

DEUG MIAS 1 — Année 2002-2003

Premier et deuxième semestres

Feuilles de Cours

Toutes les fiches de cours distribuées aux étudiants pendant l'année sont réunies ici. Pour le premier semestre, elles prennent plutôt la forme d'un résumé ; au deuxième semestre elles sont un peu plus détaillées.

Le cours du dernier tiers du deuxième semestre portant sur les équations différentielles, et sur la théorie des groupes, n'a pas donné lieu à distribution de fiches aux étudiants.

Je remercie Stephan de Bièvre : son polycopié a servi de base commune aux enseignements du premier semestre, et aussi à une large part du deuxième semestre, dans les quatre sections du Deug Mias. Les fiches réunies ici ne devaient servir aux étudiants que de résumé aide-mémoire car ils bénéficiaient déjà du support donné par le polycopié de Stephan. J'ai enseigné à la section 3 au premier semestre et aux sections 3 et 4 au deuxième semestre.

Jean-François Burnol, le 4 juin 2003.

15 mai 2006 : petites améliorations dans les sections 1 à 7 du chapitre de présentation de l'intégrale de Riemann.

Table des matières

I	Nombres	5
1	Arithmétique	5
2	Nombres rationnels	6
3	Nombres réels	7
II	Suites et Séries	8
1	Suites et limites	8
2	Séries	9

III	Fonctions continues	10
1	Définition et premières propriétés	10
2	Théorème des valeurs intermédiaires	11
3	Fonctions réciproques	11
4	Quelques fonctions particulières	12
5	Deux démonstrations difficiles	12
IV	Limites (finies ou infinies) de fonctions en un point (ou à l'infini)	13
V	La Dérivée, notion fondatrice du Calcul, notion fondamentale pour toutes les Mathématiques	16
1	Définition	16
2	Règles de Calcul	17
3	Dérivée et sens de variation : le Théorème Fondamental	18
4	Le Théorème des accroissements finis et autres « gros » théorèmes .	20
5	Notation différentielle	21
VI	Les fonctions trigonométriques, exponentielle, logarithme	22
1	Continuité, dérivabilité, et encadrement des fonctions trigonométriques	22
2	Logarithme et exponentielle	24
3	Représentations de la fonction exponentielle, fonctions hyperboliques	25
4	Représentation de la fonction logarithme	26
VII	Dérivées secondes, convexité, DL à l'ordre 2	27
VIII	Les Nombres Complexes	28
1	Coordonnées cartésiennes et polaires	28
2	Anneaux et corps en très bref	31
3	Le corps des nombres complexes	32
4	Racines, Équations, Exponentielle Complexe	33

5	Polynômes, fonctions polynomiales, division euclidienne, factorisation, en TRÈS bref	34
IX	Développements Limités	36
1	Définitions	36
2	Formule de Taylor et Applications	37
3	Règles de calcul	40
4	Équivalents	41
X	L'intégrale de Riemann	42
1	Premiers énoncés principaux	42
2	Quelques démonstrations	44
3	Fonctions continues	46
4	Relation de Chasles, linéarité, positivité	47
5	Autres propriétés de l'intégrale de Riemann	48
6	Fonctions en escalier	49
7	Les théorèmes fondamentaux du Calcul	50
8	La formule d'intégration par parties	52
9	Les deux formules de changement de variable	52
10	Intégrales « impropres »	53
11	Rectangles, Trapèzes, Simpson	53
12	Théorèmes de la Moyenne	55
13	Polynômes d'interpolation	56
XI	Primitives et Fractions Rationnelles	57
1	La notation intégrale pour les primitives	57
2	Décomposition en éléments simples et Primitives de fractions rationnelles	58
3	Quelques intégrales indéfinies que l'on sait exprimer avec l'aide des « fonctions élémentaires », sin, cos, exp, sh, ch, log, de leurs fonctions réciproques et des fractions rationnelles	59

XII	Algèbre linéaire	60
1	Méthode de réduction de Gauss-Jordan	60
2	Espaces vectoriels et indépendance linéaire	61
3	Théorème de la dimension	63
4	Théorème de la base incomplète	64
5	Intersections, sommes de sous-espaces	64
6	Théorème du Rang	65
7	Applications linéaires	66
8	Changement de base	67
9	Morphismes	68
10	Équations et espaces associés à une matrice	68
11	Inverses, Déterminants, Cramer.	69

I Nombres

1 Arithmétique

Entiers naturels, entiers relatifs, fractions. Ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} . Première évocation de \mathbb{R} : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $10^{1/3} \notin \mathbb{Q}$.

Divisibilité : $a|b$. Congruences « modulo m ». Addition et multiplication « modulo m ».

Division euclidienne : quotient euclidien et reste euclidien. Restes et congruences.

On écrit $a^k||b$ si $a^k|b$ et k est le plus grand possible. Si $2^k||n$ et $2^l||m$ alors $2^{k+l}||nm$ (on peut utiliser cela pour montrer $\forall x \in \mathbb{Q} x^2 \neq 2, x^3 \neq 10$, etc. . .).

La règle pour les $||$ marche aussi avec 3 ou 5 à la place de 2 mais pas avec 4 ou 6.

Nombres premiers et nombres composés. Tout entier ≥ 2 admet un diviseur premier.

La liste des nombres premiers ne s'arrête jamais ($Y! + 1$).

Tout entier non nul est le produit d'un signe (± 1) et d'un nombre fini de nombres premiers.

Le Lemme d'Euclide : si p ne divise ni a ni b alors il ne divise pas ab . Ou encore : si $p|ab$ alors $p|a$ ou $p|b$ (ou les deux, le « ou » n'est jamais exclusif en mathématiques).

Plus généralement si p premier ne divise aucun des termes d'un produit alors il ne divise pas le produit. En particulier si p ne divise pas a alors p ne divise pas a^n .

Si p est premier et $p^k||m$ et $p^l||n$ alors $p^{k+l}||mn$.

La décomposition en facteurs premiers est unique à l'ordre des facteurs près.

Critère de divisibilité fourni par la décomposition en facteurs premiers.

Notion de $\text{pgcd}(a, b)$. Calcul grâce à la décomposition. Si $d|a$ et $d|b$ alors $d|\text{pgcd}(a, b)$.

Notion de $\text{ppcm}(a, b)$. Calcul grâce à la décomposition. Si $a|X$ et $b|X$ alors $\text{ppcm}(a, b)|X$.

$\text{pgcd}(a, b)\text{ppcm}(a, b) = |ab|$.

L'algorithme d'Euclide découle de $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a - Yb)$ en particulier = $\text{pgcd}(b, r)$ avec $a = qb + r$ (division euclidienne). Dernier reste non nul est le pgcd .

Il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ avec $\text{pgcd}(a, b) = xa + yb$.

Entiers premiers entre eux. Si a_1, a_2, \dots, a_n sont chacun premiers avec b alors le produit $a_1 \cdots a_n$ est premier avec b .

Théorème de Bezout : les entiers de la forme $xa + yb$ sont exactement les multiples de $\text{pgcd}(a, b)$.

En particulier a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ avec $xa + yb = 1$.

Le Théorème de Gauss : si $a|bc$ et si a est premier avec b alors $a|c$.

Équations linéaires avec des congruences. Équations diophantiennes linéaires (solution particulière par Bezout, puis solution générale par le Théorème de Gauss).

Une fraction A/B est dite écrite sous forme irréductible si A et B sont premiers entre eux et $B \geq 1$. Existence et unicité, toutes les autres expressions sont de la forme kA/kB (grâce au théorème de Gauss). Si A/B est irréductible alors A^n/B^n est irréductible.

Si un nombre rationnel a une puissance qui est un entier alors il s'agissait déjà d'un entier.

Le Petit Théorème de Fermat. Le système RSA.

2 Nombres rationnels

Si $0 < A < B$ l'algorithme de l'École Primaire fournit les « chiffres après la virgule » pour la fraction $\frac{A}{B}$: $10A = x_1B + R_1$, $10R_1 = x_2B + R_2$, etc. . . donnent $0, x_1x_2x_3 \dots$

Si B est premier avec 10 : on considère l'ensemble C_B des entiers compris entre 0 et B et premiers avec B . L'application F de « multiplication par 10 » modulo B est une application de C_B sur lui-même. Le N^{e} chiffre après la virgule est obtenue en appliquant F $N - 1$ fois à $x = A$ ce qui donne y puis finalement on envoie ce y sur le quotient euclidien de $10y$ par B .

On a $10^N \equiv 1[B]$ avec $N = \#C_B$. Valeur de $\#C_B$ pour $B = p$ premier, aussi pour $B = pq$.

Si L est le plus petit avec $10^L \equiv 1[B]$ alors toutes les orbites de F sur C_B ont longueur L .

Toute fraction irréductible $\frac{A}{B}$ avec B premier avec 10, et $B > 1$ a des « chiffres après la virgule » périodiques, avec une période (au plus) L , tout de suite après la virgule.

Si B est de la forme $2^k 5^l$ les chiffres sont tous nuls au delà des $\max(k, l)$ premiers. Si $B = 2^k 5^l C$ avec $C > 1$ premier avec 10, la période commence $\max(k, l)$ chiffres après la virgule.

Aparté ensembliste : applications injectives, surjectives, bijectives.

Vers les nombres réels : sommes infinies, séries, limites. Théorème : $\frac{A}{B} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$. En particulier $1/9 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$. Plus généralement $\frac{1}{99} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100^k}$, $\frac{1}{999} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1000^k}$, etc. . .

Si la période débute après la virgule et est de longueur N alors $\frac{A}{B} = \frac{Y}{10^N - 1}$ avec $Y = x_1 \dots x_N$ (écriture en base 10). Si $\frac{A}{B}$ est irréductible cela montre que B est

premier avec 10 et que N vérifie $10^N \equiv 1[B]$.

Compte tenu de ce qui précède on obtient que la longueur de la période (pour B premier avec 10) est indépendante de A et est égale au plus petit L avec $10^L \equiv 1[B]$.
Exemples.

Les nombres « réels » : c'est ce que l'on obtient en autorisant n'importe quels chiffres 0, 1, ..., ou 9 après la virgule sans contrainte de périodicité.

3 Nombres réels

Nous admettons le théorème suivant : il existe un ensemble \mathbb{R} dont les éléments sont appelés « nombres réels ». Cet ensemble \mathbb{R} contient \mathbb{Q} comme sous-ensemble et vérifie :

- A : il y a sur \mathbb{R} des notions de $<, \leq, +, -, \times, /$, compatibles avec ce qui se passe sur \mathbb{Q} , et respectant les mêmes règles ($x > 0$ et $y > 0$ implique $xy > 0$, $x(y + z) = xy + xz$, etc. ...).
- B : à tout nombre réel x est associé un entier relatif noté $[x]$ ou $E(x)$, appelé « partie entière de x », et qui est l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$.
- C : si le nombre réel x vérifie toutes les inégalités $\frac{-1}{N} < x < \frac{1}{N}$, pour les entiers $N \geq 1$, alors il est nul : $x = 0$ (axiome dit d'Archimède qui interdit les « infiniment petits »).
- D : Pour tout choix de chiffres $x_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, il existe dans \mathbb{R} un nombre réel x qui est la « somme infinie » $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$. Somme infinie = limite des sommes partielles (une limite d'une suite, si elle existe, est unique par l'axiome d'Archimède C).

L'intuition : « nombres réels = points sur une droite », en fait une droite graduée par les entiers relatifs $n \in \mathbb{Z}$, puis plus finement par les $\frac{n}{10}$, plus finement encore par les $\frac{n}{100}$, etc. ... est une bonne intuition.

On peut effectivement « construire » \mathbb{R} par différents procédés, et la méthode directe qui consiste à définir un nombre réel compris entre 0 et 1 comme une suite de chiffres après la virgule est d'ailleurs l'un de ces procédés. Mais la vérification de A est alors fastidieuse, car il faut expliquer comment on additionne, comment on multiplie, puis vérifier toutes les règles usuelles. De plus une telle construction ferait jouer à 10 un rôle spécial qui n'est en rien intrinsèque à \mathbb{R} (et puis il y a les ambiguïtés du type $0,10000\dots = 0,09999\dots$, mais on peut montrer qu'il s'agit là de la seule ambiguïté : si $0 \leq x < 1$ il lui est associé des « chiffres après la virgule » x_k uniquement déterminés par $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$ et l'interdiction que cela se termine par une infinité de '9').

Comme il y a plusieurs constructions distinctes possibles de \mathbb{R} , on peut se demander si il n'y a pas en fait plusieurs ensembles « \mathbb{R} ». En tant qu'ensembles, oui il y en a plusieurs. Mais ils sont tous mutuellement en bijection, d'une manière respectant l'addition et la multiplication et les inégalités, et ces bijections sont uniques. C'est en ce sens que « \mathbb{R} » est unique.

Un point essentiel à retenir c'est que la notion de limite (donc de suites et de séries) est intrinsèque à la fabrique même de \mathbb{R} .

Le passage de \mathbb{Q} à \mathbb{R} paraît être une chose compliquée, en fait c'est aussi une simplification qui nous éloigne des mystères de l'arithmétique. Cette transition est nécessaire pour nous faire passer dans le domaine de l'Analyse : suites, fonctions, continuité, dérivabilité, etc. . .

II Suites et Séries

1 Suites et limites

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels est (simplement) une application $n \mapsto u_n$ de \mathbb{N} vers \mathbb{R} . Parfois les indices n ne débutent que en $n = 1$ ou même plus loin.

Notions de suite majorée, minorée, bornée, croissante, décroissante, constante, à valeurs positives, négatives, monotone, strictement monotone, stationnaire à partir d'un certain rang, etc. . .

On dit que « la suite (u_n) tend vers L lorsque n tend vers l'infini » ou plus brièvement « la suite (u_n) tend vers L » ou encore « u_n tend vers L » ou encore « u_n converge vers L » ou encore « u_n admet L pour limite » si le critère suivant est vérifié : $\forall \epsilon > 0 \exists M n \geq M \Rightarrow |u_n - L| \leq \epsilon$. On note

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$$

le « $n \rightarrow \infty$ » étant optionnel. Le nombre réel L , si il existe est unique et on l'appelle « limite de la suite (u_n) ». Parfois on écrit $u_n \rightarrow L$ au lieu de $\lim u_n = L$.

On dit que « u_n tend vers $+\infty$ » si $\forall C \exists M n \geq M \Rightarrow u_n \geq C$. On note :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

et on dit que « $+\infty$ est la limite de la suite (u_n) ». Notion analogue pour $-\infty$.

On dit qu'une suite converge si elle admet une limite finie. Donc, si elle admet $+\infty$ comme limite on dit qu'elle « diverge vers $+\infty$ ». Une suite qui n'admet pas de limite finie est dite « divergente ». Elle peut alors admettre $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite, mais peut aussi n'avoir aucune limite.

Une suite convergente est nécessairement bornée, mais le contraire est faux : une suite peut-être bornée tout en étant divergente.

Une suite qui converge vers une limite non nulle a tous ses termes non nuls à partir d'un certain rang.

Le **Théorème des suites monotones** est très important. Il dit que *toute suite croissante qui est majorée est convergente et que toute suite décroissante qui est minorée est convergente*. Si une suite croissante n'est pas majorée, elle tend vers l'infini. Une suite croissante admet donc toujours une limite : soit $+\infty$ soit une limite L finie. De même toute suite décroissante soit diverge vers $-\infty$ soit tend vers une limite L finie.

Autrement dit une suite monotone est convergente si et seulement si elle est bornée.

Des suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si la suite u_n est croissante, la suite v_n est décroissante, si de plus pour tout n on a $u_n \leq v_n$ et finalement si de plus $\lim(v_n - u_n) = 0$. **Théorème des suites adjacentes :** *Des suites adjacentes sont nécessairement convergentes vers une limite finie commune L qui est l'unique nombre réel satisfaisant toutes les inégalités $u_n \leq L \leq v_n$.*

On a aussi le **Théorème des encadrements :** *si pour tout n on a $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites u_n et w_n ont la même limite L (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$) alors la suite v_n a aussi L comme limite.*

Attention : après un passage à la limite les inégalités strictes doivent être remplacées par des inégalités larges : si $\lim u_n = L_1$ et $\lim v_n = L_2$ et si pour tout n (ou pour tout n suffisamment grand) on a $u_n < v_n$ alors on a $L_1 \leq L_2$ mais $L_1 = L_2$ est possible.

