/r_1)}{\log\rho} - 1 + 2\sum_{n\geq 1}\left(\frac{(r/r_1)^n - (r/r_1)^{-n}}{\rho^n - \rho^{-n}} - (r/r_2)^n\right)\cos(n\theta)$$

Comme la fonction considérée est harmonique, en particulier continue, sur un anneau plus grand comprenant le cercle de rayon r_2 on peut obtenir les coefficients de Fourier sur ce cercle en passant à la limite dans ceux ci-dessus pour $r < r_2$. On obtient identiquement 0 donc $Q_2(z) = P(z/r_2)$ pour $|z| = r_2$, $z \neq r_2$. Mais $P(z/r_2) = 0$ sous les mêmes conditions.

20. Soit ϕ_2 une fonction continue sur le cercle C_2. On notera :

$$H(z) = Q_2 * \phi_2 = \int_0^{2\pi} Q_2(z\,e^{-it})\phi_2(r_2e^{it})\,\frac{dt}{2\pi} \tag{5}$$

Montrer que H est une fonction harmonique de z sur l'anneau $\frac{1}{\rho}\,r_1 < r < r_2$.

Cor. *Les fonctions $Q_2(z\,e^{-it})$ de z sont harmoniques et donc ont la propriété de la moyenne sur cet anneau. La convergence uniforme par rapport à z dans un compact fixé (puisque $Q_2(z\,e^{-it})$ sera alors borné indépendamment de t et de z) de cet anneau ouvert prouve la continuité de H et Fubini établit que H a la propriété de la moyenne pour tout cercle inclus dans cet anneau ouvert. Ceci implique que H est une fonction harmonique sur cet anneau.*

21. Montrer que H s'étend en une fonction continue sur $\overline{\mathcal{A}}$ avec $H = 0$ sur C_1 et $H = \phi_2$ sur C_2.

Cor. *Il n'y a pas de problème particulier en C_1 puisque celui-ci est inclus dans l'anneau $\frac{1}{\rho}\,r_1 < r < r_2$. Et on sait que $Q_2 \equiv 0$ sur C_1 donc H aussi. Pour C_2 il suffira d'écrire $Q_2 = (Q_2 - P(z/r_2)) + P(z/r_2)$, d'utiliser la réponse à la question 19, et le comportement au bord connu par le cours d'une intégrale de Poisson, pour pouvoir affirmer que H s'y étend par continuité et y coïncide avec $\phi_2(r_2e^{it})$.*

22. On suppose $\phi_2 \geq 0$. Montrer $H \geq 0$ sur $\overline{\mathcal{A}}$.

Cor. *En effet H est continue sur l'anneau fermé, harmonique sur son intérieur, et positive ou nulle au bord. Elle est donc par la question 13 positive ou nulle sur l'anneau fermé.*

23. En déduire $Q_2(z) \geq 0$ pour $z \in \mathcal{A}$.

Cor. *Supposons au contraire $Q_2(z) < 0$ en un certain z. C'est donc que $Q_2(ze^{-it}) \leq -\epsilon < 0$ pour $0 \leq |t| < \delta$, pour un certain $\epsilon > 0$ et un certain $\delta > 0$. On prend alors ϕ_2*

continue, positive, nulle pour $|t| > \delta$ et valant 1 pour $|t| < \delta/2$. L'intégrale de l'équation (5) sera strictement négative, mais c'est impossible par la question précédente.

24. Prouver le théorème suivant :

Théorème 6 *La fonction $Q_2(z)$ vérifie pour $\frac{1}{\rho}r_1 < r < r_2 = \rho r_1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, la formule :*

$$Q_2(r\,e^{i\theta}) = \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{(r/r_1)^n - (r/r_1)^{-n}}{\rho^n - \rho^{-n}} \cos n\theta\ , \tag{6}$$

Elle est une fonction harmonique, nulle pour $|z| = r_1$, strictement positive pour $r_1 < |z| < r_2$, nulle pour $|z| = r_2$, $z \neq r_2$. La fonction $Q_2(z) - P(z/r_2)$ est harmonique dans l'anneau $\frac{1}{\rho}r_1 < r < \rho^2 r_2$. Si ϕ_2 est une fonction continue sur C_2 l'unique fonction H harmonique sur $\mathcal{A}$, continue sur $\overline{\mathcal{A}}$, nulle sur C_1 et égale à ϕ_2 sur C_2 est $Q_2 * \phi_2$.

