DEUG MIAS 1 — Année 2002-2003
Premier et deuxième semestres
Sujets d'examens et Corrigés

Jean-François Burnol, le 4 juin 2003.

Les pages suivantes reproduisent les partiels, examens, examens de rattrapage, pour l'année 2002–2003, avec certains corrigés.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1ère année - Mathématiques
Section 3
Épreuve du 16 novembre 2002
Durée : 3 heures. Sans document et sans calculatrice.

Le barême indiqué n'est qu'approximatif. Toute réponse devra être justifiée par un raisonnement dont la présentation soignée mettra en évidence les étapes successives, en évitant d'y inclure des phrases ou formules n'ayant aucun rapport avec la question, ce qui d'ailleurs vous ferait perdre beaucoup de temps. Les correcteurs apprécient énormément les “donc”, “ainsi”, “ce qui implique”, “d'où”, “sachant que”, “ce qui est une contradiction”, “d'après le Théorème XYZ du cours, on a”, ..., sans excès bien sûr. La notation prendra également en compte de manière significative la propreté et la lisibilité de la copie, et la qualité est plus importante que la quantité.

Exercice 1 (3 points)

Déterminer (avec justification) PGCD(a, b) et PPCM(a, b) pour les couples d'entiers suivants :
1. $a = 85$, $b = 69$.
2. $a = 11^3 \times 125$, $b = 55$.
3. $a = 6^n$, $b = 8^n$, avec $n \geq 1$.

Exercice 2 (4 points)

1. Soient e et f deux entiers premiers entre eux. Que dit l'identité de Bezout ? On suppose de plus que e divise fg. Que dit le Théorème de Gauss ? Démontrer le Théorème de Gauss en utilisant l'identité de Bezout.
2. Montrer en utilisant l'identité de Bezout que si a, b, c sont des entiers tels que : a et b sont premiers entre eux, a divise c, et b divise c, alors ab divise c.
3. Soit d un entier. Montrer que $d(d^2 - 1)$ est divisible par 2 et par 3, et en déduire qu'il est divisible par 6.
4. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ le nombre $d(d^{2n} - 1)$ est divisible par 6.

Exercice 3 (3 points)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et soit L un nombre réel. Rappeler la définition de “$\lim_{n\to\infty} u_n = L$”.

2. On considère la suite définie selon $u_n = \frac{1}{2} + (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)$. Montrer :

$$\forall\, n \geq 1 : \ |u_n - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2n}$$

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser quelle est sa limite L.

Exercice 4 (6 points)

Cet exercice porte sur une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x on a $x^2 + x + 1 > 0$ (ind. : que vaut $(x+\frac{1}{2})^2$?). En déduire qu'il n'existe aucun $n \geq 1$ avec $u_n = -1$ (ind. : examiner u_{n-1}).

2. Montrer la validité de l'assertion :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Big(u_{n+1} = 0 \Rightarrow \big((u_n = 0) \text{ ou } (n = 0 \text{ et } u_0 = -1)\big)\Big)$$

3. On suppose que u_0 n'est ni 0 ni -1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

4. On suppose $u_0 \geq 2$. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2^{2^n}$.

5. On suppose $u_0 > 0$. En raisonnant par l'absurde montrer : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 5 (3 points)

Pour chacune des fonctions f suivantes, de domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$, et pour le x_0 donné, trouver $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$ et $x \in D_f$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{100}$. Attention une réponse du style “on prend $\delta = 10^{-100}$ et ça marche” n'est pas suffisante si elle n'est pas accompagnée d'une démonstration de l'implication :

$$(|x - x_0| < \delta \text{ et } x \in D_f) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{100}$$

On aura intérêt dans chaque cas à écrire $x = x_0 + h$ et à travailler avec $f(x_0+h) - f(x_0)$.

1. On prend $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, $x_0 = 1$.

2. On prend $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $D_f =]-1, +\infty[$, $x_0 = 3$.

Exercice 6 (2 points)

Montrer qu'il existe un nombre réel x qui est dans l'intervalle $[1, 8]$ et qui vérifie :

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{x + x^2}{4 + x}$$

Indication : quelle propriété possède la fonction égale à la différence entre les deux membres de cette équation ? que vaut-elle en $x = 1$ et en $x = 8$?

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1ère année - Mathématiques
Section 3
Épreuve du 16 novembre 2002
Durée : 3 heures. Sans document et sans calculatrice.

CORRIGÉ

Exercice 1 (3 points)

Déterminer (avec justification) $\mathrm{PGCD}(a, b)$ et $\mathrm{PPCM}(a, b)$ pour les couples d'entiers suivants :
1. $a = 85$, $b = 69$.
2. $a = 11^3 \times 125$, $b = 55$.
3. $a = 6^n$, $b = 8^n$, avec $n \geq 1$.

Corr.: Nous utiliserons la formule du cours $\mathrm{PPCM}(a, b) = \dfrac{ab}{\mathrm{PGCD}(a, b)}$ (pour $ab \neq 0$) dans chacun des trois cas. **1.** : On utilise l'algorithme d'Euclide : $85 = 1 \times 69 + 16$, $69 = 4\times16+5$, $16 = 3\times5+1$. Donc $\mathrm{PGCD}(85, 69) = 1$ et $\mathrm{PPCM}(85, 69) = 85\times69 = 5865$.
2. : Dans ce cas on utilise la décomposition en facteurs premiers, $a = 11^3 \times 5^3$, $b = 5\times11$ (en effet $125 = 5^3$). Pour former $\mathrm{PGCD}(a, b)$ on retient pour chaque nombre premier divisant et a et b sa plus grande puissance apparaissant à la fois dans a et dans b, soit ici 5 et 11, et donc $\mathrm{PGCD}(a, b) = 55$. D'où $\mathrm{PPCM}(a, b) = ab/55 = a = 11^3 \times 125$.
3. : Les décompositions en facteurs premiers sont respectivement $a = 2^n3^n$ et $b = 2^{3n}$, donc $\mathrm{PGCD}(a, b) = 2^{\min(n,3n)} = 2^n$ et $\mathrm{PPCM}(a, b) = 2^n3^n2^{3n}/2^n = 3^n2^{3n} = 3^n8^n = 24^n$.

Exercice 2 (4 points)

1. Soient e et f deux entiers premiers entre eux. Que dit l'identité de Bezout ? On suppose de plus que e divise fg. Que dit le Théorème de Gauss ? Démontrer le Théorème de Gauss en utilisant l'identité de Bezout.
2. Montrer en utilisant l'identité de Bezout que si a, b, c sont des entiers tels que : a et b sont premiers entre eux, a divise c, et b divise c, alors ab divise c.
3. Soit d un entier. Montrer que $d(d^2 - 1)$ est divisible par 2 et par 3, et en déduire qu'il est divisible par 6.
4. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ le nombre $d(d^{2n} - 1)$ est divisible par 6.