Règles diverses pour les sommes, les produits, les quotients (attention à ne pas diviser par zéro), les translations, les multiples, les inégalités. Il est équivalent de dire ou d'écrire $u_n \rightarrow L$ ou $|u_n - L| \rightarrow 0$ ou $\lim u_n = L$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ ou $u_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} L$ (pour des raisons typographiques, dans les formules mathématiques insérées dans du texte on trouve plus souvent $\rightarrow_{n \rightarrow \infty}$ que $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]$, mais à la main on utilise toujours la deuxième option).

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Si $\lim u_n = L$ alors pour la suite décalée $v_n = u_{n+k}$ on a aussi $\lim v_n = L$.

On a $\lim n = +\infty$, $\lim 1/n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty$ pour $k \geq 1$, $\lim 10^n = +\infty$, $\lim 10^{-n} = 0$, $\lim a^n = 0$ pour $|a| < 1$, $= 1$ pour $a = +1$, $= +\infty$ pour $a > 1$, n'admet pas de limite pour $a \leq -1$, on a $\lim n! = +\infty$.

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{10^n} = 0$, et $\lim \frac{10^n}{n!} = 0$. Autrement dit « les factorielles tendent plus vite vers l'infini que les puissances de dix, qui elles mêmes tendent plus vite vers l'infini que n'importe quel polynôme en n ».

2 Séries

Une série de terme général x_n , $n \geq 1$, est une suite de nombres réels le plus souvent notés S_N (pour $N \geq 1$), qui sont appelés « les sommes partielles de la série » et qui valent $S_N = x_1 + \dots + x_N$, de sorte que $S_1 = x_1$, $S_2 = x_1 + x_2$, et $S_{N+1} = S_N + x_{N+1}$ pour tout $N \geq 1$. Par convention $S_0 = 0$, cette convention pouvant être utile pour certaines démonstrations par récurrence. Au niveau des notations on écrit $S_N = \sum_{k=1}^N x_k$, ou $S_N = \sum_{1 \leq k \leq N} x_k$. Parfois l'indice de sommation k débute en 2 ou plus loin ou encore en 0 (si x_0 a été défini, et alors $S_0 = x_0$). On peut aussi ne sommer que sur les valeurs paires de k ou impaires, etc. . . , tout cela étant précisé en dessous du signe « somme » (Σ , lettre grecque qui est le « sigma majuscule » mais que l'on prononce simplement « somme » dans une série).

Les notions de convergence pour les suites sont appliquées en particulier aux séries. Si les sommes partielles S_N de la série de terme général x_k , $k \geq 1$, ont une limite L (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$) on écrit

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

Si L n'est ni $+\infty$ ni $-\infty$ on dit que la série est convergente. Une **série à termes positifs** a ses sommes partielles formant une suite croissante et a donc toujours une limite, soit finie, soit $+\infty$.

Comme application du Théorème des suites adjacentes, on a le **Théorème des séries alternées** : une série est dite alternée si son terme général est alternativement positif et négatif, et si de plus il est décroissant en valeur absolue, et si de plus il tend vers zéro. Toute série alternée est convergente, vers une limite L qui est encadrée par les sommes partielles de rangs pairs et impairs (qui forment des suites adjacentes). Par exemple il existe un nombre réel $L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ et il existe aussi un nombre réel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Par contre la **série harmonique** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ est divergente : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. Cependant la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente. On a (Euler) : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

La **série géométrique** est fondamentale en Mathématiques. Il s'agit de la série de terme général a^k , pour $k \geq 0$ (avec la convention $a^0 = 1$). Elle est convergente pour $|a| < 1$ de somme $1/(1-a)$, mais divergente pour $|a| \geq 1$.

$$|a| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

Pour qu'une série soit convergente il est nécessaire que son terme général tende vers zéro. Dans le cas de la série géométrique, c'est suffisant, mais l'exemple de la série harmonique montre que cela ne suffit pas en général pour garantir la convergence de la série. Dans une série alternée, non seulement le terme général tend vers zéro, mais de plus on le suppose décroissant en valeur absolue, et alternativement positif et négatif.

III Fonctions continues

1 Définition et premières propriétés

Une fonction $f(x)$ définie sur un domaine D (typiquement un intervalle ou une union d'intervalles) est dite **continue en** x_0 (qui appartient à D) si pour toute suite u_n à valeurs dans D et tendant vers x_0 on a $\lim f(u_n) = f(x_0)$.

Lorsque $D = [a, b]$ et que $x_0 = a$ on parle de « continuité à droite en $x_0 = a$ ». Pour b on dit « à gauche ».

On montre que l'on aboutit à une notion équivalente si l'on convient qu'une fonction $f(x)$ définie sur D est **continu en** x_0 si et seulement si le critère suivant dit « epsilon-delta » est satisfait :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

Ce critère est souvent pris comme définition, et notre première définition est alors appelée « critère de continuité par les suites ». Dans le critère « epsilon-delta », on peut utiliser les variantes avec $|x - x_0| \leq \delta$ au lieu de $|x - x_0| < \delta$ et/ou $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ au lieu de $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$. Montrer que cela aboutit à la même notion est un exercice qui nécessite de bien comprendre ce que \forall (« quel que soit ») et \exists (« il existe ») signifient exactement. Mais il est indispensable de maintenir $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$, sinon la signification en serait toute bouleversée.

Les constantes, translatées, multiples, sommes, produits, quotients (attention de ne pas diviser par zéro) de fonctions continues en $x = x_0$ sont continus en x_0 . Une fonction polynomiale est continue en tout point du domaine D choisi (par exemple $D = \mathbb{R}$). La fonction $f(x) = 1/x$ avec $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est continue en tout x_0 de son domaine de définition.

Une fonction $f(x)$ est dite « continue sur l'intervalle I » si $I \subset D$ et si $f(x)$ est continue en tout $x_0 \in I$. Si $I = [a, b]$ on dit continue à droite pour a , continue à gauche pour b .

Si $f(x)$ de domaine D est continue en $x_0 \in D$ et si les valeurs prises par f sont toutes dans le domaine de définition E associé à une fonction $g(y)$ et si $g(y)$ est continue en $y_0 = f(x_0)$ alors la fonction composée $g(f(x))$ est continue en x_0 .

Ainsi si $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et partout non nulle, alors la fonction $1/f(x)$ est aussi continue sur $[a, b]$.

2 Théorème des valeurs intermédiaires

La notion de continuité en un seul point est assez délicate à appréhender, mais on peut se représenter de manière satisfaisante les fonctions qui sont continues sur **tout** un intervalle $[a, b]$ comme étant celles dont on peut tracer le « graphe » (le lieu dans le plan des points de coordonnées cartésiennes $(x, f(x))$, $x \in [a, b]$) sans lever la craie du tableau (ou le stylo de la page).

Cela est souligné par le très important **Théorème des valeurs intermédiaires** : *Si $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ alors toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte en (au moins) un x dans l'intervalle $[a, b]$.*

3 Fonctions réciproques

Si $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et est strictement croissante alors pour tout y avec $f(a) \leq y \leq f(b)$ il existe un **unique** $x \in [a, b]$ avec $f(x) = y$. On note $x = f^{-1}(y)$ et

on dit que la fonction f^{-1} de domaine $E = [f(a), f(b)]$ est la **fonction réciproque** (ou inverse) de la fonction f . La fonction réciproque d'une application strictement croissante est elle-même strictement croissante.

De même, si f est strictement décroissante, elle admet une fonction réciproque (elle aussi strictement décroissante d'ailleurs).

Théorème de continuité des fonctions réciproques : *la fonction réciproque d'une application continue strictement monotone est elle-même une fonction continue sur tout son intervalle de définition.*

4 Quelques fonctions particulières

Les fonctions « racines nième » $x^{1/N}$ ($N \geq 1$) sont définies sur $[0, +\infty[$ comme fonctions réciproques des fonctions $x \mapsto x^N$. Noter que l'on a écrit x au lieu de y pour la variable dans la fonction réciproque, le choix d'une lettre étant indifférent. Les fonctions « racines nième » sont des fonctions continues. En particulier la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, \infty[$.

La fonction de Heaviside $H(x)$ définie selon $H(x) = 1$ pour $x \geq 0$ et $H(x) = 0$ pour $x < 0$ est continue en tout $x_0 \neq 0$ mais elle est discontinue en $x_0 = 0$.

La fonction $f(x)$ qui vaut 1 si $x \in \mathbb{Q}$ mais qui vaut 0 si $x \notin \mathbb{Q}$ n'a aucun point de continuité. On montre à cette occasion que pour tout nombre réel x_0 on peut trouver d'une part une suite u_n avec $\lim u_n = x_0$ et de plus $\forall n u_n \in \mathbb{Q}$ et d'autre part une suite v_n avec $\lim v_n = x_0$ et de plus $\forall n v_n \notin \mathbb{Q}$. La fonction $xf(x)$ est continue en $x_0 = 0$ mais elle est discontinue en tout $x_0 \neq 0$.

Ne pas confondre (sur la base d'une généralisation hâtive du comportement de la fonction $1/x$) « être discontinue en x_0 » avec « ne pas être définie en x_0 ». Pour qu'une fonction puisse être continue en x_0 il faut qu'elle soit définie en x_0 , mais elle peut tout-à-fait être définie en x_0 sans y être continue.

On peut construire une fonction qui est continue en tout nombre irrationnel, mais qui est discontinue en tout nombre rationnel. Les points de continuité et de discontinuité d'une fonction peuvent donc être terriblement entremêlés.

Mais dans la suite du Cours nous aurons principalement à considérer des fonctions qui sont continues sur tout un intervalle à l'exception de au plus un nombre fini de discontinuités (sauts à la Heaviside, ou singularités comme $1/x$ ou $\log|x|$ en $x = 0$).

5 Deux démonstrations difficiles

Nous reproduisons ici, de manière concise et abrégée, deux démonstrations difficiles :

Toute suite croissante majorée converge :

Soit u_n une suite croissante et majorée strictement par C . Soit $v_n = (u_n - u_0)/(C -$

u_0). La suite v_n est croissante à valeurs dans $[0, 1[$ et si elle converge alors la suite u_n aussi. On peut donc supposer que la suite u_n elle-même est en fait à valeurs dans $[0, 1[$. Soit $N \geq 1$. Regardons les 10^N intervalles $I_k^N = [\frac{k}{10^N}, \frac{k+1}{10^N}[$ pour $0 \leq k < 10^N$. Si l'un de ces intervalles contient une valeur u_m de la suite, alors les intervalles sur sa gauche ne peuvent contenir que les u_n avec $n < m$, donc au plus un nombre fini de n possibles. Il existe donc exactement l'un des intervalles I_k^N tel que tous les u_n seront dans cet intervalle pour n suffisamment grand. Soit A_N l'entier k correspondant à l'intervalle en question. Posons $y_N = \frac{A_N}{10^N}$. Pour n suffisamment grand les u_n sont dans l'intervalle $I_{A_{N+1}}^{N+1}$ et celui-ci est donc inclus dans $I_{A_N}^N$, donc $y_N \leq y_{N+1} < y_N + 10^{-N}$. Cela implique que les N premiers chiffres après la virgule pour y_{N+1} sont ceux de y_N , autrement dit on passe de y_N à y_{N+1} en ajoutant un $(N+1)$ ième chiffre après la virgule, que nous noterons x_{N+1} . Soit L le nombre réel $L = 0, x_1 x_2 x_3 \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$ (nous avons admis la convergence dans \mathbb{R} de séries de ce type). On voit que $y_N \leq L \leq y_N + 10^{-N}$, et comme $y_N \leq u_n < y_N + 10^{-N}$ pour tout n suffisamment grand on a aussi $|u_n - L| \leq 10^{-N}$ pour tout n suffisamment grand. Donc $\lim u_n = L$.

Le Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit $f(x)$ une application continue sur l'intervalle $[a, b]$, $a < b$. Supposons par exemple $f(a) \leq f(b)$ et soit y avec $f(a) \leq y \leq f(b)$. Nous définissons par récurrence une paire de suites adjacentes (u_n) et (v_n) , avec pour tout n : $f(u_n) \leq y \leq f(v_n)$. On pose, $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Supposons connus u_n et v_n . Si $f(\frac{u_n+v_n}{2}) \leq y$ on pose $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$. Sinon on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$. Dans les deux cas on a $f(u_{n+1}) \leq y \leq f(v_{n+1})$ et de plus $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$ et de plus $v_{n+1} - u_{n+1} = (v_n - u_n)/2$. Par récurrence sur n , on a $v_n - u_n = (b - a)/2^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Il s'agit donc bien d'une paire de suites adjacentes. Soit L leur limite commune. Comme $u_n \rightarrow L$ et que f est continue en L , on a $f(u_n) \rightarrow f(L)$. Mais pour tout n on a $f(u_n) \leq y$. Donc $f(L) \leq y$. Par ailleurs de $v_n \rightarrow L$ il vient $f(v_n) \rightarrow f(L)$ mais pour tout n on a $f(v_n) \geq y$ donc $f(L) \geq y$. Ainsi $f(L) = y$.

IV Limites (finies ou infinies) de fonctions en un point (ou à l'infini)

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un certain domaine de définition D (une union d'intervalles, ouverts ou fermés, allant ou non jusqu'à plus, ou moins, l'infini). Soit a un nombre réel qui peut appartenir à D , mais qui peut aussi n'être un « point-frontière » de D . Alors il y a plusieurs notions de « limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a » : limite (dite « à droite ») pour x tendant vers a par valeurs strictement supérieures (définie si il existe $b > a$ avec $]a, b[\subset D$), limite « à gauche » pour x tendant vers a par valeurs strictement inférieures (si il existe $b < a$ avec $]b, a[\subset D$), limite lorsque x tends vers a par valeurs distinctes, limite lorsque x tend vers a (sans autre précision). Chaque notion a une définition précise et une notation précise.

Par exemple : on dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a par valeurs strictement supérieures si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left(x \in D \text{ et } a < x < a + \delta \right) \Rightarrow |f(x) - L| \leq \epsilon$$

Ce qui précède est une définition. La notation sera :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = L$$

Si il existe effectivement un L qui marche dans la définition alors il est unique (on impose à D de contenir un intervalle du type $]a, b[$, $b > a$), et donc on a bien le droit de l'appeler « LA limite lorsque etc. . . ». On dit que L est la limite à droite de $f(x)$ en $x = a$.

Autre possibilité, très fréquemment employée : on dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a par valeurs distinctes de a si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left(x \in D \text{ et } 0 < |x - a| < \delta \right) \Rightarrow |f(x) - L| \leq \epsilon$$

Ce qui précède est une définition. La notation sera :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = L$$

Lorsque a est un « point-frontière gauche » de D cela équivaut à la notion de limite à droite, lorsque a un « point-frontière droit » de D , cela équivaut à la limite à gauche, lorsque D contient un intervalle $]a - \eta, a + \eta[$ ($\eta > 0$), sauf peut-être a lui-même, la définition équivaut à : il y a une limite à gauche et une limite à droite et elles sont égales.

Finalement on dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left(x \in D \text{ et } |x - a| < \delta \right) \Rightarrow |f(x) - L| \leq \epsilon$$

Ce qui précède est une définition¹. La notation sera :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Si $a \notin D$ c'est la même chose que la notion précédente, mais si $a \in D$ cela signifie que d'une part la limite L lorsque x tend vers a par valeurs distinctes existe, et que d'autre part L se trouve être exactement $f(a)$.