Cor. *Tout a été établi à l'exception de la stricte positivité de Q_2 dans l'anneau $r_1 < r < r_2$ et de l'unicité de H. On sait déjà que $Q_2 \geq 0$ dans cet anneau ouvert donc par la question 14 elle est soit identiquement nulle soit strictement positive. Elle n'est pas identiquement nulle, elle est donc strictement positive dans cet anneau. Pour l'unicité de H, si il y avait une autre fonction harmonique solution H', la différence serait continue, nulle au bord, harmonique à l'intérieur. Par la question 13 ses parties réelles et imaginaires seraient toutes deux identiquement nulle. Donc $H = H'$.*

On pose $Q_1(z) = Q_2(r_1 r_2/\overline{z})$. Si ϕ_1 est une fonction continue sur C_1 on pose

$$Q_1 * \phi_1 = \int_0^{2\pi} Q_1(z\,e^{-it})\phi_1(r_1 e^{it})\,\frac{dt}{2\pi} \tag{7}$$

Finalement, on convient que :

$$\text{pour } z \in \mathbf{C}, w \in \partial\mathcal{A} \quad Q(z,w) = \begin{cases} Q_1(z/\,e^{it}) & \text{si } w = r_1\,e^{it} \\ Q_2(z/\,e^{it}) & \text{si } w = r_2\,e^{it} \end{cases} \tag{8}$$

25. Prouver le théorème suivant :

Théorème 7 *Soit H une fonction continue sur $\overline{\mathcal{A}}$, harmonique sur $\mathcal{A}$. On a :*

$$z \in \mathcal{A} \Rightarrow \quad H(z) = \int_{\partial\mathcal{A}} Q(z,w)H(w)\,\frac{dt}{2\pi} \tag{9}$$

Cor. *Remarquons que la transformation* $z \mapsto r_1 r_2/\bar{z}$ *laisse invariant l'anneau* $\mathcal{A}$ *en échangeant les cercles* C_1 *et* C_2 *et que si* $f(z)$ *est une fonction harmonique il en est de même de* $f(r_1 r_2/\bar{z})$ *(on écrit* f *localement comme la somme d'une fonction analytique et d'une fonction anti-analytique). Si l'on pose (pour* $r_1 < |z| < r_2$*)*

$$H_1(z) = \int_0^{2\pi} Q_1(z\,e^{-it})\phi_1(r_1 e^{it})\,\frac{dt}{2\pi}\ ,$$

alors

$$H_1(r_1 r_2/\bar{z}) = \int_0^{2\pi} Q_2(z\,e^{-it})\phi_1(r_1 e^{it})\,\frac{dt}{2\pi}\ ,$$

et est donc la fonction $Q_2 * \phi_2$ *pour* $\phi_2(r_2 e^{it}) = \phi_1(r_1 e^{it})$*. Cette fonction est continue sur l'anneau fermé, harmonique à l'intérieur, vaut* 0 *sur* C_1 *et coïncide avec* ϕ_2 *sur* C_2*. Donc la fonction* H_1 *est continue sur l'anneau fermé, harmonique à l'intérieur, nulle sur* C_2 *et coïncide avec* ϕ_1 *sur* C_1*. Si l'on part d'une fonction continue* H *sur l'anneau fermé, harmonique à l'intérieur, la fonction construite par l'intégrale de la formule (9) est donc continue sur l'anneau fermé, harmonique à l'intérieur et a les mêmes valeurs au bord. Ainsi la formule (9) est prouvée.*

26. Soit $z_0 \in \mathcal{A}$ et $H(z) = \int_{\partial\mathcal{A}} Q(z,w)\log|w-z_0|\,\frac{dt}{2\pi}$. En observant que nécessairement $H(z) - \log|z-z_0|$ est positif pour $|z-z_0|$ suffisamment petit, prouver :

$$z \in \mathcal{A} \Rightarrow \quad \log|z-z_0| \le \int_{\partial\mathcal{A}} Q(z,w)\log|w-z_0|\,\frac{dt}{2\pi} \tag{10}$$