Corr.: 1. : Soient e et f deux entiers premiers entre eux. L'identité de Bezout dit l'existence de deux entiers relatifs x et y vérifiant $xe + yf = 1$ (et d'ailleurs il y a une infinité de possibilités pour les couples (x, y) puisque si (x, y) marche alors $(x - f, y + e)$ marche aussi). Si de plus e divise fg le Théorème de Gauss affirme que e divise g. Démontrons-le comme il est demandé avec une identité de Bezout $xe+yf = 1$. Après multiplication par g cela donne $xeg + yfg = g$. Or par hypothèse $e|fg$ donc $e|yfg$ et, bien sûr, $e|xeg$, donc e divise la somme qui est égale à g, et c'est ce qu'il fallait montrer.
2. : Comme a et b sont premiers entre eux il existe par l'identité de Bezout des entiers relatifs x et y avec $ax + by = 1$. Multiplions par c, cela donne $axc + byc = c$. Comme $b|xc$ on a $ab|axc$. Comme $a|yc$ on a $ab|byc$. Donc ab divise la somme, qui vaut c, ce qu'il fallait montrer.
3. : Comme $d(d^2 - 1) = d(d - 1)(d + 1)$ est le produit de trois entiers consécutifs, l'un d'entre eux est divisible par 3 et donc $d(d^2 - 1)$ est divisible par 3. De même $d(d - 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs et est donc pair. Donc $d(d^2 - 1)$ est divisible à la fois par 2 et par 3 qui sont premiers entre eux, il s'en suit qu'il est aussi divisible par leur produit 6, par la question précédente.
4. : On a l'identité $d^{2n} - 1 = (d^2)^n - 1 = (d^2 - 1)((d^2)^{n-1} + \cdots + 1)$ (plus précisément $= (d^2-1)\sum_{0\leq j\leq n-1}(d^2)^{n-1-j}$). Donc d^2-1 divise $(d^{2n}-1)$, donc $d(d^2-1)$ divise $d(d^{2n}-1)$, donc ce dernier est aussi un multiple de 6.

Exercice 3 (3 points)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et soit L un nombre réel. Rappeler la définition de "$\lim_{n\to\infty} u_n = L$".
2. On considère la suite définie selon $u_n = \frac{1}{2} + (-1)^n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$. Montrer :

$$\forall\, n \geq 1 : \ |u_n - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2n}$$

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser quelle est sa limite L.

Corr.: 1. : La définition est : "pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier M tel que pour tout entier $n \geq M$ on a $|u_n - L| \leq \epsilon$."
2. Comme $\sqrt{n^2 + 1} - n > 0$ on a $|u_n - \frac{1}{2}| = \sqrt{n^2 + 1} - n$. Il suffit donc de montrer $\sqrt{n^2 + 1} - n < \frac{1}{2n}$, et pour cela il suffit de vérifier $\sqrt{n^2 + 1} < n + \frac{1}{2n}$, ce qui sera vrai si $n^2 + 1 < (n + \frac{1}{2n})^2$. Or $(n + \frac{1}{2n})^2 = n^2 + 1 + \frac{1}{4n^2}$, donc est effectivement strictement supérieur à $n^2 + 1$.
3. Soit $\epsilon > 0$ et choisissons M plus grand que $\frac{1}{2\epsilon}$. Alors $\frac{1}{2M}$ est au plus ϵ et pour tout $n \geq M$ on a $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2M} \leq \epsilon$. Le critère de la définition, rappelé en question **1**, est ainsi vérifié avec $L = \frac{1}{2}$ puisque $|u_n - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2n} \leq \epsilon$ pour $n \geq M$ (on a le droit d'utiliser l'inégalité du **2** puisque $n > 0$). Cela prouve donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $L = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 (6 points)

Cet exercice porte sur une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour tout

$n \geq 0$.
1. Montrer que pour tout nombre réel x on a $x^2 + x + 1 > 0$ (ind. : que vaut $(x + \frac{1}{2})^2$?). En déduire qu'il n'existe aucun $n \geq 1$ avec $u_n = -1$ (ind. : examiner u_{n-1}).
2. Montrer la validité de l'assertion :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Big(u_{n+1} = 0 \Rightarrow \big((u_n = 0) \text{ ou } (n = 0 \text{ et } u_0 = -1)\big)\Big)$$

3. On suppose que u_0 n'est ni 0 ni -1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
4. On suppose $u_0 \geq 2$. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2^{2^n}$.
5. On suppose $u_0 > 0$. En raisonnant par l'absurde montrer : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Corr.: 1. : On calcule $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$. Or un carré est toujours ≥ 0. Donc $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$. Supposons que $n \geq 1$ soit tel que $u_n = -1$. Alors, comme $u_n = u_{n-1} + u_{n-1}^2$, cela donne $0 = 1 + u_{n-1} + u_{n-1}^2$, mais nous venons de voir que cela ne se peut, quelle que soit la valeur dans $\mathbb{R}$ de u_{n-1}. Donc si $n \geq 1$, nécessairement $u_n \neq -1$.
2. : Comme $u_{n+1} = u_n + u_n^2 = u_n(u_n + 1)$, si u_{n+1} est nul alors u_n vaut soit 0 soit -1. Mais si $n \geq 1$ cette dernière possibilité est exclue par la question précédente donc en fait $u_n = 0$. Si $u_n \neq 0$ c'est donc que $n = 0$. Et alors u_0 doit être -1. Ainsi l'assertion $(u_n = 0)$ ou $(n = 0$ et $u_0 = -1)$ est vraie, et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est ce qu'il fallait établir.
3. : Comme $u_n^2 \geq 0$ on a $u_{n+1} \geq u_n$ avec égalité seulement si $u_n = 0$. La suite est donc croissante et si elle n'est pas strictement croissante c'est qu'il existe un n avec $u_n = 0$. Prenons la contraposée (pour $n \geq 0$ fixé) de l'assertion de la question précédente :

$$\big((u_n \neq 0) \text{ ET } (n > 0 \text{ OU } u_0 \neq -1)\big) \Rightarrow u_{n+1} \neq 0$$