Le domaine de définition D n'est pas reproduit dans la notation. Il est parfois plus prudent de le rajouter explicitement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a, \\ x \in D}} f(x) = L$$

À vrai dire, c'est uniquement si on restreint la fonction $f(x)$ à deux domaines D_1 et D_2 tels que $D_1 =]0, 1[$ et $D_2 =]1, 2[$ que l'on pourrait avoir un problème puisque la même notation serait alors employée pour une limite à gauche en 1 puis une limite à

1. 4 juin 2003 (cette note est pour les collègues) : si dans la définition de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ on utilise $0 < |x - a| < \delta$ alors il est **faux** que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et $\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M$ impliquent $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = M$. Je préfère donc (mais ce choix se discute) la convention adoptée ici. La notation $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}}$ permet d'imposer $x \neq a$; pour les dérivées cela est tacitement entendu.

droite en 1, qui n'ont aucune raison d'être les mêmes. On pourrait considérer qu'une fonction n'a de sens que lorsque son domaine de définition est précisé, et que si on change de domaine de définition, c'est que l'on a changé de fonction, et donc on aurait tort d'employer la même notation $f(x)$ dans les deux cas. Cette vision est trop rigide, car on ne veut pas avoir à introduire deux notations différentes, par exemple pour $x \mapsto \frac{1}{x}$ sous prétexte qu'on l'étudie d'abord sur $]0, 1[$, puis sur $]1, 2[$. Non, la bonne attitude c'est simplement de toujours savoir exactement ce que l'on écrit et si le contexte est suffisamment clair pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté. De toute façon si le domaine D contient $]a - \eta, a + \eta[$ (pour un $\eta > 0$), sauf peut-être a , alors la limite si elle existe ne dépend pas de D , car elle ne dépend que du comportement de $f(x)$ dans $]a - \eta, a + \eta[\setminus \{a\}$.

Il y a aussi une définition de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) que vous vous ferez un plaisir d'écrire avec des « grand C » et « delta ». Et ce pour avec toutes les façons possibles pour x de « tendre vers a ».

Retour sur la définition de la continuité : Si a est dans le domaine de définition D , alors on a équivalence entre « $f(x)$ est continue au point a » et « la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a par valeurs distinctes existe et est égale à $f(a)$ ». Toujours si $a \in D$ on a aussi équivalence entre « $f(x)$ est continue au point a » et « la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a existe » (car si elle existe elle est forcément égale à $f(a)$ puisque l'on n'a pas imposé à x de ne prendre que des valeurs distinctes de a). Bref, la continuité de $f(x)$ en $x = a$, qui n'a de sens que lorsque $a \in D$, s'exprime par $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = f(a)$, ou encore par $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Dans le polycopié qui vous a été distribué, les limites sont presque toujours prises pour x tend vers a , x distinct de a , mais le symbole $x \neq a$ n'est pas ajouté à la notation, pour économiser de la sueur typographique.

Critère fondamental par les suites pour l'existence et la valeur d'une limite : pour que la limite de $f(x)$ existe lorsque x tend vers a (suivant l'une des différentes options envisagées) il faut et il suffit que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a (et satisfaisant les contraintes $u_n \in D$ et éventuellement $u_n > a$ ou $u_n < a$ ou $u_n \neq a$ suivant l'option envisagée) la suite $f(u_n)$ ait une limite et que cette limite soit la même pour toutes les suites (u_n) compatibles à l'option envisagée.

Le critère par les suites est souvent utilisé dans le sens réciproque : si $\lim u_n = a$ et si $f(x)$ est continue au point a alors $\lim f(u_n) = f(a)$.

Théorème des encadrements : Si $f(x)$, $g(x)$, $k(x)$ sont trois fonctions de même domaine de définition, si pour tout x dans ce domaine on a $f(x) \leq g(x) \leq k(x)$, et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} k(x)$ existent et sont égales alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe aussi et a la même valeur. Ce théorème vaut pour toutes les façons pour x de « tendre vers a », à condition bien sûr, que cette option soit appliquée simultanément aux trois fonctions f , g , k . Le théorème vaut aussi lorsque la limite commune est égale à $+\infty$ ou à $-\infty$.

Limites à l'infini : Lorsque D contient un intervalle $]A, +\infty[$ on peut définir la notion de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, ce que je vous laisse faire par vous-même en séparant les cas de limite finie et de limite $+\infty$ ou encore $-\infty$. La limite si elle existe sera d'ailleurs

indépendante de A . Notions analogues pour $x \rightarrow -\infty$. Le théorème des encadrements vaut aussi pour les limites à l'infini.

Sommes, produits, quotients de limites : La limite d'une somme est la somme des limites, la limite d'un produit est le produit des limites, la limite d'un quotient est le quotient des limites *sous condition que le dénominateur ait une limite non-nulle*. Ce qui précède pour des limites finies mais il y a aussi certaines règles simples (que vous préciserez vous-même) lorsque l'une (ou les deux) des limites est plus ou moins l'infini. Et tout ce qui précède est pour $x \rightarrow a$ (avec $x > a$ ou $x < a$ ou $x \neq a$ ou aucune condition) ou même $x \rightarrow \infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

V La Dérivée, notion fondatrice du Calcul, notion fondamentale pour toutes les Mathématiques

1 Définition

On dit qu'une fonction $f(x)$ est dérivable en un point a de son domaine de définition D si la limite suivante existe :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si elle existe² cette limite est appelée « dérivée de f au point a » et est notée $f'(a)$. Il est implicite dans cette limite que l'on a $x \neq a$, puisque l'on ne peut pas former le quotient des accroissements respectifs de f et de x si $x = a$. On peut spécialiser en une notion de dérivée à droite et une dérivée à gauche, la « vraie » dérivée n'existant en un point intérieur à D que si les dérivées à droite et à gauche coïncident.

La formulation suivante est souvent utile :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2. la phrase « si la limite existe » est amusante, puisque qu'est-ce que quelque chose si ce quelque chose n'existe pas, et donc si la limite n'existe pas est-il même licite de dire « si la limite existe » puisque qu'est-ce que « la limite » si elle n'existe pas justement ? Je vous laisse méditer sur cette question (que, comme vous l'aurez remarqué, je viens de poser deux fois successivement à l'identique). Un élément de réponse c'est que lorsqu'un mathématicien parle de « limite » son cerveau pense à toute la définition et en particulier « limite » est aussi une référence à une vision dynamique du quotient différentiel. Le mot « limite » fait référence à la fois à cette vision dynamique qui existe toujours, et à la quantité $f'(a)$ qui elle peut exister ou non. Cela est un exemple où l'on voit qu'il y a toujours plus dans le langage mathématique que ce qu'ont été capable de transcrire en symboles les formalistes, malgré l'illusion dans laquelle semble vivre ces formalistes. C'est grâce à cette puissance du langage, qui prend sa source dans ses ambiguïtés, que certains mathématiciens ont la créativité qui a fait progresser cette discipline de la pensée, alors qu'aucun ordinateur jamais n'aura de vision poétique de ce que peut-être le futur des mathématiques, même et surtout si on lui a fait ingurgiter la version produite par un collectif de mathématiciens idéologues français du milieu du vingtième siècle, qui se sont fait appeler « Bourbaki », et qui derrière la façade d'un communautarisme égalitaire étaient des autoritaristes carriéristes associant la pratique des mathématiques à la réalisation d'un phantasme de pouvoir, de domination et de présence.

Lorsque $f'(a)$ existe on dit que l'équation $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ est l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction $f(x)$ au point de coordonnées (abscisse, ordonnée) : $(a, f(a))$. On constate en effet que cette équation s'obtient en passant à la limite (lorsque b tend vers a par valeurs distinctes) dans l'équation de la droite contenant la corde reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$, équation qui est $y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Si la fonction est dérivable au point $x = a$ elle est aussi continue au point a . Mais il existe des fonctions continues non-dérivables en certains points (comme $f(x) = |x|$) et même il existe des fonctions *partout* continues qui ne sont *nulle part* dérivables (c'est plus difficile de donner un exemple...).

Très souvent la dérivée existe en tout point a dans un intervalle $]a_0, a_1[$, on a alors une nouvelle fonction $x \mapsto f'(x)$ sur cet intervalle, que l'on appelle « fonction dérivée de la fonction $f(x)$ ». On dit que f est de classe C^1 sur un intervalle si elle est dérivable avec une dérivée continue sur cet intervalle, de classe C^2 si elle est dérivable et que sa dérivée est de classe C^1 , de classe C^3 si sa dérivée est de classe C^2 , etc... Si f' est dérivable on dit que $(f')'$ est la *dérivée seconde* (ou du deuxième ordre) de f , et on la note f'' . Attention, pour que $f''(a)$ puisse être définie il faut que $f'(x)$ existe pour tout les x dans un certain intervalle $]a - \eta, a + \eta[$ contenant a . De même on a une notion de dérivée tierce (ou du troisième ordre) f''' . Plus généralement on notera $f^{(n)}$ la n ème dérivée de f si elle existe (donc $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, etc...). On dit que f est de classe C^∞ (sur un intervalle) si elle admet des dérivées de tous les ordres (en tout point de cet intervalle). Et, on dit simplement que f est de classe C^0 si elle est continue.

2 Règles de Calcul

La dérivée de la fonction sur $\mathbb{R} : x \mapsto x^n$ est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; valable aussi pour $n = 0$ avec la convention que $x^0 = 1$ et donc la dérivée est nulle.)

La dérivée de la fonction sur $]0, \infty[: x \mapsto x^{1/N}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{N}x^{\frac{1}{N}-1}$ ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$). Il n'y a pas de dérivée en $x = 0$ (ou plutôt la dérivée est $+\infty$), sauf pour $N = 1$.

La somme, le produit, le quotient de deux fonctions dérivables (en un point) est une fonction dérivable (en ce point) (pour le quotient on demande que le dénominateur ne soit pas nul en ce point).

La dérivée d'une combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est la combinaison linéaire $\alpha f' + \beta g'$ des dérivées. Une fonction polynomiale est de classe C^∞ , et on a $P^{(n)} = 0$ pour $n > \deg(P)$.

La dérivée d'un produit est donnée par la **Formule de Leibniz** :

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

La dérivée d'un quotient est donnée par :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Attention on a noté $g^2(a)$ pour $(g(a))^2$, que l'on peut aussi écrire $g(a)^2$, et qui ne doit pas être confondu avec $g(g(a))$ ni avec $g''(a)$. Par ailleurs la fonction $\frac{f}{g}$ est la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

Théorème de la dérivée d'une fonction composée : *Si f est à valeurs dans E et que g définie sur E est dérivable en $f(a)$ et que f est dérivable en a alors $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Plus généralement :

$$(k \circ g \circ f)'(a) = k'(g(f(a))) g'(f(a)) f'(a)$$

$$(l \circ k \circ g \circ f)'(a) = l'(k(g(f(a)))) k'(g(f(a))) g'(f(a)) f'(a)$$

Théorème de la dérivée d'une fonction réciproque : *Soit f une fonction continue et strictement croissante (ou strictement décroissante) sur un intervalle I (fini ou infini) et soit f^{-1} son application réciproque de $f(I)$ (qui est un intervalle) vers I . Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Le théorème est valable même si a est un point-frontière de I mais il s'agit alors de dérivée à droite ou à gauche suivant les cas de figure.

Attention à la notation très dangereuse f^{-1} qui ne doit pas être entendue comme faisant référence à la fonction $x \mapsto 1/f(x)$ ou encore à une « dérivée d'ordre -1 » (primitive) de f .

À ce propos on dit que F est une primitive de f si $f = F'$.

3 Dérivée et sens de variation : le Théorème Fondamental

Théorème. *Soit $f(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I . Si $f'(x)$ est à valeurs positives ou nulles, alors $f(x)$ est croissante. Si $f'(x)$ est à valeurs strictement positives alors $f(x)$ est strictement croissante. Si $f'(x)$ est à valeurs négatives ou nulles, alors $f(x)$ est décroissante. Si $f'(x)$ est à valeurs strictement négatives alors $f(x)$ est strictement décroissante. Si $f'(x)$ est identiquement nulle alors $f(x)$ est constante. Réciproquement si f est constante sa dérivée est identiquement nulle, si f est croissante sa dérivée est partout positive ou nulle, si f est décroissante sa dérivée est partout négative ou nulle. Mais si f est strictement (dé)croissante, il peut y avoir tout de même des points où sa dérivée s'annule. Attention : lorsque l'on dit*

« croissante sur $[a, b]$ » on ne dit pas seulement $f(a) \leq f(b)$, mais en fait on dit : $\forall x, y \in [a, b] \ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Nous avons donné deux démonstrations de ce théorème. La deuxième démonstration consiste à le déduire du **Théorème des Accroissements finis**, conséquence du **Lemme de Rolle**, qui lui-même nécessite le **Théorème du Maximum**, et donc indirectement aussi le **Théorème de la Borne Supérieure**. Nous donnons ici une variante de notre première démonstration, qui est indépendante de ces importants théorèmes, et qui est aussi plus simple que celle donnée en amphi car celle-ci utilisait tout de même le théorème de la borne supérieure.

Démonstration du Théorème Fondamental : Supposons $f' \geq 0$ sur l'intervalle I . Nous voulons montrer que la fonction est croissante. Une première astuce est de considérer $f_\eta(x) = f(x) + \eta x$ avec $\eta > 0$. Si nous montrons que $f_\eta(x)$ est croissante, en passant à la limite lorsque $\eta \rightarrow 0$ dans $f_\eta(x) \leq f_\eta(y)$ pour $x \leq y$ on obtient que f est croissante. Mais la dérivée de f_η est $f' + \eta$, donc strictement positive. Il suffit donc d'établir la croissance de f sous l'hypothèse que f' est partout strictement positive. Raisonnons par l'absurde et soit $x < y$ dans I avec $f(x) > f(y)$. Posons $u_0 = x, v_0 = y$. Nous construisons par dichotomie des suites adjacentes avec pour tout n , $v_n - u_n = (v_0 - u_0)/2^n$ et $f(u_n) > f(v_n)$. Supposons u_n et v_n connus. Soit $\alpha = (u_n + v_n)/2$. Si $f(\alpha) > f(v_n)$ on pose $u_{n+1} = \alpha$ et $v_{n+1} = v_n$. Si $f(v_n) \geq f(\alpha)$ on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \alpha$. On a bien alors $f(u_{n+1}) > f(v_{n+1})$. Soit a la limite commune à cette paire de suites adjacentes. Comme $f'(a) > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour $0 < |h| < \delta$ on a

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq \frac{1}{2}f'(a) > 0$$

Donc si $0 < h < \delta$ alors $f(a+h) > f(a)$ et si $-\delta < h < 0$ alors $f(a+h) < f(a)$. Pour n suffisamment grand on aura $a - \delta < u_n \leq a$ donc $f(u_n) \leq f(a)$. Et pour n suffisamment grand on aura $a \leq v_n < a + \delta$ donc $f(v_n) \geq f(a)$. Mais alors $f(u_n) \leq f(v_n)$ ce qui contredit la propriété $f(u_n) > f(v_n)$. L'hypothèse initiale à savoir l'existence de x et y était donc absurde, et la croissance de f est démontrée.

Toutes les autres affirmations du théorème sont des conséquences faciles : si $f' > 0$ on sait que f est croissante, si elle n'était pas strictement croissante il y aurait alors un sous-intervalle où elle serait constante, mais alors sa dérivée y serait identiquement nulle. Contradiction. Donc f est strictement croissante ; si f' est négative alors $-f$ a une dérivée négative, donc $-f$ est croissante, donc f est décroissante ; si f' est identiquement nulle alors f est à la fois croissante et décroissante, donc constante. Les autres affirmations, réciproques, sont très simples.

Si l'intervalle I est $[a, b]$ et que l'on suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (et donc pas nécessairement dérivable en a et b) alors le théorème s'applique encore. Le petit argument a été donné en cours je ne le reproduis pas ici.

Comme une fonction de dérivée nulle est constante, deux primitives d'une même fonction diffèrent par une constante.

Attention au piège : si f est définie sur $]0, 1[\cup]2, 3[$ et de dérivée nulle, alors f est constante dans chacun des deux intervalles, mais ces deux constantes peuvent être

distinctes, donc on ne peut pas dire « f est constante » (on dit que f est localement constante).

En utilisant la relation fondamentale entre le signe de la dérivée et la monotonie d'une fonction, on peut établir des encadrements :

Théorème : Si $F'(x) \leq G'(x)$ sur $[0, \infty[$ alors $F(x) - F(0) \leq G(x) - G(0)$ sur $[0, \infty[$.

Le même théorème s'applique sur $[a, b[$ avec $a < b$ et a remplaçant 0. On a aussi la variante avec \geq à la place de \leq .

4 Le Théorème des accroissements finis et autres « gros » théorèmes

Nous avons démontré chacun des gros théorèmes qui suivent, vous pourrez retrouver les démonstrations dans le polycopié du Professeur de Bièvre.