Cor. *Comme* H *est continue en* z_0 *on a évidemment* $\lim_{z\to z_0}(H(z) - \log|z-z_0|) = +\infty$*. On prend un petit disque autour de* z_0*. Dans l'ouvert complémentaire dans* $\mathcal{A}$*, la fonction* $H(z) - \log|z-z_0|$ *est harmonique. Elle a une extension continue au bord, qui est positive ou nulle (nulle sur* C_1 *et* C_2*, strictement positive sur le petit cercle). Elle est donc par la question 13 positive ou nulle dans tout ce domaine ouvert (et même strictement positive par 14).*

27. Montrer que le résultat précédent vaut encore pour $z_0 \in \partial\mathcal{A}$.

Cor. *On se convainc (en invoquant le devoir à la maison si besoin) que* $\log|w-z_0|$ *converge au sens* L^2 *(donc* L^1*) vers* $\log|w-z_1|$ *lorsque* z_0 *tend radialement vers* $z_1 \in \partial\mathcal{A}$*. On passe à la limite dans l'inégalité de la question précédente pour* z *fixé et* $z_0 \to z_1 \in \partial\mathcal{A}$*.*

28. Prouver le théorème suivant :

Théorème 8 *Soit* f *une fonction analytique sur* $\overline{\mathcal{A}}$*, non identiquement nulle. On a :*

$$z \in \mathcal{A} \Rightarrow \quad \log|f(z)| \le \int_{\partial\mathcal{A}} Q(z,w)\log|f(w)|\,\frac{dt}{2\pi} \tag{11}$$

Cor. *On écrit $f(z) = P(z)g(z)$ où P est le polynôme unitaire formé avec les zéros (qui sont en nombre fini) de f sur $\overline{\mathcal{A}}$, et leurs multiplicités. Par la question précédente l'inégalité (11) vaut pour P. Par la question 25 on a égalité pour g puisque $\log|g|$ est harmonique. Donc (11) est établi.*

29. Établir :

Théorème 9 (Hadamard) *Soit f une fonction analytique sur un anneau (non identiquement nulle). La fonction*

$$r \mapsto \log \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

est une fonction convexe de $\log r$.

Cor. *Soit $M(r)$ cette fonction. Fixons $r_1 < r_2$ et appliquons le Théorème 3 en majorant l'intégrand sur C_1 par $M(r_1)$ et sur C_2 par $M(r_2)$. Il vient*

$$\log|f(r\,e^{i\theta})| \leq \frac{\log(r_2/r)}{\log\rho} M(r_1) + \frac{\log(r/r_1)}{\log\rho} M(r_2)\ ,$$

car en effet on a $\int_{C_1} Q(z,w)\,\frac{dt}{2\pi} = \log(r_2/r)/\log\rho$ et $\int_{C_2} Q(z,w)\,\frac{dt}{2\pi} = \log(r/r_1)/\log\rho$. En prenant le $\sup$ par rapport à θ on obtient la même inégalité pour $M(r)$. Ceci prouve le théorème.

30. Établir :

Théorème 10 (Hardy) *Soit $p > 0$ et soit f une fonction analytique sur un anneau (non identiquement nulle). La fonction*

$$r \mapsto \log \int_0^{2\pi} |f(r\,e^{i\theta})|^p \,\frac{d\theta}{2\pi}$$

est une fonction convexe de $\log r$.

Pour la démonstration on pourra commencer par montrer :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |g(r\,e^{i\theta})|^p \,\frac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \int_0^{2\pi} |g(r_1\,e^{it})|^p \,\frac{dt}{2\pi} \\ + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \int_0^{2\pi} |g(r_2\,e^{it})|^p \,\frac{dt}{2\pi}\ , \quad (12)\end{aligned}$$

pour toute fonction g de la forme $Ar^B f$ avec $A > 0$, $B \in \mathbf{R}$. On choisira ensuite A et B de sorte que les intégrales de droite valent 1.