On peut l'utiliser pour démontrer par récurrence que $u_n \neq 0$ pour tout n si u_0 n'est ni 0 ni -1. Pour $n = 0$, $u_0 \neq 0$. Si $u_n \neq 0$ alors

$$(u_n \neq 0) \text{ ET } (n > 0 \text{ OU } u_0 \neq -1)$$

est vrai puisque soit $n > 0$ soit $n = 0$ et alors on a fait l'hypothèse $u_0 \neq -1$. Donc $u_{n+1} \neq 0$. Par le principe de récurrence on a ainsi montré $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$.
4. : Nous faisons la démonstration par récurrence. Pour $n = 0$ on a $2^{2^0} = 2^1 = 2$ donc $u_0 \geq 2^{2^0}$. Si $u_n \geq 2^{2^n}$ alors $u_{n+1} = u_n + u_n^2 \geq 2^{2^n} + (2^{2^n})^2$ (on remarquera que passer d'une inégalité $a \geq b$ à $a^2 \geq b^2$ n'est licite que si $b \geq 0$, et ici on a bien le droit d'écrire $u_n^2 \geq (2^{2^n})^2$ puisque $2^{2^n} \geq 0$). Or $(2^{2^n})^2 = 2^{2^n \times 2} = 2^{2^{n+1}}$. Donc $u_{n+1} \geq 2^{2^{n+1}}$ et par récurrence cela établit la validité pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $u_n \geq 2^{2^n}$.
5. Par la question **3** la suite est (strictement) croissante. Par un théorème du cours elle a donc une limite L finie, ou infinie $(+\infty)$. Supposons que L soit finie. La suite u_{n+1} a elle aussi L comme limite, et que comme la fonction $x \mapsto x + x^2$ est une fonction continue, la suite $u_n + u_n^2$ a pour limite $L + L^2$. On aurait ainsi $L = L + L^2$, d'où $L^2 = 0$ d'où $L = 0$. Mais comme la suite est croissante on a $L \geq u_0$ donc $L > 0$. Ceci est une contradiction, l'hypothèse "L est finie" était donc absurde, et $L = +\infty$.

Exercice 5 (3 points)

Pour chacune des fonctions f suivantes, de domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$, et pour le x_0 donné, trouver $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$ et $x \in D_f$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{100}$. Attention une réponse du style "on prend $\delta = 10^{-100}$ et ça marche" n'est pas suffisante si elle n'est pas accompagnée d'une démonstration de l'implication :

$$(|x - x_0| < \delta \text{ et } x \in D_f) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{100}$$

On aura intérêt dans chaque cas à écrire $x = x_0 + h$ et à travailler avec $f(x_0 + h) - f(x_0)$.
1. On prend $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, $x_0 = 1$.
2. On prend $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $D_f =]-1, +\infty[$, $x_0 = 3$.

Corr.: 1. : On calcule $f(1+h) = 1+2(1+h)+3(1+h)^2 = 3+2h+3(1+2h+h^2) = 6+8h+3h^2$. Donc $f(1+h) - f(1) = 8h + 3h^2$, qui est majoré en valeur absolue par $|h|(8+3|h|)$. On s'astreint à ne choisir qu'un δ avec $\delta \leq 1$. Si $|h| \leq \delta$ alors $|f(1+h) - f(1)| \leq 11|h|$. Cela sera $\leq \frac{1}{100}$ pour $|h| \leq \frac{1}{1100}$. On prend donc $\delta = \frac{1}{1100}$. Comme il est inférieur à 1 les calculs sont justifiés a posteriori.
2. : On calcule $f(3+h) - f(3) = \frac{1}{4+h} - \frac{1}{4} = \frac{-h}{16+4h}$. Ce calcul est licite pour $4 + h \neq 0$. On s'astreint à ce que notre futur choix pour δ soit tel que $\delta \leq 1$. Si $|h| \leq \delta$ alors $|h| \leq 1$ et donc $3 + h$ est bien dans D_f. De plus $|16 + 4h|$ est minoré par $16 - 4|h| \geq 12$ donc $|f(3+h) - f(3)| \leq \frac{|h|}{12}$. On prend $\delta = \frac{12}{100}$. Ce δ est bien > 0 et aussi il est inférieur à 1. Donc pour $|h| \leq \delta$ les calculs précédents sont justifiés et donnent $|f(3+h) - f(3)| \leq \frac{|h|}{12} \leq \frac{12}{100}\frac{1}{12} = \frac{1}{100}$, comme il était désiré.

Exercice 6 (2 points)

Montrer qu'il existe un nombre réel x qui est dans l'intervalle $[1, 8]$ et qui vérifie :

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{x + x^2}{4 + x}$$

Indication : quelle propriété possède la fonction égale à la différence entre les deux membres de cette équation ? que vaut-elle en $x = 1$ et en $x = 8$?

Corr.: Soit $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - \frac{x+x^2}{4+x}$. On calcule $f(1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ et $f(8) = 2 - \frac{72}{12} = 2 - 6 = -4$. Par ailleurs les fonctions $x \mapsto x + x^2$ et $x \mapsto 4 + x$ sont continues sur $[1, 8]$ et $x \mapsto 4 + x$ ne s'annule pas sur cet intervalle, donc le quotient $x \mapsto \frac{x+x^2}{4+x}$ est une fonction continue sur cet intervalle. On sait que la fonction $x \mapsto x^{1/3}$ est continue sur $[0, \infty[$ donc en particulier sur $[1, 8]$. La fonction $f(x)$ comme différence de deux fonctions continues est donc une fonction continue sur cet intervalle. Elle prend une valeur positive en $x = 1$ et une valeur négative en $x = 8$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre réel x dans $[1, 8]$ avec $f(x) = 0$, ce qui signifie que

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{x + x^2}{4 + x}$$

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1ère année - Mathématiques

Section 3

Épreuve du 25 janvier 2003

Durée : 3 heures. Sans document et sans calculatrice.

Avertissement : on insiste sur la nécessité de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, pour justifier les réponses.

Exercice 1

1. Soit E un sous-ensemble de $\mathbf{R}$. Rappeler la définition de "majorant de E" et de "borne supérieure de E".

2. Soient E et F deux sous-ensembles non vides et majorés de $\mathbf{R}$. Montrer que $E \cup F$ a une borne supérieure dans $\mathbf{R}$ et que l'on a

$$\sup(E \cup F) = \max(\sup(E), \sup(F)).$$

Exercice 2

1. Rappeler la définition de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin(x)}$. Calculer sa dérivée et représenter son graphe.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \text{Arcsin}(\sin(x))$ pour tout x de $\mathbf{R}$. Montrer que f est continue, impaire et périodique de période 2π. Calculer sa valeur en $-\pi$, $-\pi/2$, 0, $\pi/2$ et π. Représenter son graphe.

Exercice 3

Dans cet exercice, Log désigne le logarithme népérien (parfois aussi noté log ou ln). Pour simplifier l'écriture on écrit $\text{Log}\, x$ au lieu de $\text{Log}(x)$ et aussi $\text{Log}\,\text{Log}\, x$ au lieu de $\text{Log}(\text{Log}(x))$. L'intervalle $]1, +\infty[$ est noté I.

On définit deux fonctions f et g sur I en posant, pour tout x de I,

$$f(x) = \text{Log}\,\text{Log}\, x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x\,\text{Log}\, x}.$$

1. Montrer que g est strictement décroissante sur I (on peut étudier la dérivée de g, mais il y a plus simple !).

2. Montrer que f est dérivable sur I et que l'on a $f' = g$.

3. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\frac{1}{(k+1)\operatorname{Log}(k+1)} \leq \operatorname{Log}\operatorname{Log}(k+1) - \operatorname{Log}\operatorname{Log} k \leq \frac{1}{k \operatorname{Log} k}.$$

4. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \operatorname{Log} k} = \frac{1}{2 \operatorname{Log} 2} + \cdots + \frac{1}{n \operatorname{Log} n}.$$

Déduire de la question précédente $S_n \geq \operatorname{Log}\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log}\operatorname{Log} 2$.
En déduire $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose maintenant $T_n = S_n - \operatorname{Log}\operatorname{Log} n$.

5. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

6. Montrer que $(T_n)_{n\geq 2}$ converge et que sa limite ℓ vérifie

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{\operatorname{Log} 2}\right) \leq \ell \leq \frac{1}{2\operatorname{Log} 2} + \operatorname{Log}\left(\frac{1}{\operatorname{Log} 2}\right).$$

Exercice 4

Déterminer tous les nombres complexes z vérifiant l'équation

$$z^4 - (8+4i)z^2 + 12 - 16i = 0$$

(on demande que chaque solution soit donnée sous la forme $z = x + iy$ avec des valeurs numériques explicites pour les parties réelles et imaginaires x et y).

Exercice 5

Soit un entier $n \geq 1$. On considère le polynôme $A(X) = X^n + X + 1$. Calculer $A(1)$ et $A'(1)$. En déduire le reste de la division euclidienne de $A(X)$ par $(X-1)^2$.

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1ère année - Mathématiques
Sections 3 et 4
Épreuve du 5 avril 2003 — ANALYSE
Durée : 1 heure 30. Sans document et sans calculatrice.

Avertissement : on insiste sur la nécessité, pour justifier les réponses, de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, dans une présentation propre et soignée.

Le barême donné a seulement une valeur indicative.

Exercice 1 (4 pts)

1. Calculer (penser à une intégration par parties):

$$\int_0^1 \log(1+t^2)\,dt$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$$

En utilisant une somme de Riemann associée à l'intégrale considérée dans la question **1.** déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 (5 pts)

1. Décomposer en élément simples (sur $\mathbf{R}$) la fraction rationnelle:

$$f(x) = \frac{4}{x^4-1}$$

2. Déterminer les primitives de f sur l'intervalle $]-1,1[$. Quelle est la primitive qui s'annule en $x=0$?

3. Soit $A>1$. Déterminer

$$\int_A^{+\infty} \frac{4\,dx}{x^4-1}$$

— (tournez la page) —

Exercice 3 (11 pts)

On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

1. La fonction F est-elle paire? impaire? Justifier.

2. Montrer les inégalités:

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leq F(x) \leq \frac{\mathrm{Arctg}(x)}{x}$$

et en déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

3. Déterminer le développement limité $\alpha + \beta t + \gamma t^2 + o(t^2)$ à l'ordre 2 en $t = 0$ de la fonction $f(t)$.

On pourra admettre le résultat suivant pour la suite du problème:
Soit g une fonction continue admettant un développement limité $a + bt + ct^2 + o(t^2)$ au voisinage de $t = 0$. La fonction:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

admet alors $a + \frac{b}{2}x + \frac{c}{3}x^2 + o(x^2)$ comme développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$.

4. Donner le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $F(x)$ en $x = 0$. La fonction F est-elle continue en 0? est-elle dérivable en 0? (les réponses doivent être justifiées).

5. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de F au point d'abscisse $x = 0$ ainsi que la position du graphe de F par rapport à cette tangente (pour x dans un voisinage de 0).

6. Déterminer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et montrer:

$$\forall x \neq 0 \qquad F'(x) = \frac{f(x) - F(x)}{x}$$

En déduire l'existence d'un développement limité à l'ordre 1, que l'on donnera explicitement, de $F'(x)$ en $x = 0$. Démontrer que $F''(0)$ existe et donner sa valeur.

7. Démontrer la proposition admise avant la question **4**.

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1ère année - Mathématiques
Sections 3 et 4
Épreuve du 5 avril 2003 — ANALYSE
CORRIGÉ

Exercice 1

1. *Calculer (penser à une intégration par parties):*

$$\int_0^1 \log(1+t^2)\,dt$$

$$I = \int_0^1 \log(1+t^2)\,dt = [\log(1+t^2)\cdot t]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\cdot t\,dt = \log(2) - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt$$

À ce stade on pense à écrire $t^2 = t^2 + 1 - 1$ d'où

$$I = \log(2) - \int_0^1 \frac{2t^2+2-2}{1+t^2}\,dt = \log(2) - \int_0^1 \left(2 - 2\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \log(2) - 2 + 2\mathrm{Arctg}(1)$$

Soit:

$$I = \log(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

2. *On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par:*

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$$

En utilisant une somme de Riemann associée à l'intégrale considérée dans la question **1.** *déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.*

On constate que

$$\log(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log(1 + \frac{k^2}{n^2})$$

est une somme de Riemann pour la fonction $t \mapsto \log(1+t^2)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Il en résulte que la suite $\log(u_n)$ est convergente de limite $I = \log(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$. Donc la suite u_n est convergente de limite $\exp(I)$ (en effet la fonction exponentielle est continue). Cette limite vaut donc $2\exp(-2 + \frac{\pi}{2})$.

Exercice 2

1. *Décomposer en élément simples (sur* $\mathbf{R}$*) la fraction rationnelle:*

$$f(x) = \frac{4}{x^4 - 1}$$

On a $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ donc

$$\frac{4}{x^4 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

On obtient a en multipliant par $x - 1$ puis en faisant tendre x vers 1 d'où $a = 4/(2 \cdot 2) = 1$. De même $b = 4/(-2 \cdot 2) = -1$. En prenant $x = 0$ on obtient la contrainte $-4 = -1 - 1 + d$ donc $d = -2$. Finalement en multipliant par x et en faisant tendre x vers l'infini on obtient $0 = 1 - 1 + c$ donc $c = 0$. Donc la décomposition en élément simples (sur $\mathbf{R}$) est:

$$f(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1} + \frac{-2}{x^2 + 1}$$

2. *Déterminer les primitives de f sur l'intervalle $]-1, 1[$. Quelle est la primitive qui s'annule en $x = 0$?*

Les primitives sont

$$F(x) = C + \log(|x - 1|) - \log(|x + 1|) - 2\mathrm{Arctg}(x)$$

soit sur l'intervalle en question:

$$F(x) = C + \log(1 - x) - \log(1 + x) - 2\mathrm{Arctg}(x)$$

La primitive qui s'annule en $x = 0$ est obtenue pour $C = 0$.