Théorème de la borne supérieure : *Tout sous-ensemble E non-vide de \mathbb{R} possède une borne supérieure $\sup E$ qui est soit un nombre réel soit $+\infty$. Elle est définie comme étant le plus petit majorant de E (en considérant $+\infty$ comme étant toujours un majorant). Il existe une suite croissante (x_k) à valeurs dans E et de limite $\sup E$ ce qui distingue $\sup E$ parmi tous les majorants de E . Lorsque $\sup E$ est dans E on dit qu'il est le maximum de E . Le maximum peut ne pas exister, soit parce que E n'est pas borné supérieurement ($\sup E = +\infty$) soit parce que, tel $[0, 1[$, E ne contient pas sa borne supérieure. Notions semblables de borne inférieure et de minimum.*

Théorème du maximum : *Toute fonction continue $f(x)$ sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ atteint son maximum : la borne supérieure M des $f(x)$, $a \leq x \leq b$ est finie, et il existe (au moins) un x avec $M = f(x)$. Théorème semblable du minimum.*

Principe des extrema locaux : *Si la fonction $f(x)$ est dérivable en x_0 et si $f(x_0)$ est supérieur ou égal à tous les $f(x)$ pour $x_0 - \eta \leq x \leq x_0 + \eta$ ($\eta > 0$, et cet intervalle doit être tout entier dans le domaine de définition de f) alors $f'(x_0) = 0$. Même conclusion si f a un minimum local en x_0 .*

Lemme de Rolle : *Si f est continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe x avec $a < x < b$ et $f'(x) = 0$.*

Théorème des Accroissements Finis : *Si f est continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe x avec $a < x < b$ et $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Le Théorème des Accroissements Finis (TAF) permet de démontrer instantanément le théorème fondamental sur les liens entre monotonie de la fonction f et signe de la fonction dérivée f' . Il a d'autres conséquences :

Inégalité des Accroissements Finis : *Si f est continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$ et si $|f'(x)| \leq C$ pour tout $x \in]a, b[$ alors $|f(b) - f(a)| \leq C(b - a)$. Cela est une conséquence immédiate du Théorème des Accroissements finis.*

En particulier si f est de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$ alors elle a la propriété de

Lipschitz : il existe C avec $\forall x \forall y \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$. Cela découle de l'inégalité des accroissements finis, en prenant $C = \sup_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ qui est fini par le Théorème du Maximum puisque l'on a supposé $f'(x)$ continue sur $[a, b]$.

5 Notation différentielle

On peut considérer le calcul de la dérivée comme une opération qui nécessite une notation spéciale, indépendamment de la fonction à laquelle on applique ce calcul. Cette notation est $\frac{d}{dx}$ (« dé sur dé x »), ou $\frac{d}{da}$, ou $\frac{d}{dz}$, etc. . . selon le nom de la variable entrant dans les fonctions. Le « dé » symbolise un accroissement « infinitésimal », étant entendu qu'un accroissement fini est souvent noté Δ (« Delta » dont la première lettre est un « dè »). Autrement dit au lieu d'écrire $f'(x)$ on écrit $\frac{d}{dx}f(x)$ ou $\frac{d}{dx}(f)(x)$.

En fait une notation encore plus proche de la définition est $f' = \frac{df}{dx}$. L'étape suivante est de poser $y = f(x)$ (ou $z = f(x)$ ou $w = f(x)$ etc. . .) et d'écrire alors :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Comme toute notation astucieuse, elle nécessite pour sa manipulation correcte de savoir ce que l'on écrit. Certains calculs sont grandement facilités par son emploi.

Les théorèmes de la dérivée d'une fonction composée, et d'une fonction réciproque affirment :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

La formule de Leibniz s'écrit :

$$\frac{d(yz)}{dx} = \frac{dy}{dx}z + y \frac{dz}{dx}$$

Mais la forme sous laquelle Leibniz l'écrivit est :

$$d(yz) = (dy)z + y(dz) = z \cdot dy + y \cdot dz$$

Il n'y a plus de dx ! D'ailleurs on obtiendrait à partir de là une formule valable en « divisant » par dw avec w une fonction (à peu près quelconque, mais raisonnable, disons de classe C^1 , avec une dérivée partout non-nulle) de x . . . Le **calcul différentiel** qui n'est pas au programme de DEUG première année, est un ensemble de définitions et de théorèmes qui permet de donner un sens précis à cette formule de Leibniz. Mais nous ne nous autoriserons pas cette géniale séparation du dy et du dx ! On se contentera de noter que la Théorie de la Relativité Générale de Einstein est une illustration qu'il est parfois important de s'intéresser à des relations (telles celle de Leibniz) qui sont invariantes du choix de la « coordonnée » x que l'on utilise, et de pouvoir les

écrire sous une forme ne faisant même plus apparaître cette « coordonnée » x . Une autre motivation plus simple est que lorsque l'on étudie par exemple une courbe dans un plan on peut s'intéresser à des propriétés qui ne dépendent que de la courbe et pas de la paramétrisation de cette courbe. Le calcul différentiel de Leibniz permet de réaliser cet objectif.

Les dérivées (« fluxions ») de Newton, elles, avaient initialement pour objectif principal de calculer (donc en premier lieu de définir...) des vitesses, des accélérations, en fonction du temps, qui servait de « coordonnée absolue ». Mais les outils développés avaient une application immédiate à d'autres problèmes que ceux du mouvement de points corporels ; par exemple Newton applique immédiatement son calcul pour établir une formule pour $(1+x)^a$ qui généralise à tout a la formule du binôme valable uniquement pour $a \in \mathbb{N}$ (nous en reparlerons peut-être). Par ailleurs Newton s'est aussi intéressé à des questions indépendantes de la paramétrisation : par exemple il applique immédiatement son calcul nouvellement créé à la détermination du cercle le plus tangent à une courbe en un point, ce qui donne la notion de rayon de courbure.

VI Les fonctions trigonométriques, exponentielle, logarithme

1 Continuité, dérivabilité, et encadrement des fonctions trigonométriques

Pour une discussion sérieuse des fonctions trigonométriques $\sin(x)$ et $\cos(x)$ il serait nécessaire d'étudier le problème de la mesure du cercle, c'est-à-dire de la mesure de sa circonférence et de son aire, ou plus généralement de l'arc et de l'aire d'un secteur angulaire (le premier problème, non-trivial, étant déjà de définir ces notions). Si votre Professeur est courageux il rédigera un petit compte-rendu spécial à ce sujet (il s'est acheté un compas et une équerre, spécialement dans cet objectif, et envisage d'apprendre le grec pour lire Archimède), mais un traitement réellement satisfaisant occuperait plusieurs dizaines de pages et irait d'ailleurs à la fois au-delà du programme de DEUG, et en deçà, car il faut revenir à des notions de géométrie plane qui étaient, sont peut-être encore, étudiées dans le primaire et le secondaire. Par exemple, rien que pour parler de l'aire d'un triangle, cela prend du temps. Si vous pensez savoir ce qu'est l'aire d'un triangle, je vous lance le défi suivant : montrez que lorsque l'on découpe n'importe comment un grand triangle en un nombre fini de petits triangles, l'aire du grand triangle est la somme des aires des petits triangles. Je connais deux solutions satisfaisantes (à part celle qui consiste à faire un modèle pré-découpé en bois et à le mettre sur une balance, assemblé ou en vrac), dont une est abordable à votre niveau et se résume en une formule : $x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + x_3y_1 - y_3x_1$. Comprenez qui pourra...

Bref, comme expliqué en cours, sur la base de la méthode d'exhaustion de Archimède pour la mesure du cercle, nous avons un nombre π , défini comme aire du disque de rayon 1, nous avons un théorème qui dit que la circonférence du cercle est $2\pi R$ et l'aire du disque est πR^2 , nous avons des fonctions sinus $\sin(x)$ et cosinus $\cos(x)$ ainsi

que les formules :

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) \\ \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)\end{aligned}$$

Un raisonnement utilisant des encadrements provenant de calculs d'aires permet de montrer :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad (\text{d'où l'on déduit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = 0)$$

À partir de là on montre :

Théorème : les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont dérivables (et donc elles sont aussi continues) sur \mathbb{R} . La dérivée de $\sin(x)$ est $\cos(x)$ tandis que la dérivée de $\cos(x)$ est $-\sin(x)$.

1. Comme $\cos(x) \leq 1$ sur $[0, \infty[$ on a $\sin(x) \leq x$ sur $[0, \infty[$.
2. Puis $1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$ donc $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
3. Mais alors $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$.
4. Puis $1 - \cos(x) \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ donc $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
5. On continue : $\sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
6. Puis $1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}$ donc $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$.
7. Ainsi $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$ et ainsi de suite...
8. On a donc :

$$x \geq 0 \Rightarrow x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

9. Comme $\cos(x)$ est une fonction paire, ces encadrements sont valables pour $x \leq 0$, mais comme $\sin(x)$ est une fonction impaire, pour $x \leq 0$ il faut remplacer les \leq par des \geq .

Lorsque $0 \leq x \leq \frac{1}{10}$ cela permet de calculer $\sin(x)$ et $\cos(x)$ presque « à la main » avec plusieurs chiffres après la virgule. Puis en combinant avec $\cos(\frac{1}{10})$ et $\sin(\frac{1}{10})$ on obtient $\cos(x + \frac{1}{10})$ et $\sin(x + \frac{1}{10})$, soit les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour $\frac{1}{10} \leq x \leq \frac{2}{10}$, etc... Une personne suffisamment motivée peut donc tabuler avec plusieurs chiffres après la virgule (et la précision peut être augmentée par des encadrements d'ordre supérieur) les valeurs de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour $x = \frac{k}{100}$ et $0 \leq k \leq 79$ (pourquoi 79 ?), avec une quantité de calculs relativement raisonnable. Si l'on a besoin d'une valeur de $\sin(x)$ pour un x intermédiaire on peut faire une interpolation linéaire entre les

deux plus proches $k/100$ (ou quelque chose de plus astucieux puisque l'on a aussi une approximation des dérivées).

Évidemment de nos jours, les calculateurs électroniques font tout cela quasi-instantanément. Encore faut-il disposer pour leur programmation (ou conception) d'arguments théoriques comme ceux ci-dessus qui mènent à des algorithmes de calculs efficaces.

Nous reviendrons sur ce qui se passe lorsque nous continuons à l'infini ce processus d'encadrement des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

2 Logarithme et exponentielle

Le Théorème suivant est très important, mais ne sera démontré que au deuxième semestre :

Théorème : Toute fonction continue f sur un intervalle I admet une primitive F : il existe une fonction F sur f qui est dérivable en tout point et dont la fonction dérivée est f .

Nous savons déjà que deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent par une constante additive. Une primitive est donc déterminée par sa valeur en un point.

On appelle *logarithme* (Népérien) la fonction sur $]0, \infty[$ qui s'annule en $x = 1$ et qui est une primitive de $x \mapsto 1/x$. On la note $\log(x)$, ou $\ln(x)$, ou parfois $\text{Log}(x)$. Comme on peut dériver autant de fois que l'on veut la fonction $1/x$, la fonction logarithme est aussi infiniment dérivable.

La fonction $\log(x)$ est une fonction continue strictement croissante, et qui établit une bijection entre $]0, \infty[$ et $]\lim_{x \rightarrow 0} \log(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x)[$. On montre : $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$, donc \log est une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} .

On appelle *exponentielle* la fonction sur \mathbb{R} à valeurs dans $]0, +\infty[$ qui est la fonction réciproque de la fonction logarithme. On la note $y \mapsto \exp(y)$ donc $x = \log(y) \Leftrightarrow y = \exp(x)$. Elle est donc continue et dérivable.

On montre que la fonction logarithme a les propriétés : $\forall a, b > 0 \log(ab) = \log(a) + \log(b)$, $\log(1/a) = -\log(a)$, $\log(a^n) = n \log(a)$ (pour $n \in \mathbb{N}$, avec la convention $a^0 = 1$ pour le cas $n = 0$), $\log(a^{1/N}) = \frac{1}{N} \log(a)$ ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$).

On montre que la fonction exponentielle a les propriétés : $\forall u, v \in \mathbb{R} \exp(u + v) = \exp(u) \exp(v)$, $\exp(u) > 0$, $\exp(-u) = 1/\exp(u)$, $\exp(nu) = (\exp(u))^n$, $\exp(\frac{1}{N}u) = (\exp(u))^{1/N}$.

On utilise les fonctions logarithme et exponentielle pour définir les fonctions puissance : par définition, pour $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ on pose $x^a = \exp(a \log(x))$. Pour $a \in \mathbb{N}$ ou $1/a \in \mathbb{N}$ cela redonne les anciennes notions. Pour a fixé, $x \rightarrow x^a$ est une fonction sur $]0, \infty[$ à valeurs dans $]0, \infty[$. Cependant pour a entier on autorise x dans \mathbb{R} tout entier, pour pouvoir utiliser x^n comme on savait le faire avant. Pour $a = 0$

on convient $x^0 = 1$. Cela vaut aussi pour $x = 0$, donc par convention $0^0 = 1$. Pour N entier impair, on autorise aussi x dans \mathbb{R} tout entier (par exemple pour $N = 3$ on a la racine cubique) : $x^{1/N}$ est l'unique solution dans \mathbb{R} à l'équation $y^N = x$, ou encore pour $x < 0$, $x^{1/N} = -|x|^{1/N}$. Attention cela est uniquement pour N entier impair. Pour N entier pair, par exemple pour $N = 2$ la notation $x^{1/2}$, ou \sqrt{x} n'a de sens que pour $x > 0$ (et aussi en $x = 0$ où l'on convient que ça vaut 0). Bref les fonctions puissances ont les propriétés attendues : $x^a y^a = (xy)^a$, $x^{a+b} = x^a x^b$, $(x^a)^{-1} = x^{-a} = (1/x)^a$, $(x^a)^b = x^{ab}$.

Soit e l'unique nombre réel positif tel que $\log(e) = 1$. On a $e > 1$, en fait $e = 2,71828\dots$. Avec la notation fonction puissance on a $\exp(a) = \exp(a \log(e)) = e^a$. Dorénavant on écrira plus souvent e^y que $\exp(y)$.

L'autre propriété fondamentale de la fonction exponentielle est qu'elle est sa propre dérivée :

$$\frac{d}{dy} e^y = e^y$$

Elle est donc aussi infiniment dérivable.

Plus généralement on a pour chaque $t > 0$ fixé, l'égalité $\frac{d}{dy} t^y = \log(t) t^y$ comme fonctions de $y \in \mathbb{R}$

On a pour chaque $y \in \mathbb{R}$ et sur l'intervalle $]0, +\infty[$ pour t : $\frac{d}{dt} t^y = y \cdot t^{y-1}$

Nous avons démontré : **Théorème** : Soit $f(y)$ une fonction sur un intervalle I qui vérifie l'équation différentielle : $\forall y f'(y) = f(y)$. Alors il existe une constante C de sorte que $\forall y f(y) = C e^y$.

3 Représentations de la fonction exponentielle, fonctions hyperboliques

Nous avons montré : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{N})^N$.

Cependant nous avons aussi établi que la convergence est très lente. Une bien meilleure représentation est donnée par l'écriture de e^x comme série infinie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{n=N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Nous avons démontré cette formule en distinguant $x \geq 0$ et $x \leq 0$. Pour $x \leq 0$ nous avons en utilisant le Théorème fondamental sur les liens entre monotonie et dérivée établi des encadrements, en fait établi que les sommes partielles de la série sont alternativement au-dessus et en dessous de e^x . Cela donne un moyen très efficace pour évaluer par exemple e , en calculant en fait des encadrements pour $1/e$. Pour $x \geq 0$, il s'agit d'une série à termes positifs, les sommes partielles forment une suite croissante et en montre avec les dérivées que ces sommes partielles sont toutes majorées par e^x . Mais on vérifie que la N ième somme partielle est au moins égale à

$(1 + \frac{x}{N})^N$. La limite lorsque $N \rightarrow \infty$ est donc à la fois au moins égale à e^x et au plus égale à e^x . D'où l'identité.