Cor. *On suit les indications. On notera que* $\log|g|$ *vérifie l'inégalité (11), puisque celle-ci vaut pour* $\log|f|$ *et qu'elle est une égalité pour les constantes et pour* $\log|z|$ *(qui sont harmoniques). Ainsi*

$$\begin{aligned}
\log|g(z)| &\le \int_{\partial\mathcal{A}} Q(z,w)\log|g(w)|\,\frac{dt}{2\pi} \\
\log|g(z)|^p &\le \int_{\partial\mathcal{A}} Q(z,w)\log|g(w)|^p\,\frac{dt}{2\pi} \\
|g(z)|^p &\le \int_{\partial\mathcal{A}} Q(z,w)|g(w)|^p\,\frac{dt}{2\pi}\ ,
\end{aligned}$$

car comme pour z *fixé,* $Q(z,w)\,\frac{dt}{2\pi}$ *est une mesure de probabilité sur* $\partial\mathcal{A}$ *et on applique l'inégalité de Jensen de la théorie de l'intégration. Cela donne l'inégalité (12) de l'énoncé. Il y a un unique choix de* $A>0$ *et de* $B\in\boldsymbol{R}$ *qui fera que les deux intégrales de droite dans (12) valent* 1 *:*

$$A^p r_1^{Bp}\int_0^{2\pi}|f(r_1\,e^{i\theta})|^p\,\frac{d\theta}{2\pi}=1\ ,$$

$$A^p r_2^{Bp}\int_0^{2\pi}|f(r_2\,e^{i\theta})|^p\,\frac{d\theta}{2\pi}=1\ ,$$

et pour ce choix on aura

$$A^p r^{Bp}\int_0^{2\pi}|f(r\,e^{i\theta})|^p\,\frac{d\theta}{2\pi}\le 1\ .$$

En écrivant $r=r_1^{1-u}r_2^u$, $0<u<1$, *et donc*

$$A^p r^{Bp}=\left(A^p r_1^{Bp}\right)^{1-u}\left(A^p r_2^{Bp}\right)^{u}\ ,$$

on voit qu'en éliminant A *et* B*, il vient :*

$$\int_0^{2\pi}|f(r\,e^{i\theta})|^p\,\frac{d\theta}{2\pi}\le\left(\int_0^{2\pi}|f(r_1\,e^{it})|^p\,\frac{dt}{2\pi}\right)^{1-u}\left(\int_0^{2\pi}|f(r_2\,e^{it})|^p\,\frac{dt}{2\pi}\right)^{u}\ ,$$

ce qu'il fallait établir.

F Troisième Partie

On notera dorénavant $Q_1^{r_1,r_2}(z)$ (resp. $Q_2^{r_1,r_2}(z)$) la fonction $Q_1(z)$ (resp. $Q_2(z)$) de la deuxième partie.

31. Montrer que pour z fixé dans $\mathcal{A}$ on a convergence uniforme de $Q_1^{\lambda r_1,r_2/\lambda}(z\,e^{-it})$ (resp. $Q_2^{\lambda r_1,r_2/\lambda}(z\,e^{-it})$) vers $Q_1(z\,e^{-it})$ (resp $Q_2(z\,e^{-it})$) lorsque $\lambda\to 1^+$ et $t\in[0,2\pi]$.

Cor. *On a, pour $z \in \mathcal{A}$, $z = r\,e^{i\theta}$, et $\lambda > 1$ suffisamment proche de* 1 *($\lambda r_1 < r < r_2/\lambda$) une formule explicite pour $Q_2^{\lambda r_1, r_2/\lambda}(z\,e^{-it})$ à savoir, d'après la formule (6) :*

$$\frac{\log(r/\lambda r_1)}{\log(\rho/\lambda^2)} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{(r/\lambda r_1)^n - (r/\lambda r_1)^{-n}}{(\rho/\lambda^2)^n - (\rho/\lambda^2)^{-n}}\cos(n(\theta - t))\ ,$$

ou encore :

$$\frac{\log(r/\lambda r_1)}{\log(\rho/\lambda^2)} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{\mathrm{sh}(n\log(r/\lambda r_1))}{\mathrm{sh}(n\log(\rho/\lambda^2))}\cos(n(\theta - t))\ ,$$

une série que ($r_1 < \lambda r_1 < \lambda_0 r_1 < \lambda_0^2 r_1 < r < r_2/\lambda_0^2 < r_2/\lambda_0 < r_2/\lambda < r_2$) l'on peut majorer terme à terme par la série convergente indépendante de λ et de t :

$$\frac{\log(r/r_1)}{\log(\rho/\lambda_0^2)} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{\mathrm{sh}(n\log(r/r_1))}{\mathrm{sh}(n\log(\rho/\lambda_0^2))} < \infty\ .$$

Comme de plus chaque terme de la série converge pour $\lambda \to 1$ vers le terme correspondant de la série pour $Q_2(z\,e^{-it})$, et cela uniformément en t, il en résulte la propriété demandée. Le même raisonnement s'appliquerait aux fonctions Q_1.