3. *Soit $A > 1$. Déterminer*

$$\int_A^{+\infty} \frac{4\,dx}{x^4 - 1}$$

Une primitive de $f(x)$ sur $]1, \infty[$ est donnée par:

$$F(x) = \log(x - 1) - \log(x + 1) - 2\mathrm{Arctg}(x) = \log(\frac{x - 1}{x + 1}) - 2\mathrm{Arctg}(x)$$

Donc, pour $A > 1$ fixé et pour $B > A$ on a :

$$\int_A^B \frac{4\,dx}{x^4 - 1} = \left[\log(\frac{x - 1}{x + 1}) - 2\mathrm{Arctg}(x)\right]_A^B$$

$$= \log(\frac{B - 1}{B + 1}) - 2\mathrm{Arctg}(B) - \log(\frac{A - 1}{A + 1}) + 2\mathrm{Arctg}(A)$$

La limite de $\log(\frac{B-1}{B+1}) - 2\text{Arctg}(B)$ lorsque $B \to +\infty$ existe et vaut $0 - 2\frac{\pi}{2} = -\pi$ donc l'intégrale impropre $\int_A^{+\infty} \frac{4\,dx}{x^4-1}$ est convergente et vaut

$$\int_A^{+\infty} \frac{4\,dx}{x^4-1} = -\pi - \log(\frac{A-1}{A+1}) + 2\text{Arctg}(A)$$

Exercice 3

On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

1. *La fonction F est-elle paire? impaire? Justifier.*

On a par la formule de changement de variables, pour $x \neq 0$:

$$F(-x) = \frac{1}{-x}\int_0^{-x} f(t)\,dt = \frac{-1}{x}\int_0^x f(-t)\,d(-t) = +\frac{1}{x}\int_0^x f(-t)\,dt$$

Or on a pour tout t : $f(-t) = f(t)$. Donc la fonction $F(x)$ est paire: pour tout x (c'était évident pour $x = 0$) on a $F(x) = F(-x)$.

2. *Montrer les inégalités:*

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leq F(x) \leq \frac{\text{Arctg}(x)}{x}$$

et en déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

L'intégrand est positif, donc $F(x) \geq 0$. De plus l'intégrand est majoré par $\frac{1}{1+t^2}$ donc par la propriété de monotonie de l'intégrale de Riemann on a, pour $x > 0$:

$$F(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\text{Arctg}(x)}{x}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \text{Arctg}(x) = \pi/2$ on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{Arctg}(x)}{x} = 0$ et donc par le lemme d'encadrement $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

3. *Déterminer le développement limité $\alpha + \beta t + \gamma t^2 + o(t^2)$ à l'ordre 2 en $t = 0$ de la fonction $f(t)$.*

On a $f(t) = \frac{1-t^2+o(t^2)}{1+t^2} = (1-t^2+o(t^2))(1-t^2+o(t^2)) = 1 - 2t^2 + o(t^2)$.

On pourra admettre le résultat suivant pour la suite du problème:
Soit g une fonction continue admettant un développement limité $a + bt + ct^2 + o(t^2)$ au voisinage de $t = 0$. La fonction:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

admet alors $a + \frac{b}{2}x + \frac{c}{3}x^2 + o(x^2)$ comme développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$.

4. *Donner le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $F(x)$ en $x = 0$. La fonction F est-elle continue en 0? est-elle dérivable en 0? (les réponses doivent être justifiées).*

La fonction f est continue et on peut donc appliquer la proposition admise. Comme on a obtenu $f(t) = 1-2t^2+o(t^2)$ c'est que au voisinage de zéro: $F(x) = 1-\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$. La fonction $F(x)$ admet un développement limité à l'ordre 2 donc aussi à l'ordre 1 au voisinage de $x = 0$: $F(x) = 1 + o(x)$. Toute fonction qui admet un développement limité à l'ordre 1 en un point est par le cours continue et dérivable en ce point et son développement limité à l'ordre 1 est $F(0) + F'(0)x + o(x)$. Donc $F(x)$ est continue en $x = 0$ (avec $F(0) = 1$) et est dérivable en $x = 0$ avec $F'(0) = 0$.

5. *Déterminer l'équation de la tangente au graphe de F au point d'abscisse $x = 0$ ainsi que la position du graphe de F par rapport à cette tangente (pour x dans un voisinage de 0).*

L'équation de la tangente est $y = 1$, il s'agit simplement de la droite horizontale passant par $P = (0, 1)$. Le développement limité à l'ordre 2 est $F(x) = 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$ ce qui nous indique que le graphe de la fonction F est dans un voisinage de 0 situé en dessous de cette tangente avec le point P comme unique point de contact.

6. *Déterminer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et montrer:*

$$\forall x \neq 0 \qquad F'(x) = \frac{f(x) - F(x)}{x}$$

En déduire l'existence d'un développement limité à l'ordre 1, que l'on donnera explicitement, de $F'(x)$ en $x = 0$. Démontrer que $F''(0)$ existe et donner sa valeur.

Pour $x \neq 0$ la fonction $F(x)$ est dérivable et sa dérivée vaut

$$F'(x) = \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}f(x) = \frac{-1}{x}F(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{f(x) - F(x)}{x}$$

Comme $f(x) = 1-2x^2+o(x^2)$ et $F(x) = 1-\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$ on a $f(x)-F(x) = -\frac{4}{3}x^2+o(x^2)$. Donc, pour $x \neq 0$, dans un voisinage de 0, $\frac{f(x)-F(x)}{x} = -\frac{4}{3}x + o(x)$. Ainsi $F'(x) = -\frac{4}{3}x + o(x)$, pour $x \neq 0$. En $x = 0$ on a déjà évalué $F'(0)$ et on a trouvé 0. Donc $F'(x) = -\frac{4}{3}x + o(x)$ est valable, y-compris au point 0. Cela nous indique que la fonction F' admet le développement limité $-\frac{4}{3}x + o(x)$ à l'ordre 1 au point $x = 0$. Elle est donc dérivable au point $x = 0$ et sa dérivée vaut $-\frac{4}{3}$. Cela signifie que $F''(0)$ existe et vaut $-\frac{4}{3}$.

On remarquera que si l'on avait su à l'avance que $F''(0)$ existait on aurait pu, par la formule de Taylor-Young, déduire sa valeur du développement limité $F(x) = 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$.

7. *Démontrer la proposition admise avant la question* **4**.

La fonction $g(t)$ est supposée continue, donc R-intégrable. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$|g(t) - a - bt - ct^2| \leq \epsilon t^2$$

pour $|t| \leq \eta$. Donc, pour $|x| \leq \eta$:

$$\left| \int_0^x (g(t) - a - bt - ct^2)\, dt \right| \leq \left| \int_0^x \epsilon t^2 dt \right| = \epsilon \frac{|x|^3}{3}$$

Ainsi pour $|x| \leq \eta$:

$$\left| xG(x) - ax - b\frac{x^2}{2} - c\frac{x^3}{3} \right| \leq \epsilon \frac{|x|^3}{3}$$

Pour $x \neq 0$ on divise par $|x|$ et cela donne:

$$\left| G(x) - a - \frac{b}{2}x - \frac{c}{3}x^2 \right| \leq \frac{\epsilon}{3}|x|^2$$

Cette inégalité est aussi valable pour $x = 0$ puisque l'on a défini $G(0) = a$. Mais cela exprime alors exactement que au voisinage de $x = 0$ on a

$$G(x) = a + \frac{b}{2}x + \frac{c}{3}x^2 + o(x^2)$$

et c'est ce qu'il fallait démontrer.