Les fonctions hyperboliques $\text{ch}(x)$ (cosinus hyperbolique) et $\text{sh}(x)$ (sinus hyperbolique) sont les parties paires et impaires de la fonction exponentielle :

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad e^x = \text{ch}(x) + \text{sh}(x)$$

La fonction $\text{sh}(x)$ est une fonction impaire, continue et strictement croissante, et elle est bijective de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . La fonction $\text{ch}(x)$ est paire, à valeurs dans $[1, +\infty[$, et surjective de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

La dérivée de la fonction $\text{ch}(x)$ est la fonction $\text{sh}(x)$ et la dérivée de la fonction $\text{sh}(x)$ est la fonction $\text{ch}(x)$.

$$\frac{d}{dx}\text{ch}(x) = \text{sh}(x) \quad \frac{d}{dx}\text{sh}(x) = \text{ch}(x)$$

La ressemblance avec les fonctions \cos et \sin est renforcée par les formules d'addition :

$$\text{ch}(a + b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$$

$$\text{sh}(a + b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{ch}(a)\text{sh}(b)$$

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

On introduit également la fonction tangente hyperbolique $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$. Elle établit une bijection continue de \mathbb{R} sur l'intervalle $] - 1, +1[$.

On est amené à regarder aussi les fonctions hyperboliques réciproques, en particulier la fonction $\text{argsh}(y)$ réciproque au sinus hyperbolique (pour $y \in \mathbb{R}$) et la fonction $\text{argth}(y)$ réciproque à la tangente hyperbolique (pour $y \in] - 1, +1[$).

On a :

$$\frac{d}{dy}\text{argsh}(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \quad \frac{d}{dy}\text{argth}(y) = \frac{1}{1 - y^2}$$

On peut aussi donner des représentations explicites :

$$\text{argsh}(y) = \log(y + \sqrt{1 + y^2}) \quad \text{argth}(y) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$$

4 Représentation de la fonction logarithme

Nous avons établi qu'il est possible pour $0 < x < 2$ de représenter la fonction logarithme comme somme d'une série infinie : pour cela on écrit plutôt $x = 1 + h$, avec $-1 < h < +1$ et on a alors :

$$-1 < h < 1 \Rightarrow \log(1 + h) = \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} \frac{h^j}{j}$$

Pour $0 < h < 1$ il s'agit d'une série alternée et les sommes partielles donnent successivement des majorations et des minoration. D'ailleurs la formule est aussi valable pour $h = 1$ et donne une formule pour $\log(2)$. Mais pour calculer $\log(2)$ il est bien plus efficace de calculer en fait $2\log(\sqrt{2})$ car la série pour $h = \sqrt{2} - 1$ convergera bien plus vite que pour $h = 1$.

On peut en fait partir de cette formule, et vérifier qu'elle définit une primitive de $1/(1+h)$. C'est un peu délicat cependant. Une fois que l'on a une primitive $L(x)$ qui s'annule en 1 de $1/x$ sur l'intervalle $]0, 2[$, la fonction $-L(1/x)$ fournira une primitive qui s'annule en 1 et est définie sur l'intervalle $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Ça se recolle donc pour donner une fonction sur $]0, \infty[$ tout entier.

Remarque : par ailleurs nous avons donné suivant une méthode semblable à celle employée pour $\log(1+h)$ une série pour $\arctan(h)$ valable pour $|h| < 1$ et même pour $h = 1$ ce qui donne une série pour $\pi/4$.

Voir en page 98 le sujet de l'examen de rattrapage pour une intéressante représentation de $\log x$ valable pour tout $x > 0$.

VII Dérivées secondes, convexité, DL à l'ordre 2

Si la fonction f est dérivable sur un intervalle contenant a (en son intérieur) et admet une dérivée seconde en a , alors suivant le signe de $f''(a)$, on a :

- si $f''(a) > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que le graphe de la courbe est au-dessus de la tangente sur $]a - \eta, a + \eta[$, le seul point de contact étant en $(a, f(a))$
- si $f''(a) < 0$ il existe $\eta > 0$ tel que le graphe de la courbe est en-dessous de la tangente sur $]a - \eta, a + \eta[$, le seul point de contact étant en $(a, f(a))$
- si $f''(a) = 0$, tous les cas de figure peuvent se présenter : au-dessus, en-dessous, traverse, traverse et coupe la tangente une infinité de fois au voisinage de a .

La notion de **convexité** est importante. On dit que la fonction est convexe sur l'intervalle I si pour tout $a < x < b$ le point d'abscisse x sur le graphe de la fonction est situé en-dessous de la corde reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. On dit que la fonction est concave si pour tout triplet $a < x < b$ le point d'abscisse x sur le graphe de la fonction est situé au-dessus de la corde reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. Si f est convexe alors $-f$ est concave, et si f est concave, alors $-f$ est convexe. Les seules fonctions à la fois convexe et concave sont les fonctions linéaires (dont le graphe est sur une droite).

Le pendant du Théorème fondamental « dérivée–monotonie » est le Théorème « dérivée seconde–convexité ».

Théorème : *si la fonction est deux fois dérivable sur I alors elle est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est partout positive ou nulle. Elle est concave si et seulement si sa dérivée seconde est partout négative ou nulle.*

En fait, si on ne dispose pas de la dérivée seconde, on peut aussi examiner la convexité sur la dérivée première : **Théorème :** *si la fonction est une fois dérivable sur I alors elle est convexe si et seulement si sa dérivée première est croissante.*

La fonction $\log(x)$ est concave. La fonction $\exp(x)$ est convexe.

L'assertion « le point d'abscisse x sur le graphe de la fonction est situé en-dessous de la corde reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$ » se traduit de manière équivalente par plusieurs inégalités. En voici une :

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

Cette inégalité, pour tout les $a < x < b$ dans I est donc équivalente à la convexité de la fonction f sur I .

Nous avons démontré le théorème suivant (théorème du développement limité à l'ordre deux) :

Théorème : *si f est dérivable au voisinage de a et admet une dérivée seconde en a alors*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{f''(a)}{2}$$

Ce théorème permet de retrouver les affirmations relatives aux positions relatives du graphe et de la tangente. Plus tard nous étudierons la notion de développement limité d'ordre supérieur, qui fait intervenir les dérivées tierce, quartuple, etc... en a .

VIII Les Nombres Complexes

1 Coordonnées cartésiennes et polaires

La notion de coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point P dans un plan est familière. En notations vectorielles, elle correspond à l'égalité $\overrightarrow{OP} = x\vec{u} + y\vec{v}$, le point O et les vecteurs \vec{u} et \vec{v} formant un repère orthonormé. L'axe des x est selon \vec{u} , l'axe des y est selon \vec{v} . À vrai dire, peut-être cela ne vous est pas si familier, et vous vous posez peut-être la question : « qu'est-ce qu'un vecteur ? ». Je serais alors tenté de surenchérir par « qu'est-ce qu'un plan ? qu'est-ce qu'une droite ? qu'est-ce qu'un point ? ». Un mathématicien me répondrait peut-être (mais attendez, ce n'est pas la réponse finale) : par définition le plan c'est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Un point P c'est un couple (x, y) et on appelle x et y ses coordonnées. Le point $(0, 0)$ est appelé origine et est noté O . Une droite D c'est l'ensemble des points (x, y) satisfaisant une certaine équation $ax + by = c$ (avec a ou b ou les deux non nuls). Qu'est-ce qu'un vecteur alors ? et bien ça se complique. Première notion : un vecteur V c'est simplement un couple (P, Q) de deux points, de sorte que l'on écrit aussi $V = \overrightarrow{PQ}$. Le point P sera l'origine et le point Q la pointe du vecteur. Deuxième notion : on veut pouvoir additionner les vecteurs, suivant la fameuse règle du parallélogramme, mais avec la première notion on ne peut faire ça que pour les vecteurs qui ont la même origine P . Donc, dans la deuxième notion on s'autorise à déplacer parallèlement à eux-mêmes les vecteurs. Autrement dit alors un vecteur c'est aussi simplement un couple (α, β) de nombres réels (et si $P = (x, y)$, et V

correspond à (α, β) alors $Q = (x + \alpha, y + \beta)$ pour que $V = \overrightarrow{PQ}$ mais que l'on voit comme correspondant à une **transformation** du plan dans lui-même particulière, en fait l'application qui envoie chaque point (x, y) sur le point $(x + \alpha, y + \beta)$. Pour retrouver V il suffit de connaître le point A sur lequel il envoie l'origine O , on aura donc $V = \overrightarrow{OA}$. Plus généralement si le vecteur V envoie le point R sur le point S alors on a aussi \overrightarrow{RS} . Dans la première notion on considèrerait que \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{RS} étaient deux choses différentes, dans la deuxième on considère que ce sont en fait deux notations différentes pour la même entité. Un peu perdu(e) ? le pire n'est pas encore arrivé. . .

En fait dans ce cas comme dans d'autres ce qui importe surtout ce n'est pas tant de savoir ce **qu'est un vecteur**, c'est ce que l'on **fait avec les vecteurs**. Revenons au problème du plan. Dans ce qui précède, il y a une notion qui n'est pas du tout encore incorporée, c'est celle de distance. Et bien, dans notre approche on **définira** la distance $d(P, Q)$ comme étant donnée par la formule $\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ si $P = (x, y)$ et $Q = (x', y')$, et la **longueur** (ou norme) d'un vecteur $V = \overrightarrow{PQ}$ est définie selon $\|V\| = d(P, Q)$. Évidemment après il faut démontrer les propriétés attendues, comme $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ avec égalité seulement si Q est sur le « segment » $[P, R]$ (notion que je vous laisse définir) . . . ce n'est pas totalement évident, mais on peut y arriver, par un raisonnement ne faisant intervenir que les règles du calcul avec les nombres réels. Et le théorème de Pythagore dans tout cela ? ce n'est plus un théorème c'est une définition ! Petit malaise . . . s'en extirper, si on le veut vraiment, n'est pas simple. Il faudrait tout reprendre. Ce qu'il faut ce n'est pas trouver un plan, c'est identifier un petit nombre **d'axiomes** dont on postule la validité, et tout en déduire ; au début c'est fastidieux, mais ensuite on accumule les résultats, et les raisonnements en sont d'autant facilités. Si un jour on obtient une contradiction, et bien on n'a plus qu'à jeter les axiomes à la poubelle et en trouver de meilleurs. Ce n'est jamais arrivé encore en Mathématiques, sauf dans la fameuse « théorie des ensembles » qui, ironiquement est censée nous fournir l'architecture sur laquelle tout le reste s'appuie. Et bien c'est justement dans les premières tentatives de formaliser cette architecture que les mathématiciens, et pas des rigolos, ont commis des erreurs. Leurs axiomes menaient à des contradictions . . . Tout est sous contrôle paraît-il aujourd'hui, mais dans le processus certains aspects inattendus ont été mis à jour, les fameux théorèmes de Gödel sur les propositions indécidables. En ce qui concerne l'axiomatisation de la géométrie plane dans le plan, elle a été faite par le mathématicien Hilbert au dix-neuvième siècle. Il faut tout un livre . . . L'essentiel du travail avait en fait été effectué par les grecs deux millénaires auparavant : ce sont eux les inventeurs de la méthode axiomatique. Pendant plus de 2000 ans, beaucoup ont cru que l'un des axiomes des grecs était superflu, qu'il était une conséquence des autres, puis au dix-neuvième siècle des mathématiciens ont découvert qu'il existait d'autres géométries, avec toutes les propriétés, sauf justement cet « axiome des parallèles » que l'on pensait superflu. Dans ces géométries la somme des angles d'un triangle n'est plus égale à π , la circonférence d'un cercle n'est plus donnée par la formule $2\pi R$, . . .

Nous allons maintenant parler des coordonnées polaires ρ et θ d'un point $P = (x, y)$. Pour ρ c'est très simple on pose $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pour θ c'est plus subtil car il n'est défini que « modulo 2π ». De plus il faut exclure de la discussion l'origine O des coordonnées cartésiennes. La coordonnée angulaire θ est définie comme étant un

nombre réel tel que $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$. Par exemple pour $x > 0$ on peut prendre $\theta = \text{Arctg}(\frac{y}{x})$ qui appartient à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Pour $x < 0$ on prend $\theta = \text{Arctg}(\frac{y}{x}) + \pi$ qui appartient à $] +\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}[$. Pour $x = 0$ et $y > 0$ on prend $\theta = +\frac{\pi}{2}$, pour $x = 0$ et $y < 0$ on prend $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Remarquez que dans cette discussion nous utilisons des outils de l'analyse, comme les théorèmes qui permettent de prouver l'existence de la fonction Arctg , alors que la notion d'angle, est une notion qui nous semble être un a priori de la pensée. On pourrait essayer de définir θ comme étant la « longueur à parcourir sur le cercle en partant du point $(0, 1)$ et en allant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre jusqu'au point $(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho})$ » (cela donne-t-il le même θ que plus haut ?) . Mais justement pour définir cette « longueur sur le cercle » il n'y a pas d'échappatoire aux notions de suites, de limites, de continuité (même si l'on veut rester le plus proche possible de Archimède par exemple). L'écart qu'il faut franchir en mathématiques entre certaines notions géométriques qui nous apparaissent assez évidentes, et la formalisation finale qui nécessite tout un attirail, reste, pour l'auteur de ces notes, un mystère qui n'est pas expliqué, et qui peut-être est lié intimement à la biologie de nos sens et de notre pensée.

Cela étant dit soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la rotation d'angle α du plan vers lui-même est l'application R_α qui envoie le point P de coordonnées polaires ρ et θ sur le point Q de coordonnées ρ et $\theta + \alpha$ (et aussi $R_\alpha(O) = O$). Clairement $R_{\alpha+2\pi} = R_\alpha$ et $R_{\alpha+\beta} = R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha$. Il est très important que cette rotation prenne une forme très simple lorsque l'on exprime son action en coordonnées cartésiennes : on trouve $R_\alpha(x, y) = (\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y, \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y)$ (on a noté $R_\alpha(x, y)$ plutôt que $R_\alpha((x, y))$).

À tout nombre $\rho \geq 0$ on associe la dilatation du plan D_ρ qui envoie chaque point $Q = (x, y)$ sur le point $(\rho x, \rho y)$. Finalement à tout point P du plan on associe la transformation T_P du plan sur lui même qui envoie chaque point Q sur $D_\rho(R_\theta(Q))$, avec ρ et θ les coordonnées polaires de P (si $P = O$ on définit T_P comme l'application qui envoie chaque Q sur O). Le miracle c'est que en coordonnées cartésiennes tout est très simple :

$$T_{(x,y)}(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

Introduisons maintenant la notation $P \times Q$ pour $T_P(Q)$:

$$P \times Q = (x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

Nous avons un produit, où est l'addition ? et bien on posera

$$P + Q = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

Ainsi nous avons muni le Plan, que nous appellerons dorénavant « ensemble des nombres complexes » \mathbb{C} de deux opérations qui prennent chacune deux points et en donnent un troisième. L'une est une addition $+$, et l'autre une multiplication \times , et \mathbb{C} muni de ces deux opérations est un **corps**. Nous devons donc faire une digression sur les anneaux et les corps avant de démontrer ce point fondamental.

2 Anneaux et corps en très bref

Répetons brièvement ce qui a été vu en cours : un anneau commutatif A , c'est un ensemble muni de deux opérations $+$ et \times , c'est-à-dire, à chaque fois que l'on a a et b dans A on leur associe un élément c de A , noté $a + b$ et un élément d de A , noté $a \times b$, et les règles suivantes sont vérifiées :

- On a $a + b = b + a$ (commutativité de l'addition).
- On a $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativité de l'addition).
- Il existe un élément spécial 0 avec $\forall a \in A \quad 0 + a = a + 0 = a$.
- Tout élément admet un opposé : $\forall a \exists a' \quad a + a' = a' + a = 0$. Cet opposé est unique, on le note $-a$, et au lieu d'écrire $a + (-b)$ on écrit $a - b$
- On a $a \times b = b \times a$ (commutativité de la multiplication ; c'est pour cela que l'on dit que l'anneau est commutatif).
- On a $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (associativité de la multiplication).
- Il existe un élément spécial 1 , différent de 0 , avec $\forall a \in A \quad 1 \times a = a \times 1 = a$.
- On a pour tout a, b, c : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)

Voilà. Signalons un horrible abus de notation : si l'on additionne 1 n -fois avec lui-même, on obtient un élément, notons le n_A dans A . Autrement dit on a une application canoniquement définie de \mathbb{N} dans A , qui associe n_A à n (et $0_A = 0$...), et comme tout élément dans A a un opposé on a même une application canonique de \mathbb{Z} dans A . Et bien, l'élément associé à l'entier n dans \mathbb{Z} , sera encore noté n dans A : on laisse tomber n_A . Signalons que l'on peut alors avoir des équations étranges comme $2 = 0$. En effet sur l'ensemble $A = \{0, 1\}$ avec deux éléments on a une structure d'anneau (unique), je vous laisse déterminer comment faire pour définir la valeur de $a + b$ et de $a \times b$ pour tout a et tout b de sorte que $(A, +, \times)$ soit un anneau.