On rappelle que toute fonction analytique f dans l'anneau $\mathcal{A}$ s'écrit sous la forme d'une série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} a_j z^j \tag{13}$$

et que le rayon de convergence de $\sum_{j\geq 0} a_j z^j$ est au moins r_2 et le rayon de convergence de $\sum_{j\geq 0} a_{-j} w^j$ est au moins $1/r_1$.

32. Que vaut $\int_0^{2\pi} |f(r\,e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$ pour $r_1 < r < r_2$?

Cor. *Cela vaut $\sum_{j\in\boldsymbol{Z}} |a_j|^2 r^{2j}$.*

On suppose dorénavant f bornée dans $\mathcal{A}$, non identiquement nulle.

33. Montrer que la limite $\widetilde{f}$ de f au sens L^2 sur $\partial\mathcal{A}$ existe.

Cor. *Comme f est bornée, par la question précédente $\sum_{j\in\boldsymbol{Z}} |a_j|^2 r^{2j}$ est borné pour $r_1 < r < r_2$, donc par le théorème de la convergence monotone appliqué séparément aux indices positifs et négatifs, $\sum_{j\geq 0} |a_j|^2 r_2^{2j} + \sum_{j<0} |a_j|^2 r_1^{2j} < \infty$. Les coefficients de Fourier de $f(r\,e^{i\theta})$ que l'on peut voir comme formant un vecteur dans $l^2(\boldsymbol{Z})$ convergent chacun pour $r \to r_2$ (resp. $r \to r_1$) et cette convergence est dominée par la fonction sur $\boldsymbol{Z}$ $j \mapsto |a_j| r_2^j$ ($j \geq 0$), $j \mapsto |a_j| r_1^j$, ($j < 0$), donc par le théorème de la convergence dominée, ces vecteurs convergent dans $l^2(\boldsymbol{Z})$ vers une limite pour $r \to r_2$, resp. pour $r \to r_1$. Par le théorème de Riesz-Fischer il existe donc une fonction de carré intégrable sur le bord de $\mathcal{A}$ qui est la limite au sens L^2 de f.*

34. Montrer

$$z \in \mathcal{A} \Rightarrow \quad f(z) = \int_{\partial \mathcal{A}} Q(z,w)\widetilde{f}(w)\,\frac{dt}{2\pi}\ , \tag{14}$$

et prouver que $f(r\,e^{i\theta})$ converge pour presque tout θ vers $\widetilde{f}(r_1\,e^{i\theta})$ lorsque $r \to r_1$ et vers $\widetilde{f}(r_2\,e^{i\theta})$ lorsque $r \to r_2$.

Cor. *La formule est valable (puisque f est harmonique à valeurs complexes) si l'on prend, pour z fixé, $\lambda > 1$ suffisamment proche de 1 et si l'on remplace $\mathcal{A}$ par l'anneau $\lambda r_1 < r < r_2/\lambda$. On justifie le passage à la limite en invoquant la convergence uniforme des fonctions correspondantes Q^λ, établie à la question 31, convergence uniforme qui implique la convergence L^2, et la convergence L^2 de f vers $\widetilde{f}$. Si l'on voit les intégrales comme des produits scalaires on peut donc conclure qu'elles convergent vers l'intégrale de l'équation (14), ce qui prouve la validité de la formule. Le deuxième point (convergence ponctuelle radiale) résulte du fait que l'on sait que cela est vrai (Théorème de Fatou) pour le noyau de Poisson, et qu'en fait Q_2 ne diffère du noyau de Poisson que par une fonction (harmonique) continue y-compris au bord C_2 et identiquement nulle sur ce bord. Même argument pour la convergence ponctuelle en un point du bord C_1 quitte à se ramener à C_2 après un changement $f(z) \to \overline{f(r_1 r_2/\bar{z})}$.*

35. Prouver

$$z \in \mathcal{A} \Rightarrow \quad \log|f(z)| \le \int_{\partial \mathcal{A}} Q(z,w)\log|\widetilde{f}(w)|\,\frac{dt}{2\pi} \tag{15}$$

et en particulier établir le fait que $\log|\widetilde{f}|$ est intégrable.