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1ère année - Mathématiques
Sections 3 et 4
Épreuve du 5 avril 2003 — ALGÈBRE
Durée : 1 heure 30. Sans document et sans calculatrice.

Avertissement : on insiste sur la nécessité, pour justifier les réponses, de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, dans une présentation propre et soignée.

Le barème donné a seulement une valeur indicative.

Exercice 1 (9 pts)

On considère le système d'équations linéaires, avec les inconnues $x_1, \ldots, x_5$ et les données y_1, y_2, y_3:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 + x_5 &= y_2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 &= y_3 \end{aligned}$$

1. Déterminer après réduction de Gauss-Jordan une forme complètement réduite pour ce système. Quel est son rang? Quelles sont les variables "pivots" et quelles sont les variables "libres"? Quelles sont les contraintes sur les données pour la résolubilité du système?

2. On considère le système homogène associé. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^5$ des vecteurs $u = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^t$ solutions? Donner une base de cet espace vectoriel.

3. On considère dans $\mathbf{R}^3$ les cinq vecteurs:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Quelle est la dimension du sous-espace W qu'ils engendrent? Donner une base de W. On considère le vecteur $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Montrer que w appartient à W et trouver une expression de w comme combinaison linéaire des vecteurs de la base en question.

— (tournez la page) —

Exercice 2 (4 pts)

On considère dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et l'application linéaire f dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et déterminer la matrice A' de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 (7 pts)

On considère les sous-espaces vectoriels suivants dans $\mathbf{R}^4$:

$$E = \{u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \mid \quad x+y+z+t=0,\ x+2z+t=0,\ y-z-t=0\}$$

et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer $\dim(E)$ et donner une base de E.

2. Donner une base de F et un système minimal d'équations linéaires pour F.

3. Soit V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel V_3. On suppose $\dim(V_1) = 1$. Montrer que soit $V_1 \subset V_2$ soit $V_1 \cap V_2 = \{\overrightarrow{0}\}$.

4. Déterminer l'intersection $E \cap F$. Déterminer le sous-espace somme $E + F$. Les espaces E et F sont-ils en somme directe?

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1ère année - Mathématiques
Sections 3 et 4
Épreuve du 5 avril 2003 — ALGÈBRE
CORRIGÉ

Exercice 1

On considère le système d'équations linéaires, avec les inconnues $x_1, \ldots, x_5$ et les données y_1, y_2, y_3:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 + x_5 &= y_2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 &= y_3 \end{aligned}$$

1. *Déterminer après réduction de Gauss-Jordan une forme complètement réduite pour ce système. Quel est son rang? Quelles sont les variables "pivots" et quelles sont les variables "libres"? Quelles sont les contraintes sur les données pour la résolubilité du système?*

On arrange le système sous la forme d'un tableau:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & y_1 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 1 & y_2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 2 & y_3 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & y_3 - y_1 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + y_1 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 15 & -10 & 7y_1 - 3y_2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + y_1 \end{array}\right]$$

Les variables pivots sont x_1 et x_3. Il y en a deux, le rang est donc 2. Les variables libres sont x_2, x_4, x_5. Il y a 1 contrainte de résolubilité qui est $0 = y_3 - y_2 + y_1$.

2. *On considère le système homogène associé. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^5$ des vecteurs $u = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^t$ solutions? Donner une base de cet espace vectoriel.*

La dimension demandée est la dimension du noyau et elle est égale au nombre de variables libres, soit 3. On obtient une base (w_1, w_2, w_3) en calculant x_1 et x_3, grâce à la forme complètement réduite de sorte que $w_1 = [x_1\ 1\ x_3\ 0\ 0]^t$, $w_2 = [x_1\ 0\ x_3\ 1\ 0]^t$, et $w_3 = [x_1\ 0\ x_3\ 0\ 1]^t$ soient dans le noyau. Cela donne

$$w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w_2 = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. *On considère dans* $\mathbf{R}^3$ *les cinq vecteurs:*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Quelle est la dimension du sous-espace W qu'ils engendrent? Donner une base de W. On considère le vecteur $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. *Montrer que w appartient à W et trouver une expression de w comme combinaison linéaire des vecteurs de la base en question.*

Il s'agit de l'espace colonne associé au système. Sa dimension est égal au rang, soit 2, et on obtient une base en retenant les deux colonnes v_1 et v_3 car x_1 et x_3 sont variables pivots. La contrainte $y_3 - y_2 + y_1 = 0$ est vérifiée par w qui appartient donc à l'espace W. On aura $w = x_1 v_1 + x_3 v_3$ avec x_1 et x_3 choisis de sorte que les équations soient vérifiées avec $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ et $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 3$. Cela donne $x_1 = 7y_1 - 3y_2 = -9$ et $x_3 = y_2 - 2y_1 = 3$ donc $w = -9v_1 + 3v_3$, ce qu'un calcul immédiat permet ensuite de confirmer.

Exercice 2

On considère dans $\mathbf{R}^3$ *les vecteurs:*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et l'application linéaire f dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et déterminer la matrice A' de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$.

D'après le cours pour vérifier que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ il suffit de prouver que la matrice S formée avec ces vecteurs en colonnes est inversible. La matrice S sera alors la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$, que l'on note $S(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et on obtiendra A' par la formule $A' = S^{-1}AS$. Pour montrer que S est inversible et en même temps obtenir son inverse on procède suivant la méthode du cours:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Donc effectivement la matrice S est bien inversible. On obtient maintenant A' par la formule $A' = S^{-1}AS$:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3

On considère les sous-espaces vectoriels suivants dans $\mathbf{R}^4$:

$$E = \{u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \mid \quad x + y + z + t = 0,\ x + 2z + t = 0,\ y - z - t = 0\}$$

et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ *avec*

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. *Déterminer* $\dim(E)$ *et donner une base de* E.

On résout les équations par la méthode du pivot:

$$\begin{aligned} x+y+z+t &= 0 \\ x+\quad 2z+t &= 0 \\ y-z-t &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x+y+z+t &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ y-z-t &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned} x+y+z+t &= 0 \\ y-z &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned} x \quad +2z &= 0 \\ y-z &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x &= -2z \\ y &= z \\ t &= 0 \end{aligned}$$

Il y a une seule variable libre qui est z, donc $\dim E = 1$ et une base de E est donnée par l'unique vecteur w avec $z = 1$, soit $w = [-2 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^t$.

2. *Donner une base de* F *et un système minimal d'équations linéaires pour* F.