Les ensembles \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , munis de l'addition et de la multiplication usuelles sont des anneaux. L'ensemble \mathbb{N} n'est pas un anneau car, à part 0 , ses éléments n'ont pas d'opposés. Bon, il y a un nombre tellement infini de choses à dire, que l'on se contentera d'une remarque : la formule du binôme est vraie dans tout anneau commutatif, après avoir convenu bien sûr que a^n signifie a fois a fois a , ... n -fois (et $a^0 = 1$).

On dit que l'anneau A est intègre si $a \times b$ est nul seulement si soit a soit b , soit les deux sont nuls. Un exemple d'anneau non-intègre est donné, comme nous l'avons vu par l'ensemble $\text{Fonct}(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ de toutes les fonctions de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Pour tout ensemble \mathcal{X} l'ensemble $\text{Fonct}(\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R})$ des fonctions sur \mathcal{X} à valeurs numériques est naturellement un anneau pour l'addition et la multiplication des fonctions $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$, $f \times g : x \mapsto f(x)g(x)$. Le sous-anneau $\text{Pol}(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ des fonctions polynomiales (voir plus loin) est intègre, mais $\text{Fonct}(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ n'est pas intègre.

Finalement on dit que l'anneau commutatif A est un **corps** si tout élément non-nul est inversible : $\forall a \neq 0 \exists b \quad ab = ba = 1$. Les anneaux \mathbb{Q} et \mathbb{R} sont des corps. L'anneau \mathbb{Z} n'est pas un corps (seuls ± 1 sont inversibles dans \mathbb{Z}). Un anneau est intègre si et seulement si il est un sous-anneau d'un corps. La construction de \mathbb{Q} à partir de \mathbb{Z} se généralise à tout anneau intègre et permet de construire ce que l'on appelle son

corps des fractions. Pas de panique ce sont simplement les expressions $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, avec les mêmes règles de manipulations que dans le passage de \mathbb{Z} à \mathbb{Q} .

3 Le corps des nombres complexes

Je m'aperçois que la reprographie va bientôt fermer, alors je vais aller de plus en plus en vite. De toute façon vous avez pris des notes en amphi, j'espère.

Donc, on a notre Plan, dont les éléments sont des points P identifiés à des couples (x, y) . On a décidé de noter \mathbb{C} ce plan, et on a défini une addition et une multiplication. La grande affaire c'est que \mathbb{C} est un corps ! De plus en associant au nombre réel $x \in \mathbb{R}$ le point (non, maintenant on dira le nombre complexe) $(x, 0)$ dans \mathbb{C} , on a évidemment une injection de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , mais le truc important c'est que c'est compatible aux additions (dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C}) et aux multiplications. Donc on considérera dorénavant que \mathbb{R} est un sous-ensemble (un sous-corps) de \mathbb{C} .

Pour la vérification de la structure d'anneau, tout ou presque est très immédiat à partir des formules en coordonnées cartésiennes pour $P + Q$ et pour $P \times Q$. En particulier on voit la commutativité de la multiplication. Bien sûr 0 c'est $(0, 0)$ et 1 c'est $(1, 0)$. Le seul truc moins immédiat c'est l'associativité de la multiplication : on peut l'établir en revenant aux rotations et dilatations qui nous ont mené à la formule choisie pour $P \times Q$.

Le point essentiel c'est de trouver pour tout point complexe (à l'avenir on ne dira plus point, mais nombre) P non nul son inverse multiplicatif : trouver Q avec $P \times Q = Q \times P = 1$. Si l'on revient à la définition en terme de rotation et dilatation, c'est clair ; si les coordonnées polaires de P sont ρ et θ il faut prendre pour Q le point de coordonnées polaires $\frac{1}{\rho}$ et $-\theta$. En effet la multiplication complexe consiste à multiplier les coordonnées radiales et additionner les coordonnées angulaires ! Donc l'inverse de $P = (x, y)$ existe bien, et si l'on repasse en coordonnées cartésiennes on trouve

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Vérifiez, ça marche ! Dorénavant, comme on est tout de même un peu mal à l'aise avec « 1 divisé par un point P », on utilisera plutôt les lettres z , w , etc. . . pour désigner les nombres complexes.

Bon il est temps d'introduire le nombre complexe i : c'est $(0, 1)$. Nous avons vu que \mathbb{R} peut-être vu comme un sous-corps de \mathbb{C} et c'est clair que si $a \in \mathbb{R}$ et $z = (x, y)$ alors $a \times z = (ax, ay)$. Donc en fait :

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y \times (0, 1) = x + y \times i$$

La notation \times est lourde, on va laisser tomber toute notation et écrire la multiplication par juxtaposition :

$$z = x + yi = x + iy$$

Nous recueillons le fruit de nos efforts : que vaut i^2 ? on trouve $i^2 = -1$. Voilà, nous avons un corps dans lequel l'équation $X^2 = -1$ a une solution (en fait deux, $+i$ et

$-i$). D'ailleurs avec $z = x + iy$, $w = x' + iy'$ et $i^2 = -1$ on retrouve

$$(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$$

Donc il n'y a rien d'autre à mémoriser que $i^2 = -1$!

4 Racines, Équations, Exponentielle Complexe

J'accélère franchement. Si $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, on appelle x la partie réelle et y la partie imaginaire de z . On note $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$. On note $|z|$ et on appelle module de z la quantité réelle, positive ou nulle : $\sqrt{x^2 + y^2}$. On a $|zw| = |z||w|$, $|z + w| \leq |z| + |w|$. Et si $z \in \mathbb{R}$, $|z|$ est la bonne vieille valeur absolue de z . Le conjugué complexe de z est $x - iy$ et est noté \bar{z} . On a $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ et $z\bar{z} = |z|^2$.

Racines carrées : tout nombre complexe z non nul, possède exactement deux racines carrées, $w = a + ib$ et $-w$. On trouve a et b en résolvant le système $a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $a^2 - b^2 = x$, les signes respectifs étant fixés par $2ab = y$.

Équation quadratique : toute équation quadratique $\alpha w^2 + \beta w + \gamma = 0$, avec $\alpha \neq 0$ possède deux racines w_1 , et w_2 (éventuellement identiques) que l'on obtient en se ramenant par la complétion babylonienne du carré à l'extraction d'une racine carrée.

Équation bi-quadratique : toute équation bi-quadratique $\alpha w^4 + \beta w^2 + \gamma = 0$, avec $\alpha \neq 0$ se résout en posant dans un premier temps $Z = w^2$, en résolvant pour Z puis en extrayant les racines carrées.

Racines n-ièmes par les coordonnées polaires : Si $z \neq 0$ alors il y a exactement n racines à l'équation $w^n = z$. Ce sont les nombres complexes dont les coordonnées polaires r et α sont telles que r^n et $n\alpha$ sont des coordonnées polaires pour z . Autrement dit $r = |z|^{\frac{1}{n}}$ et pour α on doit prendre $\frac{\theta}{n}$, ou $\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$, ou $\frac{\theta}{n} + 2\frac{2\pi}{n}$, ou $\frac{\theta}{n} + 3\frac{2\pi}{n}$, ..., ou $\frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$, avec θ une coordonnée angulaire fixée pour z . Les racines cubiques de 1 sont 1, j et \bar{j} , avec $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exponentielle complexe : Par définition $\exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y))$. On note aussi e^z au lieu de $\exp(z)$ de sorte que :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

L'écriture

$$z = \rho e^{i\theta}$$

avec $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ est équivalente à dire que ρ et θ sont les coordonnées polaires de z . En particulier :

$$e^{i\pi} = -1$$

On a la formule fondamentale :

$$\forall z, w \quad e^{z+w} = e^z e^w$$

Une exponentielle complexe n'est jamais nulle. Tout nombre complexe non-nul est l'exponentielle complexe d'une infinité d'autres nombres complexes : si w est solution

de $e^w = z$ alors les autres solutions sont les nombres complexes de la forme $w + k2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Si $z = \rho e^{i\theta}$ alors on peut prendre $w = \log(\rho) + i\theta$.

Formule de Moivre :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^N = \cos(N\theta) + i \sin(N\theta)$$

Théorème de d'Alembert-Gauss : toute équation polynomiale

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

de degré $n \geq 1$ ($a_n \neq 0$), à coefficients complexes (en particulier à coefficients réels), possède au moins une solution.

Nous avons montré comme corollaire que l'on peut trouver n nombres complexes uniques (pour « unique » en théorie on fait ça vendredi 10 janvier) z_1, \dots, z_n , éventuellement avec des répétitions d'un même nombre complexe dans la liste, qui sont tels que

$$\forall z \quad a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

On dit que les z_j sont les racines du polynôme. Ce sont exactement les nombres complexes où le polynôme s'annule. le nombre de fois qu'une racine apparaît est appelée la multiplicité de la racine. La factorisation ci-dessus est analogue (en plus simple peut-être) à la factorisation de tout nombre entier en un produit de nombres premiers et de ± 1 (élément inversible dans \mathbb{Z}).

5 Polynômes, fonctions polynomiales, division euclidienne, factorisation, en TRÈS bref

[pas le temps de discuter ici des fonctions polynomiales sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , voir vos notes de cours]

Nous avons défini la notion de polynôme à coefficients dans un anneau commutatif A quelconque. L'ensemble des polynômes à coefficients dans A est lui-même un anneau commutatif noté $A[X]$. Notion de degré. Lorsque l'anneau A est intègre, formule pour le degré d'un produit. Par convention $\deg(0) = -\infty$. Dorénavant dans ce chapitre nous supposons que A **est un corps** K , (ayez en tête \mathbb{Q} ou \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Les éléments inversibles de $K[X]$ sont exactement les polynômes de degré nul : autrement dit ce sont les éléments non nuls de K , vu comme étant des polynômes constants.

Il y a une notion de division euclidienne (rappel : K **est un corps**) : pour tout polynôme non-nul B et tout polynôme A il existe une écriture unique

$$A = QB + R$$

avec $\deg(R) < \deg(B)$. On appelle Q le quotient et R le reste dans la division euclidienne de A par B .

Par exemple si $B = X^k$ c'est extrêmement simple : on met dans R tous les monômes de degré $< k$ de A .

Si $B = (X - a)^k$, on fait une **substitution** : on pose $Y = X - a$, $X = Y + a$, on réécrit A comme un polynôme en Y , et on ne retient que les termes de degré $< k$ pour former le reste R . Comme R est exprimé comme polynôme en Y il faut ensuite resubstituer $Y = X - a$ pour trouver son expression comme polynôme en X .

Il y a aussi une autre méthode, qui s'applique disons lorsque l'on travaille dans $\mathbb{R}[X]$: on regarde la fonction polynomiale $f(x) = A(x)$. Comme $f(x) = Q(x)(x - a)^k + R(x)$ et que le degré de R est au plus $k - 1$, il n'est pas difficile de montrer $f(a) = R(a)$, $f'(a) = R'(a)$, ..., $f^{(k-1)}(a) = R^{(k-1)}(a)$. Ces dérivées suffisent à déterminer $R(x)$ (cette méthode mène à la résolution d'un système linéaire d'équations pour les coefficients de R et est donc déconseillée sauf pour $k = 1$, $k = 2$, voire $k = 3$).

Il y a une notion de divisibilité dans $K[X]$ tout-à-fait comme dans \mathbb{Z} . L'algorithme d'Euclide permet de calculer $\text{pgcd}(A, B)$: le dernier reste non nul D . On montre que ce D divise à la fois A et B et que tout autre polynôme E avec cette propriété en fait divise D . De plus on a une identité de Bezout qui affirme que D peut s'écrire de la forme $AU + BV$, $U, V \in K[X]$. Dans \mathbb{Z} on avait convenu que un $\text{pgcd}(a, b)$ était choisi toujours strictement positif, dans $K[X]$ on normalise D en le multipliant par un élément non nul de K de manière à rendre son terme de plus haut degré de la forme X^d , $d = \deg(D)$ (on dit que D est rendu unitaire). De même on a $\text{ppcm}(A, B)$ et la formule $\text{pgcd}(A, B)\text{ppcm}(A, B) = cAB$ avec un certain $c \in K$, $c \neq 0$.

On a une notion de polynôme irréductible (analogue des nombres premiers) : un polynôme P est dit irréductible si $\deg(P) > 0$ et si les seuls polynômes qui le divisent sont les constantes non nulles, et les $Q = cP$, $c \in K$, $c \neq 0$. On le dit normalisé, si il est unitaire. On montre le théorème de décomposition en un produit d'un inversible et d'un certain nombre de polynômes irréductibles normalisés ; existence, et unicité à l'ordre des facteurs près.

Dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

Dans $\mathbb{R}[X]$ ce sont d'une part les polynômes de degré 1, d'autre part les polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racines réelles.

Dans $\mathbb{Q}[X]$ il y a des professeurs qui sont payés pendant plusieurs décennies pour étudier les polynômes irréductibles qui apparaissent.

FIN DU PREMIER SEMESTRE

DEUXIÈME SEMESTRE

IX Développements Limités

1 Définitions

Pour une fonction polynomiale $f(x)$, à valeurs réelles, définie sur \mathbb{R} , de degré au plus n , on peut écrire :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

Un calcul simple mais crucial donne les formules suivantes :

$$c_0 = f(0), c_1 = f'(0), c_2 = \frac{f''(0)}{2}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

On notera que la formule $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ reste valable pour $k > n$ à condition de convenir que $c_k = 0$ pour $k > n$. On obtient la représentation :

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

où la somme est en fait une somme finie avec au plus $n + 1$ termes.

La question se pose alors naturellement de la validité d'une telle formule pour d'autres fonctions $f(x)$. Nous avons déjà, lors du premier semestre, obtenu des représentations de ce type pour $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(x)$ et même pour $1/(1+x)$, $\log(1+x)$, $\operatorname{Arctg}(x)$, cependant pour ces trois dernières uniquement pour $|x| < 1$.

Important : il faut connaître par coeur la série infinie qui apparaît pour chaque fonction de la liste précédente.

Les mathématiciens ont progressivement compris qu'il fallait décomposer le problème en deux étapes : d'une part l'approximation que l'on peut faire d'une fonction avec un nombre fini de termes, d'autre part la question de la convergence lorsque l'on prend un nombre de plus en plus grand de termes³. Ici, nous n'aborderons que la première question : soit $f(x)$ une fonction définie dans un voisinage de $x = 0$, et soit n un entier, peut-on alors trouver des nombres réels c_0, \dots, c_n tels que $f(x)$ soit à peu près $c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ dans un voisinage de $x = 0$?

Définition : on dit que la fonction polynomiale $P(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ est un développement limité à l'ordre n de la fonction $f(x)$ au point $x = 0$ si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0$$

3. cette question est fort subtile : la fonction $\exp(\frac{-1}{x^2})$ qui a été évoquée en amphi a sa série de Taylor en $a = 0$ identiquement nulle. Donc certes la série infinie converge pour tout x mais ne représente pas la fonction. D'autres exemples montrent que la série infinie peut ne converger parfois que pour $x - a = 0$.

Définition : on dit que la fonction polynomiale $P(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n$ est un développement limité à l'ordre n de la fonction $f(x)$ au point $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$$

On dira que $f(x)$ admet un développement limité à l'ordre n au point $x = a$ si on peut trouver (au moins) une fonction polynomiale $P(x)$ vérifiant la propriété ci-dessus.

Théorème : si la fonction $f(x)$ admet un développement limité à l'ordre n au point $x = a$, alors la fonction polynomiale $P(x)$ est unique.

Attention, lorsque l'on parle du « polynôme du développement limité au point a » on fait référence au polynôme abstrait $Q(T) = c_0 + c_1T + \dots + c_nT^n$. La « fonction polynomiale du développement limité » est alors $P(x) = Q(x-a)$. Par exemple pour répondre à la question « quelles sont les coefficients du polynôme du développement limité au point a » il faut donner c_0, c_1, \dots , et non pas les coefficients de $P(x) = Q(x-a)$ obtenus en développant par rapport à x , ce qui serait une chose absurde à faire puisque l'on regarde non pas ce qui se passe pour x petit mais pour $x-a$ petit.