On rappelle le lemme de Fatou de la théorie de l'intégration qui dit que $\int \liminf g_n d\nu \le \liminf \int g_n d\nu$ si les g_n sont minorés par une fonction intégrable et que $\int \limsup g_n d\nu \ge \limsup \int g_n d\nu$ si les g_n sont majorés par une fonction intégrable.

Cor. *On essaye d'appliquer l'argument précédent de passage à la limite, mais en partant de l'analogue des inégalités (15) sur les anneaux $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda r_1 < r < r_2/\lambda$. Pour ces anneaux plus petits l'inégalité est valable par le Théorème 3. Pour justifier le passage à la limite on utilise l'hypothèse que f est bornée. Sa limite au sens L^2 sur le bord l'est donc aussi (presque partout), avec la même borne. Les fonctions Q_λ pour z fixé et $1 < \lambda \le 1+\epsilon$ sont positives et bornées supérieurement par une constante indépendante de λ et de t ($w = \lambda r_1\,e^{it}$ ou $r_2\,e^{it}/\lambda$). On a donc des fonctions à valeurs réelles, bornées supérieurement par une constante, et convergeant ponctuellement presque partout (peut-être parfois vers $-\infty$), grâce à la question précédente. Par le Lemme de Fatou on a le fait que la* $\limsup$ *des intégrales est bornée supérieurement par l'intégrale de la fonction limite ponctuelle à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \boldsymbol{R}$, c'est-à-dire par le terme de droite de (15). Or* $\log|f(z)|$ *minore chaque intégrale donc aussi leur* $\liminf$ *donc aussi leur* $\limsup$ *donc l'inégalité (15) est prouvée. Comme pour z fixé la fonction $Q(z,w)$ de w est une fonction continue à valeurs strictement positive, l'intégrabilité de* $\log|\widetilde{f}|$ *en résulte. On voit donc que les théorèmes classiques de Fatou, des frères Riesz, et de*

Szëgo sur les fonctions analytiques dans le disque unité valent aussi pour un anneau.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

Analyse Complexe, de Fourier, Hilbertienne
Cours de DEA (1er semestre 2003-2004)
J.F. Burnol

Examen du 22 mars 2004 (durée : 3 heures)

Les quatre problèmes sont indépendants, si ce n'est que la dernière question du quatrième problème nécessite en plus du cours le résultat démontré à la question 13 du troisième problème.

Problème 1

On rappelle la notation $P_b(x) = \frac{b}{\pi(x^2+b^2)}$ pour $b > 0$ et $x \in \mathbf{R}$. Pour $\lambda > 0$ et pour $b > 0$ on notera :

$$L_{\lambda,b}(t) = \max_{|u|\leq \frac{b}{\lambda}} P_b(t-u)$$

1. Montrer

$$L_{\lambda,b}(t) = \begin{cases} P_b(t-\frac{b}{\lambda}) & t \geq \frac{b}{\lambda} \\ \frac{1}{\pi b} & |t| \leq \frac{b}{\lambda} \\ P_b(t+\frac{b}{\lambda}) & t \leq -\frac{b}{\lambda} \end{cases}$$

et $\int_{\mathbf{R}} L_{\lambda,b}(t)dt = 1 + \frac{2}{\pi\lambda}$.

On notera $\nu_{\lambda,b}$ la mesure positive sur $[0,+\infty[$ telle que

$$L_{\lambda,b}(t) = \int_{[t,+\infty[} d\nu_{\lambda,b}(u) \qquad (t \geq 0) \tag{1}$$

2. Soit g une fonction vérifiant $\int_{\mathbf{R}} \frac{|g(t)|}{1+t^2} dt < +\infty$. On suppose de plus qu'il existe une constante $C \geq 0$ avec

$$\forall x \geq 0 \quad \int_{-x}^{x} |g(t)|dt \leq 2Cx$$

En utilisant (1) montrer :

$$\int_{\mathbf{R}} L_{\lambda,b}(t)|g(t)|dt \leq (1+\frac{2}{\pi\lambda})C \tag{2}$$

3. On maintient les hypothèses de la question précédente et on note $f(z)$ l'intégrale de Poisson de g : $f(a+ib) = \int_{\mathbf{R}} P_b(a-t)g(t)dt$. On note $\mathcal{C}_\lambda$ le cône $z = a+ib$, $b \geq \lambda|a|$, $b > 0$. Montrer qu'il existe une constante $\kappa(\lambda)$ telle que

$$\limsup_{z \in \mathcal{C}_\lambda \to 0} |f(z)| \leq \kappa(\lambda) C \tag{3}$$

On majorera $|f(a+ib)|$, pour $b \geq \lambda|a|$ en utilisant les questions précédentes.