En ce qui concerne F il s'agit d'un espace colonne et on applique donc la méthode:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & y_1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -y_1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & y_2+y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & y_2+y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -y_2-y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{array}\right]$$

Cette forme échelonnée est suffisante pour répondre aux questions et il est inutile d'aller jusqu'à la forme complètement réduite. On voit donc que la dimension de F est 3 et qu'une base est donnée par (v_1, v_2, v_3). De plus F est défini par exactement une équation qui est $y_4 = 0$ autrement dit $t = 0$ puisque dans cet exercice on utilise x, y, z, t pour désigner les coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

3. *Soit* V_1 *et* V_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel* V_3. *On suppose* $\dim(V_1) = 1$. *Montrer que soit* $V_1 \subset V_2$ *soit* $V_1 \cap V_2 = \{\overrightarrow{0}\}$.

L'espace vectoriel $V_1 \cap V_2$ est un sous-espace vectoriel de V_1. Sa dimension est donc soit 0 soit 1. Dans le premier cas on a $V_1 \cap V_2 = \{\overrightarrow{0}\}$ dans le deuxième cas, comme $(V_1 \cap V_2) \subset V_1$ et a la même dimension on a $V_1 \cap V_2 = V_1$. Mais cela signifie exactement que tout vecteur de V_1 est aussi dans $V_1 \cap V_2$, c'est-à-dire, il est aussi dans V_2. Autrement dit dans ce deuxième cas on a $V_1 \subset V_2$.

4. *Déterminer l'intersection $E \cap F$. Déterminer le sous-espace somme $E+F$. Les espaces E et F sont-ils en somme directe?*

Par la question précédente, et comme E est de dimension 1 on a soit $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$ soit $E \cap F = E$. On regarde donc si le vecteur $w = [-2 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^t$ déterminé à la question **1.** est ou non dans F. En fait l'équation $t = 0$ qui définit F est vérifiée par le vecteur $w = [-2 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^t$. Donc $w \in F$. Donc $E \subset F$ et ainsi $E \cap F = E$. Comme $E \subset F$ on a évidemment $E + F = F$. Les espaces E et F ne sont pas en somme directe puisque leur intersection n'est pas réduite au vecteur nul.

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1ère année - Mathématiques
Sections 3 et 4
Examen du 4 juin 2003 — ANALYSE
Durée : 2 heures. Sans document et sans calculatrice.

On insiste sur la nécessité, pour justifier les réponses, de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, dans une présentation propre et soignée. Il sera tenu compte de la présentation de la copie. Chaque réponse doit être totalement justifiée. **Le barême donné (pour une note sur 20) a seulement une valeur indicative.** *Le total des points est 22: il vaut mieux faire soigneusement plusieurs exercices que de vouloir tout faire à tout prix.*

Exercice 1 (3 pts)

Soient f et g de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ avec $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$, et $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = -1$.

1. Donner les développements limités en zéro à l'ordre 2 de f et de g.

2. Déterminer les développements limités en zéro à l'ordre 2 des fonctions fg et f/g.

3. Déduire de la réponse à la question précédente les valeurs de $(fg)''(0)$ et de $(f/g)''(0)$.

Exercice 2 (3 pts)

En utilisant des développements limités déterminer:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

Exercice 3 (6 pts)

1. Résoudre l'équation différentielle:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

On demande de donner les solutions à valeurs réelles (mais on peut utiliser les nombres complexes dans les calculs).

2. Trouver une solution particulière à:

$$y'' - 2y' + 2y = \sin(x)$$

3. Déterminer la solution de l'équation

$$y'' - 2y' + 2y = \sin(x)$$

qui vérifie $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

–(tournez la page)–

Exercice 4 (4 pts)

On considère une équation différentielle

$$y' + y = g(x)\, e^{-x}$$

avec une certaine fonction continue donnée $g(x)$, définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

1. Déterminer l'unique solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$. Indication: on cherchera y sous la forme $y = k(x)e^{-x}$ avec une fonction $k(x)$ inconnue.

2. On suppose que la fonction g est bornée: $\exists M\ \forall x\ |g(x)| \leq M$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle vérifie: $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Exercice 5 (6 pts)

Les trois questions sont indépendantes.

1. Déterminer la valeur exacte de

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\, dx$$

Ind.: plusieurs méthodes mènent au résultat: changement de variable, ou intégration par parties par exemple.

2. Déterminer pour $k > 0$ fixé et pour chaque $A > 0$ la valeur de :

$$I(A) = \int_0^A \frac{1}{x^2 + k^2} dx$$

Puis calculer $\lim_{A\to+\infty} I(A)$.

3. Déterminer la primitive sur $]0, +\infty[$ de $x^2 \log(x)$ qui s'annule en $x = 1$.

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1ère année - Mathématiques
Sections 3 et 4
Examen du 4 juin 2003 — ALGÈBRE
Durée : 1 heure 30. Sans document et sans calculatrice.

Il sera tenu compte de la présentation de la copie. Chaque réponse doit être totalement justifiée. Le barême donné (note sur 20, total des points 22) a **seulement une valeur indicative.**

Exercice 1 (7 pts)

On considère le système d'équations linéaires, avec les inconnues x_1, x_2, x_3 et les données y_1, y_2, y_3:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= y_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

Après avoir procédé à la réduction de ce système suivant la méthode de Gauss-Jordan (méthode des pivots), répondez aux questions suivantes:

1. Quel est le rang du système?

2. Soit A la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice A est-elle inversible? Quelle est la dimension de son noyau?

3. Soit V l'espace vectoriel engendré par les vecteurs:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Comment appelle-t-on V en fonction de la matrice A de la question précédente? Quelle est la dimension de V?

4. Quelle équation linéaire en y_1, y_2 et y_3 est la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ appartienne à V?

— (tournez la page) —

Exercice 2 (9 points)

Soit φ l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même définie par

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

1. Donner la matrice A de φ relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.

Soient maintenant

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Calculer le déterminant de la matrice dont les trois colonnes sont, dans l'ordre, v_1, v_2, et v_3. En déduire que ces trois vecteurs forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^3$.

3. Calculer $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$, $\varphi(v_3)$ et les exprimer en fonction de v_1, v_2, v_3 (le résultat est extrêmement simple). En déduire la matrice A' de φ relativement à la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$.

4. Écrire la matrice de passage $P = S(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, de la base $\mathcal{B}'$ vers la base canonique $\mathcal{B}$. Calculer son inverse P^{-1}.

5. Quelle est la relation entre A, P, et A'? Calculer $(A')^{200}$. En déduire la valeur de A^{200}.

Exercice 3 (6 points)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension 4. On note $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc.... On suppose que f^3 n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $f^4 = 0$. Soit $v \in V$ tel que $f^3(v) \neq 0$.

1. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. On suppose:

$$a \cdot v + b \cdot f(v) + c \cdot f^2(v) + d \cdot f^3(v) = 0$$

Montrer alors $a = 0$. (Le résultat peut s'obtenir en appliquant sur l'équation ci-dessus un certain nombre de fois l'application linéaire f, compte tenu de $f^4 = 0$.) Puis montrer $b = 0$, puis $c = 0$, puis $d = 0$.