On adoptera la notation suivante : pour $h \neq 0$ suffisamment petit on pose $\epsilon(h) = \frac{f(a+h) - P(a+h)}{h^n}$. Pour $h = 0$ on pose $\epsilon(0) = 0$. On peut donc écrire :

$$f(a+h) = P(a+h) + h^n \epsilon(h) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

Et réciproquement, si on peut trouver une fonction polynomiale $P(x)$ de degré au plus n et une fonction $\epsilon(h)$ continue en $h = 0$ avec $\epsilon(0) = 0$ et telle que

$$f(x) = P(x) + (x-a)^n \epsilon(x-a)$$

pour x dans un voisinage de a , alors c'est que $P(x)$ est le développement limité de f au point a à l'ordre n .

Comme le polynôme du développement limité si il existe est unique, on adopte une notation, par exemple $DL(f, a; n)$, de sorte que $f(a+h) = DL(f, a; n)(h) + h^n \epsilon(h)$. Parfois c'est à $P(x)$ que l'on veut donner une notation spéciale, par exemple $P_{f,a,n}(x)$. Ainsi $P_{f,a,n}(x) = DL(f, a; n)(x-a)$. On appelle la différence $f(x) - P(x)$ le reste, ou terme d'erreur. Je préfère ne pas tenter de choisir une notation. Noter cependant que l'écriture

$$f(x) = P(x) + (x-a)^n \epsilon(x-a)$$

est aussi appelée « développement limité de f en a » (alors que jusqu'à présent c'est seulement $P(x)$ que nous avons désigné ainsi ; parfois on fait donc référence à l'équation complète).

2 Formule de Taylor et Applications

Les deux théorèmes qui suivent sont fondamentaux :

Théorème de la formule de Taylor avec reste de Young : si f admet n dérivées en a (sous-entendu $n - 1$ dérivées dans un voisinage de a et $f^{(n)}(a)$ existe) alors le développement limité à l'ordre n au point a existe et prend la forme suivante, dite de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x-a), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

Théorème de la formule de Taylor avec reste de Lagrange : on fait des hypothèses plus fortes que pour Taylor-Young, à savoir on demande que f soit dérivable $n + 1$ fois en tout point d'un certain voisinage de a . La conclusion c'est que on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c = (1-\theta)a + \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

On notera que c est compris strictement entre a et x , c'est-à-dire $c = a$ si $x = a$, $a < c < x$ si $x > a$, $x < c < a$ si $x < a$.

Attention il peut y avoir plusieurs c (ou θ) qui marchent pour un x donné. La notation c_x est possible (de toute façon préférable à $c(x)$) mais il faut comprendre que l'on a aucun renseignement sur c_x si ce n'est qu'il est entre a et x . Pour une fonction telle $\cos(x)$ ou $\exp(x)$ la formule de Lagrange est très utile car elle permet de majorer explicitement en fonction de $|x - a|$ le terme d'erreur : en effet on calcule facilement toutes les dérivées, et par exemple pour $f(x) = \cos(x)$ on n'aura qu'à dire que $|f^{(n+1)}(c_x)| \leq 1$ quelle que puisse être la valeur de c_x . On notera d'ailleurs que bien que les hypothèses de la formule de Lagrange soient plus fortes que pour celles de Young, on ne peut aisément déduire celle de Young de celle de Lagrange que si l'on sait a priori que $f^{(n+1)}$ est bornée dans un voisinage de a . Cela sera le cas si cette fonction dérivée est continue en a . Choisissons alors $\eta > 0$ et M_{n+1} tels que $|f^{(n+1)}(y)| \leq M_{n+1}$ pour $|y - a| \leq \eta$. On a alors :

$$|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - P_{f,a,n}(x)| \leq \frac{M_{n+1}|x - a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ou encore avec la fonction $\epsilon(h) : |\epsilon(h)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|h|$ qui tend bien vers 0 lorsque h tend vers 0.

Lemme : soit $A(h)$ et $B(h)$ définies et dérivables pour $0 < h < K$, avec B et B' ne s'annulant pas dans $]0, K[$, et telles que $\lim_{h \rightarrow 0} A(h) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} B(h) = 0$. Alors :

$$\forall h \in]0, K[\quad \exists h_1 \quad 0 < h_1 < h \text{ et } \frac{A(h)}{B(h)} = \frac{A'(h_1)}{B'(h_1)}$$

On a le même lemme pour $h < 0$ avec alors $h < h_1 < 0$.

Démonstration du Lemme : On fixe $h > 0$ et on considère la fonction de k définie par la formule $C(k) = A(h)B(k) - B(h)A(k)$ pour $0 < k \leq h$ et $C(0) = 0$. Les hypothèses du Lemme de Rolle s'appliquent car $C(0) = C(h) = 0$ et on a donc $h_1 \in]0, h[$ avec $C'(h_1) = 0$.

Soit maintenant une fonction $f(x)$ satisfaisant les hypothèses de la formule de Taylor-Young et soit $P(x)$ le polynôme de Taylor à l'ordre n au point a . Posons $A(h) = f(a+h) - P(a+h)$ et $B(h) = \frac{h^n}{n!}$. La remarque fondamentale c'est que $A(0) = A'(0) = \dots = A^{(n-1)}(0)$ et de même pour $B(h)$ donc en appliquant le lemme plusieurs fois on obtient $h > h_1 > \dots > h_{n-1} > 0$ tels que

$$\frac{A(h)}{B(h)} = \frac{A'(h_1)}{B'(h_1)} = \dots = \frac{A^{(n-1)}(h_{n-1})}{B^{(n-1)}(h_{n-1})} = \frac{A^{(n-1)}(h_{n-1}) - A^{(n-1)}(0)}{h_{n-1}}$$

Le quotient différentiel tend vers $A^{(n)}(0)$ lorsque h tend vers 0 puisqu'alors h_{n-1} tend vers 0 (au lecteur : à rédiger proprement). Or $A^{(n)}(0) = f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) = 0$ car P a été construit de manière à ce que ses n premières dérivées soient identiques en a à celles de f . La conclusion c'est que

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(a+h) - P(a+h)}{\frac{h^n}{n!}} = 0$$

ce qu'il fallait montrer (on traitera de même pour $h < 0$) et établit la validité de la formule de Taylor-Young.

Pour la formule de Lagrange, on applique la même stratégie à

$$\frac{f(a+h) - P(a+h)}{\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}}$$

mais cette fois-ci on appliquera le Lemme $n+1$ fois. Le θ de la formule sera tel que $|h_{n+1}| = \theta|x-a|$. Les détails sont laissés au lecteur.

En amphi la démonstration de la formule de Taylor-Young a été donnée suivant une méthode différente, qui consistait essentiellement à établir directement l'important corollaire suivant :

Corollaire de la formule de Taylor-Young, position du graphe par rapport à la tangente : soit f définie dans un voisinage de a et vérifiant les hypothèses de Taylor-Young (pour un certain $n \geq 2$). Si de plus $f''(a) = f^{(3)}(a) = \dots = 0$ mais que $f^{(n)}(a) > 0$ alors : le graphe de la fonction f pour $a < x < a + \eta$, η suffisamment petit est strictement au-dessus de la tangente. Pour $a - \eta < x < a$ il est strictement au-dessus si n est pair, strictement en-dessous si n est impair. Si $f^{(n)}(a) < 0$ on échangera « au-dessus » avec « en-dessous ». Si n est impair on a donc un « point d'inflexion » : un point où le graphe traverse (tangentiellement) la droite tangente. Si n est pair et que $f'(a) = 0$ on a un minimum local en a si $f^{(n)}(a) > 0$, un maximum local en a si $f^{(n)}(a) < 0$.

Toutes ces informations se déduisent du fait que sous les hypothèses énoncées on a par la formule de Taylor-Young :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Les détails sont alors laissés au lecteur.

3 Règles de calcul

D'abord un warning : ce n'est pas parce que une fonction admet un développement limité à l'ordre n en a que ses dérivées existent en a jusqu'à l'ordre n . Tout ce que l'on peut dire c'est que les deux premiers coefficients du développement limité donnent correctement $f(a)$ et $f'(a)$ (autrement dit, si $n \geq 1$, f est continue en a et dérivable en a nécessairement) mais la fonction f n'est pas nécessairement dérivable deux fois en a même si elle admet un développement limité à un ordre supérieur à deux en a .

Challenge : illustrer la phrase précédente par un exemple.

On peut toujours tronquer un D.L. : si f a un D.L. à l'ordre n en a , elle en a aussi à l'ordre m pour tout $m \leq n$, il suffit de retenir les premiers termes du D.L. donné à l'ordre n .

Addition : si f a un D.L. à l'ordre n en a et g aussi en a mais à l'ordre n' , alors $f + g$ a un D.L. à l'ordre $\min(n, n')$ obtenu en faisant la somme terme à terme. Attention à ne pas conserver de termes au-delà de cet ordre, si $n \neq n'$.

Multiplication : si $f(x) = P(x) + (x - a)^n \epsilon_1(x - a)$, $g(x) = Q(x) + (x - a)^{n'} \epsilon_2(x - a)$ alors $f(x)g(x) = R(x) + (x - a)^{\min(n, n')} \epsilon_3(x - a)$ où $R(x)$ est obtenu en faisant le produit $P(x)Q(x)$ et en ne retenant que les termes jusqu'à l'ordre $\min(n, n')$ dans le développement en puissance de $x - a$. Autrement dit on tronque à l'ordre $\min(n, n')$ le produit $P(x)Q(x)$ vu comme polynôme de $x - a$. Pour $P(a)Q(a) \neq 0$ on fera attention au cas où l'on donne le D.L. de f à l'ordre n et celui de g à l'ordre n' , on ne pourra obtenir de D.L. pour fg que à l'ordre $\min(n, n')$. On peut donc commencer par tronquer à l'ordre $\min(n, n')$. Pour $P(a)$ ou $Q(a)$ nul, on peut obtenir un résultat précis au delà de l'ordre $\min(n, n')$; je vous laisse regarder ce qui se passe sur l'exemple $(x^2 - x^3 + x^4 + x^5 \epsilon_1(x))(x + x^2 + x^4 \epsilon_2(x)) = x^3 + x^6 + x^6 \epsilon_3(x)$. On avait f à l'ordre 5 et g à l'ordre 4 et on a tout de même fg à l'ordre 6 (dans cet exemple on a bien sûr $a = 0$).

Division : j'explique la règle pour $g(a) \neq 0$. Nous avons alors montré la chose suivante : si $f(x) = P(x) + (x - a)^n \epsilon_1(x - a)$ et si $g(x) = Q(x) + (x - a)^{n'} \epsilon_2(x - a)$ dans un voisinage de a avec $Q(a) \neq 0$ alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} + (x - a)^{\min(n, n')} \epsilon_3(x - a)$$

Il suffit donc pour compléter le calcul d'obtenir $DL(k, a; n)$ pour la fonction $k(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, ce que l'on fait par exemple par la méthode de la division par les puissances croissantes expliquée en cours.

Substitution : lorsque l'on recherche le D.L. d'une fonction composée $g(f(x))$ au point a . Il faut donc connaître le D.L. de $g(y)$ au point $b = f(a)$. La méthode est la suivante : on commence par écrire

$$\begin{aligned} f(a + h) &= b + c_1 h + \dots + c_n h^n + h^n \epsilon_1(h) \\ g(b + k) &= d + d_1 k + \dots + d_n k^n + k^n \epsilon_2(k) \end{aligned}$$

Puis on remplace k dans la deuxième formule par $c_1 h + \dots$, et on développe en puissance de h chaque puissance de k . Pour cette substitution on peut s'épargner

d'incorporer à k le terme $h^n \epsilon_1(h)$ puisque toutes ces contributions iront dans le terme d'erreur à la fin. On observe de plus que par exemple dans la contribution de k^2 il est inutile de conserver le terme $c_n h^n$ dans k , etc... On peut donc tout de suite écrire :

$$\begin{aligned} g(b+k) &= d + d_1(c_1 h + \dots + c_{n-2} h^{n-2} + c_{n-1} h^{n-1} + c_n h^n) \\ &\quad + d_2(c_1 h + \dots + c_{n-2} h^{n-2} + c_{n-1} h^{n-1})^2 \\ &\quad + d_3(c_1 h + \dots + c_{n-2} h^{n-2})^3 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + d_n c_1^n h^n + h^n \epsilon_3(h) \end{aligned}$$

Il faut alors expliciter chaque puissance en ne retenant que les termes d'ordre au plus n en h . Si c_1 est nul, alors il y a des simplifications supplémentaires ; par exemple pour obtenir un développement limité à l'ordre n pour $g(f(a+h))$ il suffira de l'avoir à l'ordre $[n/2]$ pour $g(b+k)$ puisque k sera déjà de l'ordre au plus deux en h . Il vaut mieux traiter au cas par cas que d'énoncer une règle générale.

4 Équivalents

Si la fonction $g(x)$ est définie dans un voisinage de 0 sauf peut-être en 0 et est partout non-nulle on écrit $f(x) \sim g(x)$ (sous-entendu lorsque x tend vers 0 ; il faut mieux le préciser explicitement : $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} g(x)$) si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Notions semblables lorsque $x \rightarrow a$ ou $x \rightarrow \infty$. Très souvent la fonction $f(x)$ est donnée et on cherche $g(x)$ de la forme $c \cdot x^r$, $r \in \mathbb{R}$, ou $g(x) = x \log(x)$, etc... On notera que écrire $f(x) \sim L$ est une autre façon d'écrire $\lim f(x) = L$, sauf que $L = 0$ est exclu d'une telle notation. Si $f_1(x) \sim c \cdot x^n$ et $f_2(x) \sim d \cdot x^m$ alors $f_1(x)f_2(x) \sim cd \cdot x^{n+m}$ et $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{c}{d} \cdot x^{n-m}$. On prendra note que ici $c \neq 0$, $d \neq 0$ et nécessairement $f_2(x) \neq 0$ dans un voisinage de 0, sauf peut-être en $x = 0$. Attention à l'addition : il n'y a de règle générale que si l'un des équivalents est « un infiniment petit » par rapport à l'autre. Par exemple si $f_1(x) \sim x$ et $f_2(x) \sim x^2$ alors $(f_1(x) + f_2(x)) \sim x$ (lorsque $x \rightarrow 0$: si l'équivalent est pour $x \rightarrow +\infty$ c'est x^2 qui l'emporte bien sûr). Ou encore si $f_1(x) \sim 1/x$ et $f_2(x) \sim 1/x^2$ alors $(f_1(x) + f_2(x)) \sim 1/x^2$. Ou encore si $f_1(x) \sim 1/x$ et $f_2(x) \sim \log x$ alors $(f_1(x) + f_2(x)) \sim 1/x$. Si $f_1(x) \sim 2x$ et $f_2(x) \sim cx$ alors on pourra affirmer $(f_1(x) + f_2(x)) \sim (c+2)x$ pour $c \neq -2$; par contre si $c = -2$ on ne peut rien dire de précis.

La notation « petit o » (c'est la lettre o pas un zéro !)

L'écriture des termes de reste dans les D.L. avec une fonction epsilon est pénible à la longue, avec tous ces numéros que l'on doit introduire à chaque étape, pour distinguer toutes les fonctions epsilon qui apparaissent. Ne pourrait-on remplacer ces epsilon par des petits points ? Non, c'est trop dangereux : $1/(1-h) = 1+h+\dots$, $1/(1+h) = 1-h+\dots$, $\cos(h) = 1-h^2/2+\dots$ donc $1/(1-h)+1/(1+h)+\cos(h) = 3-h^2/2+\dots$. Or le résultat correct est $3+3h^2/2+h^2\epsilon(h)$. La solution retenue est d'écrire $f(h) = o(h^n)$ dès que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^n} = 0$. Donc on écrit non plus $h^n \epsilon(h)$ mais $o(h^n)$. Attention il ne s'agit pas d'une notation ensembliste : $o(h^2)$ ne représente pas nécessairement une

fonction paire alors que $\epsilon(h^2)$ est une fonction paire. Comme un o ne représente pas une fonction, mais une propriété d'une fonction, il n'y a plus aucune raison de numéroter comme avec les epsilon. À condition de savoir ce que l'on fait, la notation en « petit o » est la meilleure (attention de ne pas écrire un grand O , qui a un sens différent).