4. Dans le cas où g est identiquement nulle dans un voisinage de 0, que peut-on dire sur $\lim_{z \to 0} f(z)$? Montrer en utilisant l'équation (3) pour la restriction de g à des intervalles $[-\delta, +\delta]$, $\delta \to 0$:

$$\limsup_{z \in \mathcal{C}_\lambda \to 0} |f(z)| \leq \kappa(\lambda) \limsup_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} |g(t)| dt\ , \tag{4}$$

sous la seule hypothèse que $\int_{\mathbf{R}} \frac{|g(t)|}{1+t^2} dt < +\infty$.

5. On suppose qu'il existe un nombre complexe l tel que $\int_{-h}^{+h} |g(t) - l| dt =_{h \to 0} o(h)$. Montrer

$$\lim_{z \in \mathcal{C}_\lambda \to 0} f(z) = l$$

Problème 2

6. Soit G une fonction analytique sur le disque unité ouvert $D = D(0,1)$. On suppose que G prend ses valeurs dans le secteur angulaire $r > 0, |\theta| < \alpha$ avec $0 < \alpha < \pi/2$. Montrer qu'il existe une constante avec $|G| \leq C \cdot \mathrm{Re}(G)$, et en déduire $G \in \mathbf{H}^1$.

7. Soit w une fonction analytique sur D, non constante, vérifiant $\forall z \in D\ |w(z)| \leq 1$. Montrer $z \in D \implies |w(z)| < 1$. Montrer en se ramenant à la question précédente que les fonctions $\log(1+w)$ et $\log(1-w)$ appartiennent à $\mathbf{H}^1$ (la notation log désignant la branche principale du logarithme, $z \in]0, +\infty[\implies \log(z) \in \mathbf{R}$).

8. (suite) Soit $\widetilde{w}$ la fonction sur S^1 définie presque partout par $\widetilde{w}(\,e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} w(r\,e^{i\theta})$. Que vaut $\int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1+\widetilde{w}}{1-\widetilde{w}} \right| \frac{d\theta}{2\pi}$ en fonction de $w(0)$?

9. Soit F une fonction analytique sur D à valeurs dans $\mathrm{Re}(Z) > 0$, non constante. En se ramenant à la question précédente (que peut-on dire de $w = \frac{F-1}{F+1}$?) , prouver que $F \in \mathcal{N}$ et que F est une fonction extérieure, à une constante multiplicative près.

Problème 3

Soit μ une mesure complexe (finie) sur S^1 et soit $h = P[\mu]$ son intégrale de Poisson qui est une fonction harmonique à valeurs complexes sur $D = D(0,1)$. On rappelle la notation $h_r(e^{i\theta}) = h(r\,e^{i\theta})$ et le fait que les mesures $h_r\,\frac{d\theta}{2\pi}$ convergent faiblement vers μ lorsque $r \to 1$. La notation $|\mu|$ désigne la mesure des variations de μ, et l'on rappelle que l'on peut écrire $\mu = k|\mu|$ avec une certaine fonction k mesurable partout de module 1. De plus on choisit des fonctions continues k_n vérifiant $\forall\theta \quad |k_n(e^{i\theta})| \leq 1$, et $k_n \to k$ dans $L^2(|\mu|)$ (cela est possible d'après une démonstration du cours). Les intégrales, sauf indication du contraire, sont sur S^1 tout entier.

10. Soit g une fonction continue sur S^1, à valeurs positives ou nulles. Montrer :

$$\int g\,d|\mu| = \lim \int g\,\overline{k_n}\,d\mu \tag{5}$$

11. En utilisant $\mathrm{Re}\int g\,\overline{k_n}\,d\mu = \lim_{r\to 1} \mathrm{Re}\int g\,\overline{k_n}\,h_r\,\frac{d\theta}{2\pi}$, déduire de (5) :

$$\int g\,d|\mu| \leq \liminf_{r\to 1} \int g\,|h_r|\,\frac{d\theta}{2\pi} \tag{6}$$

On rappelle l'hypothèse $g \geq 0$.