2. Montrer que $\mathcal{B} = (v, f(v), f^2(v), f^3(v))$ est une base de V.

3. Quelle est la matrice A qui exprime f dans la base $\mathcal{B}$?

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

DEUG MIAS 1ère année - Mathématiques
Année 2002-2003, 1^{er} semestre

Section 3

Session de septembre 2003

Durée : 2 heures. Sans document et sans calculatrice.

Avertissement : seules les réponses précises, rédigées de façon complète et soigneuse, seront prises en compte. Le barême indiqué est approximatif.

Problème 1 (6 points)

1. Rappeler la définition de: “le nombre réel x est un majorant de la partie E de $\mathbf{R}$”.

2. Rappeler la définition de: “le nombre réel x est la borne supérieure de la partie E, non vide, de $\mathbf{R}$”, et aussi la définition de “la borne supérieure de E est $+\infty$”.

3. L'ensemble $]0,1] \cup [2,+\infty[$ peut-il être l'ensemble des majorants d'une partie de $\mathbf{R}$? Justifier la réponse.

4. Deux parties distinctes E et E' de $\mathbf{R}$ peuvent-elles avoir les mêmes majorants? Justifier la réponse.

5. Donner un exemple de partie de $\mathbf{R}$, non vide, bornée, qui contienne sa borne supérieure mais pas sa borne inférieure.

6. Existe-t-il une partie bornée de $\mathbf{R}$ dont le complémentaire dans $\mathbf{R}$ soit aussi borné? Justifier la réponse.

Problème 2 (8 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ pour tout $n \geq 1$.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - x^2 = x(1-x)$. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ et que pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$, on a $0 \leq f(x) \leq x$, les inégalités étant strictes pour $x \neq 0$.

2. Montrer que l'on a $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie et en utilisant la continuité de la fonction f déterminer cette limite.

—Tournez La Page—

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\dfrac{1}{2n^2} \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Montrer ensuite, par récurrence, que l'on a pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

En déduire une deuxième preuve de l'existence et la valeur de $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

5. En utilisant les inégalités de la question **4** donner une majoration de u_k^2, pour tout $k \geq 1$, puis en déduire que l'on a

$$u_1^2 + \cdots + u_n^2 \leq 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge, où l'on a posé $S_n = u_1^2 + \cdots + u_n^2$.

Problème 3 (6 points)

1. On considère l'application

$$x \mapsto f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

de domaine de départ $I =]0, +\infty[$. Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ et établir $\forall x\ f'(x) > 0$.

2. Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. En déduire $f(I) =]-1, +1[$ et le fait que f est une bijection de I sur $f(I)$.

4. Soit $g = f^{-1}$ l'application réciproque. Montrer

$$g(y) = \frac{1+y}{1-y}$$

5. En déduire soigneusement (avec la notation usuelle ln pour le logarithme népérien):

$$\forall x > 0 \quad \ln x = \ln(1 + f(x)) - \ln(1 - f(x))$$

6. On rappelle la formule (avec la notation usuelle ln pour le logarithme népérien):

$$|h| < 1 \Rightarrow \quad \ln(1+h) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \frac{h^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{h^k}{k}$$

En utilisant les questions précédentes, montrer: pour tout $x > 0$ on a

$$\ln x = 2 \lim_{M\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2M+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2M+1} \right)$$

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

ANNÉE 2002-2003 – DEUG MIAS 1
MATHÉMATIQUES – 2e Semestre/UE4/ANALYSE
SECTIONS 3 ET 4
ÉPREUVE DE SEPTEMBRE 2003: 2e **Semestre/UE4/ANALYSE**

Sans document et sans calculatrice.

Avertissement : on insiste sur la nécessité de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, pour justifier les réponses. Le barème donné a seulement une valeur indicative.

Exercice 1 (2 points)

En utilisant des développements limités, déterminer:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos(x) + \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

Exercice 2 (4 points)

1. Soit n un entier ≥ 1. Montrer en utilisant la formule de Taylor qu'il existe un réel c_n compris entre 0 et 1 tel que:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ..... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c_n)^{n+1}}.$$

2. En déduire:

$$\log 2 = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ..... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$$

Exercice 3 (4 points)

1. Déterminer une primitive sur $\mathbf{R}$ de la fonction:

$$x \to \frac{1}{3+x^2}.$$

2. Déterminer la valeur de:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx.$$

(Indication: on pourra effectuer le changement de variable $u = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$)

–(Tournez la page)–

Exercice 4 (5 points)

Résoudre l'équation différentielle:

$$y'' - y = e^x$$

Exercice 5 (5 points)

On considère l'équation différentielle:

$$xy' - (x+1)y = x^2 \qquad (E)$$

1. Résoudre (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$.

——oooOooo——

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques

ANNÉE 2002-2003 – DEUG MIAS 1
MATHÉMATIQUES – 2e Semestre/UE4/ALGÈBRE
SECTIONS 3 ET 4

ÉPREUVE DE SEPTEMBRE 2003 : 2e Semestre/UE4/ALGÈBRE

Sans documents ni calculatrice.

Avertissement : on insiste sur la nécessité de fournir des arguments complets, rédigés de façon claire et ordonnée, pour justifier les réponses. Le barême donné a seulement une valeur indicative.

Exercice 1 (7 points)

On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \left\{ u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

1. Déterminer la dimension et une base de E.

2. Donner une base de F et un système minimal d'équations linéaires pour F.

3. Déterminer l'intersection $E \cap F$.

4. Déterminer le sous-espace somme $E + F$. Les espaces E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$? (deux sous-espaces E et F d'un espace V sont dits être supplémentaires dans V si $V = E \oplus F$).

Exercice 2 (4 points)

Pour quelles valeurs de $A \in \mathbb{R}$ le système

$$(S) : \begin{cases} x - y + z &= -2 \\ x + y - z &= A \\ 2x + 2y + A\,z &= -4 \end{cases}$$

a-t-il au moins une solution ? pour quelles valeurs de A a-t-il une unique solution ?

—— Tournez la page ——

Exercice 3 (9 points)

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2. On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel de dimension trois, et que l'on appelle base canonique la base (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = 1$, $v_2 = X$, $v_3 = X^2$.

Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même définie ainsi : pour tout P de $\mathbb{R}_2[X]$, $f(P)$ est le reste dans la division euclidienne de $(X+1)P$ par X^3+1.

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Calculer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Déterminer une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et de l'image $\mathrm{Im}(f)$, ainsi que des équations en nombre minimal pour $\mathrm{Im}(f)$ (pour les coordonnées calculées dans la base canonique).

4. L'application linéaire f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

5. Montrer $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

6. Montrer que $\mathcal{B} = \big(1, X+1, (X+1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

7. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

——oooOooo——