12. Montrer la majoration $|h_r| \leq H_r$ où H est l'intégrale de Poisson de la mesure positive finie $|\mu|$. En déduire, pour toute fonction g continue à valeurs positives ou nulles :

$$\limsup_{r\to 1} \int g\,|h_r|\,\frac{d\theta}{2\pi} \leq \int g\,d|\mu| \tag{7}$$

13. Déduire des questions précédentes que $|\mu|$ est la limite faible des mesures $|h_r|\,\frac{d\theta}{2\pi}$, c'est-à-dire que pour toute fonction continue g sur S^1 à valeurs complexes on a :

$$\lim_{r\to 1} \int g\,|h_r|\,\frac{d\theta}{2\pi} = \int g\,d|\mu| \tag{8}$$

Montrer que les normes L^1 des fonctions h_r convergent vers la variation totale de la mesure μ.

14. Soit I un arc ouvert de S^1. En partant de $\int_I |h_r|\,\frac{d\theta}{2\pi} \geq \int_I g\,|h_r|\,\frac{d\theta}{2\pi}$ pour toute fonction continue à valeurs dans $[0,1]$ et supportée dans I, montrer :

$$\liminf \int_I |h_r|\,\frac{d\theta}{2\pi} \geq |\mu|(I) \tag{9}$$

15. On note $\widetilde{h}$ la densité de la partie absolument continue de la mesure complexe μ, dont on sait aussi qu'elle vérifie presque partout $\widetilde{h}(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} h_r(e^{i\theta})$. Montrer :

$$\left(\lim_{r\to 1}\int_I |h_r(e^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi} = \int_I |\widetilde{h}(e^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi}\right) \implies \mu_s|_I \equiv 0\ ,$$

où μ_s désigne la partie singulière de la mesure μ. On admettra : $|\mu|_s = |\mu_s|$.

Problème 4

On se donne dans ce Problème une fonction $\psi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t} = +\infty \tag{10}$$

On choisit M_0 tel que $t \geq M_0 \implies \psi(t) \geq t$. On note σ la mesure $\frac{d\theta}{2\pi}$ sur S^1. On rappelle que lorsque des fonctions positives intégrables f_n convergent faiblement vers une mesure positive finie ν on a $\nu(U) \leq \liminf \int_U f_n\,\frac{d\theta}{2\pi}$ pour tout ouvert U.

16. Pour $M > 0$, on pose $\lambda(M) = \inf_{t\geq M}\frac{\psi(t)}{t}$. Montrer que $\lambda(M)$ est une fonction croissante de M avec $\lim_{M\to\infty}\lambda(M) = +\infty$. Montrer :

$$M \geq M_0 \implies \forall t \geq 0 \quad t \leq M + \frac{\psi(t)}{\lambda(M)} \tag{11}$$

17. On suppose données des fonctions positives intégrables f_n vérifiant :

$$\exists C < +\infty \qquad \forall n \int_{S^1}\psi(f_n)\,\frac{d\theta}{2\pi} \leq C \tag{12}$$

On suppose de plus que les f_n convergent faiblement vers une certaine mesure positive finie ν. Soit U un ouvert. Montrer :

$$M \geq M_0 \implies \nu(U) \leq M\sigma(U) + \frac{C}{\lambda(M)} \tag{13}$$

18. Soit A une partie mesurable de S^1. Montrer que l'inégalité précédente vaut avec A à la place de l'ouvert U. On utilisera la régularité de la mesure de Lebesgue.

19. Montrer que la mesure ν est absolument continue par rapport à σ.

20. Soit F une fonction analytique sur le disque unité ouvert $D(0,1)$. On suppose :

$$\exists r_0 < 1 \qquad \sup_{r_0<r<1}\int\psi\left(\Big|\log|F(r\,e^{i\theta})|\Big|\right)\frac{d\theta}{2\pi} < +\infty \tag{14}$$

Montrer que $F \in \mathcal{N}$ et que F n'a pas de facteur singulier dans sa décomposition canonique (de Riesz-Smirnov).