X L'intégrale de Riemann

Bernhard Riemann, 1826-1866, un très grand mathématicien, mort de la tuberculose ; il a introduit plusieurs idées révolutionnaires en mathématiques et a aussi pensé profondément les rapports entre mathématiques et modélisation du monde naturel. Son héritage immensément vaste inclut entre autres choses une approche à la géométrie utilisée par Einstein pour la théorie de la gravitation, et de magnifiques découvertes sur les nombres premiers.

1 Premiers énoncés principaux

Dans ce chapitre les fonctions sont à valeurs réelles : pour une fonction à valeurs complexes on considère séparément $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. Soit donc f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle borné $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$. Nous supposons que f est **bornée**.⁴

On peut alors lui associer une intégrale inférieure $I_-(f)$ et une intégrale supérieure $I_+(f)$. On commence par quelques définitions : une subdivision \mathcal{A} c'est la donnée d'un nombre fini de points $a_0 = a, a_1, a_2, \dots, a_N = b$ avec $a_{j-1} < a_j$ pour $1 \leq j \leq N$. On peut mélanger deux subdivisions, ce qui en donne une troisième plus « fine ». Le j -ième intervalle de la subdivision c'est $I_j = [a_{j-1}, a_j]$ ⁵. Les nombres réels m_j et M_j sont définis selon $m_j = \inf_{x \in I_j} f(x)$ et $M_j = \sup_{x \in I_j} f(x)$. La somme de Darboux inférieure associée à \mathcal{A} c'est la quantité :

$$S_-(f, \mathcal{A}) = \sum_{1 \leq j \leq N} (a_j - a_{j-1})m_j$$

La somme de Darboux supérieure c'est :

$$S_+(f, \mathcal{A}) = \sum_{1 \leq j \leq N} (a_j - a_{j-1})M_j$$

On a donc toujours : $S_-(f, \mathcal{A}) \leq S_+(f, \mathcal{A})$. On montre en fait que pour deux subdivisions quelconques \mathcal{A} et \mathcal{B} on a toujours $S_-(f, \mathcal{A}) \leq S_+(f, \mathcal{B})$. Nous en donnerons une preuve plus loin. Donc :

$$\sup_{\text{tous les } \mathcal{A}} S_-(f, \mathcal{A}) = I_-(f) \leq I_+(f) = \inf_{\text{tous les } \mathcal{B}} S_+(f, \mathcal{B})$$

4. la théorie de Riemann procède en deux temps : d'abord on ne considère **que** les fonctions **bornées** sur les intervalles bornés ; ensuite on a une deuxième définition (intégrales « impropres »), par une limite, si l'intervalle est infini, ou si la fonction n'est pas bornée en a^+ ou en b^- .

5. on pourrait autoriser $a_{j-1} \leq a_j$; certains des I_j pourraient alors être vides.

On dira que la fonction (bornée) f est *intégrable au sens de Riemann* (ou plus simplement R-intégrable) sur l'intervalle $[a, b]$ si $I_-(f) = I_+(f)$. On appelle intégrale de Riemann de f la valeur commune, que l'on note temporairement ici $I(f)$ pour très rapidement adopter la notation $\int_a^b f(x)dx$ (nota bene : la lettre x peut être remplacée par n'importe quelle autre : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(u)du = \dots$).

Nous donnerons plus loin les preuves des affirmations suivantes :

- Toute fonction monotone est intégrable au sens de Riemann.
- Toute fonction continue est intégrable au sens de Riemann.
- Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ alors f est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$.
- Si la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ alors elle est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$ ($a < b < c$). De plus on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Si \mathcal{A} est une subdivision on appelle « pas de \mathcal{A} » la valeur maximale des $a_j - a_{j-1}$, $1 \leq j \leq n$. On la notera ici $\delta(\mathcal{A})$. On notera par ailleurs $\Delta(\mathcal{A})$ l'écart $S_+(f, \mathcal{A}) - S_-(f, \mathcal{A})$ entre la somme inférieure et la somme supérieure pour la subdivision \mathcal{A} . Clairement $\Delta(\mathcal{A}) < \epsilon \implies I_+(f) - I_-(f) < \epsilon$. De plus $\Delta(\mathcal{A}) < \epsilon \implies S_-(f, \mathcal{A}) > S_+(f, \mathcal{A}) - \epsilon \geq I_+(f) - \epsilon \geq I_-(f) - \epsilon$. De même $\Delta(\mathcal{A}) < \epsilon \implies S_+(f, \mathcal{A}) < I_+(f) + \epsilon$. Et dans l'autre sens si $I_-(f) - \epsilon < S_-(f, \mathcal{A})$ et $S_+(f, \mathcal{A}) < I_+(f) + \epsilon$ alors $\Delta(\mathcal{A}) < 2\epsilon + I_+(f) - I_-(f)$.

Théorème : Si f est R-intégrable alors quel que soit $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que toute subdivision \mathcal{A} avec $\delta(\mathcal{A}) \leq \delta$ vérifie :

$$I(f) - \epsilon \leq S_-(f, \mathcal{A}) \leq I(f) \leq S_+(f, \mathcal{A}) \leq I(f) + \epsilon$$

La démonstration n'est pas immédiate : nous la verrons plus loin.

À toute subdivision \mathcal{A} et tout choix subordonné $\underline{\xi} = (\xi_j)_{1 \leq j \leq N}$ de points ξ_j , c'est-à-dire $\xi_j \in I_j$ pour $1 \leq j \leq N$, on associe la **somme de Riemann** :

$$S(f, \mathcal{A}, \underline{\xi}) = \sum_{1 \leq j \leq N} (a_j - a_{j-1})f(\xi_j)$$

On a toujours :

$$S_-(f, \mathcal{A}) \leq S(f, \mathcal{A}, \underline{\xi}) \leq S_+(f, \mathcal{A})$$

Soit $\epsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ ayant la propriété du Théorème pour ce ϵ . Si $\delta(\mathcal{A}) \leq \delta$ alors $S(f, \mathcal{A}, \underline{\xi})$, qui est entre $S_-(f, \mathcal{A})$ et $S_+(f, \mathcal{A})$, appartient à l'intervalle $[I(f) - \epsilon, I(f) + \epsilon]$. Donc :

$$\delta(\mathcal{A}) \leq \delta \implies |S(f, \mathcal{A}, \underline{\xi}) - I(f)| \leq \epsilon$$

On a ainsi le théorème suivant :

Théorème : Soit f intégrable au sens de Riemann. Si on choisit des subdivisions $\mathcal{A}^{(n)}$, $n \geq 1$, sous la seule contrainte que $\delta(\mathcal{A}^{(n)})$ tende vers zéro lorsque n tend vers l'infini, alors quels que soient les choix pour chaque $\mathcal{A}^{(n)}$ des points subordonnés

$\xi_j^{(n)}$, $1 \leq j \leq N^{(n)}$, les sommes de Riemann associées convergent vers l'intégrale de Riemann de f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{A}^{(n)}) = 0 \Rightarrow I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{A}^{(n)}, \underline{\xi}^{(n)})$$

Ce théorème permet de comprendre la notation $\int_a^b f(x)dx$: le symbole \int est une lettre S stylisée, comme dans « Somme », le dx représente les accroissements $a_j - a_{j-1}$, et $f(x)dx$ est donc là pour rappeler $f(\xi_j)(a_j - a_{j-1})$, $\xi_j \in [a_{j-1}, a_j]$.

En particulier on a, si f est R-intégrable :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{N}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{N}\right) + \dots + f\left(a + (N-1)\frac{b-a}{N}\right) \right)$$

car on a utilisé ici les subdivisions « équidistantes » dont le pas $\frac{b-a}{N}$ tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini.

Si on prend la fonction très bizarre sur $[0, 1]$ ($a = 0$, $b = 1$) qui vaut 1 si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon, alors les sommes de Riemann simples ci-dessus valent toutes 1 et donc convergent. Pourtant si entre $a_{j-1} = \frac{j-1}{N}$ et $a_j = \frac{j}{N}$ on choisit ξ_j irrationnel, ce qui est toujours possible (par exemple $\xi_j = \frac{j-1}{N} + \frac{\sqrt{2}-1}{N}$), on obtient d'autres sommes de Riemann, qui seront elles toutes nulles. Si la fonction était intégrable au sens de Riemann la limite devrait être la même dans les deux cas, ce qui n'est pas le cas. Cette fonction bizarre n'est donc pas intégrable au sens de Riemann.

2 Quelques démonstrations

Regardons ce qui se passe lorsque l'on ajoute un point α à une subdivision \mathcal{A} pour obtenir la subdivision \mathcal{A}' . Si α coïncide avec l'un des a_j on n'a rien changé. Sinon on a $a_{j-1} < \alpha < a_j$ pour l'un des j . La somme de Darboux inférieure associée à \mathcal{A}' diffère de celle associée à \mathcal{A} par le fait que $(\alpha - a_{j-1}) \inf_{a_{j-1} \leq x \leq \alpha} f(x) + (a_j - \alpha) \inf_{\alpha \leq x \leq a_j} f(x)$ remplace $(a_j - a_{j-1})m_j$. Or certainement $\inf_{a_{j-1} \leq x \leq \alpha} f(x) \geq m_j$ puisque $m_j = \inf_{a_{j-1} \leq x \leq a_j} f(x)$. De même $\inf_{\alpha \leq x \leq a_j} f(x) \geq m_j$. Donc $S_-(f, \mathcal{A}') \geq S_-(f, \mathcal{A})$. Si on itère on obtient que si \mathcal{C} est obtenue à partir de \mathcal{A} en ajoutant un nombre fini de points alors nécessairement $S_-(f, \mathcal{C}) \geq S_-(f, \mathcal{A})$. Par contre on se convainc que c'est le contraire qui se passe pour les sommes supérieures : $S_+(f, \mathcal{C}) \leq S_+(f, \mathcal{A})$.

Maintenant soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux subdivisions quelconques. Formons \mathcal{C} en combinant les points utilisés dans \mathcal{A} et dans \mathcal{B} . Comme \mathcal{C} est « plus fine » que (ou égale à) \mathcal{A} on a $S_-(f, \mathcal{C}) \geq S_-(f, \mathcal{A})$ car on peut imaginer passer de \mathcal{A} à \mathcal{C} en lui ajoutant un par un des points supplémentaires distincts des précédents. Comme \mathcal{C} est « plus fine » que \mathcal{B} on a $S_+(f, \mathcal{C}) \leq S_+(f, \mathcal{B})$. Ainsi $S_-(f, \mathcal{A}) \leq S_-(f, \mathcal{C}) \leq S_+(f, \mathcal{C}) \leq S_+(f, \mathcal{B})$ et donc :

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \quad S_-(f, \mathcal{A}) \leq S_+(f, \mathcal{B})$$

Soit alors E le sous-ensemble de \mathbb{R} de toutes les valeurs possibles pour les sommes inférieures $S_-(f, \mathcal{A})$ associées à toutes les subdivisions possibles \mathcal{A} et soit F le sous-ensemble de \mathbb{R} de toutes les valeurs possibles pour les sommes supérieures $S_+(f, \mathcal{B})$

associées à toutes les subdivisions possibles \mathcal{B} . Tout élément de F est un majorant de E donc au moins égal à $\sup E$. Ce nombre $\sup E$ est donc un minorant de F donc au plus égal à $\inf F$. En définissant $I_-(f) = \sup E$ et $I_+(f) = \inf F$ on a donc :

$$I_-(f) \leq I_+(f)$$

Montrons qu'il y a égalité si f est croissante sur l'intervalle $[a, b]$. Notons d'abord que la fonction f est bien bornée puisque $\forall x \ f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Prenons la subdivision \mathcal{A}_N à pas constant $\frac{b-a}{N}$. Dans chaque I_j comme f est croissante on aura $m_j = f(a_{j-1})$ et $M_j = f(a_j)$ de sorte que :

$$S_-(f, \mathcal{A}_N) = \frac{b-a}{N} \left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{N}\right) + \cdots + f\left(a + (N-1)\frac{b-a}{N}\right) \right)$$

$$S_+(f, \mathcal{A}_N) = \frac{b-a}{N} \left(f\left(a + \frac{b-a}{N}\right) + \cdots + f\left(a + (N-1)\frac{b-a}{N}\right) + f(b) \right)$$

Donc $\Delta(\mathcal{A}_N) = \frac{b-a}{N}(f(b) - f(a))$. Ainsi :

$$\forall N \geq 1 \quad I_+(f) - I_-(f) \leq \frac{b-a}{N}(f(b) - f(a))$$

ce qui en faisant tendre N vers $+\infty$ donne $I_+(f) = I_-(f)$. Donc f est bien intégrable au sens de Riemann.

Avant de montrer que cela marche aussi dans le cas où f est une fonction continue, nous attaquons la démonstration du difficile théorème avec ϵ et δ .

Soit f une fonction R-intégrable. Elle est donc bornée par hypothèse, on notera $M = \sup f$ et $m = \inf f$. Réexaminons ce qui se passe lorsque l'on ajoute un point α à une subdivision \mathcal{A} pour obtenir \mathcal{A}' . On a :

$$S_-(f, \mathcal{A}') - S_-(f, \mathcal{A}) = (\alpha - a_{j-1}) \inf_{a_{j-1} \leq x \leq \alpha} f(x) + (a_j - \alpha) \inf_{\alpha \leq x \leq a_j} f(x) - (a_j - a_{j-1})m_j$$

On minore m_j par m et on majore les deux autres inf par M , ce qui donne :

$$(0 \leq) S_-(f, \mathcal{A}') - S_-(f, \mathcal{A}) \leq (a_j - a_{j-1})(M - m) \leq \delta(\mathcal{A})(M - m)$$

Supposons que l'on passe alors de \mathcal{A} à \mathcal{B} en K étapes, on aura (puisque $\delta(\mathcal{A})$ majore les pas de chacune des subdivisions intermédiaires entre \mathcal{A} et \mathcal{B}) :

$$S_-(f, \mathcal{B}) \leq S_-(f, \mathcal{A}) + K\delta(\mathcal{A})(M - m)$$

On prouve de même

$$S_+(f, \mathcal{B}) \geq S_+(f, \mathcal{A}) - K\delta(\mathcal{A})(M - m)$$

et donc

$$\Delta(\mathcal{B}) \geq \Delta(\mathcal{A}) - 2K\delta(\mathcal{A})(M - m)$$

lorsque \mathcal{B} est obtenu en ajoutant au plus K points à \mathcal{A} .

Soit $\epsilon > 0$. Il existe \mathcal{C}_1 avec $I(f) - \epsilon \leq S_-(f, \mathcal{C}_1) \leq I(f)$ et \mathcal{C}_2 avec $I(f) \leq S_+(f, \mathcal{C}_2) \leq I(f) + \epsilon$. En combinant \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 en une seule subdivision plus fine \mathcal{C} on aura donc $I(f) - \epsilon \leq S_-(f, \mathcal{C}) \leq S_+(f, \mathcal{C}) \leq I(f) + \epsilon$. Soit K le nombre de points de \mathcal{C} . Soit \mathcal{A} quelconque et formons \mathcal{B} en ajoutant à \mathcal{A} les K points de \mathcal{C} . On aura

$$\Delta(\mathcal{A}) \leq \Delta(\mathcal{B}) + 2K(M - m)\delta(\mathcal{A}) \leq 2\epsilon + 2K(M - m)\delta(\mathcal{A})$$

On a utilisé l'astuce que comme \mathcal{B} est plus fine que \mathcal{C} on a $\Delta(\mathcal{B}) \leq \Delta(\mathcal{C}) \leq 2\epsilon$.

En prenant $\delta > 0$ suffisamment petit on peut donc imposer $\Delta(\mathcal{A}) \leq 3\epsilon$ pour tout \mathcal{A} avec $\delta(\mathcal{A}) \leq \delta$, ce qu'il fallait montrer au 3 près qui n'est pas important (on prendra le δ qui marche pour $\epsilon/3$). On remarque que le point crucial dans cette preuve c'est que l'entier K ne dépend que de ϵ , via le choix de \mathcal{C} , ce qui est complètement indépendant de \mathcal{A} . Le théorème epsilon-delta est démontré.

3 Fonctions continues

Pour montrer la R-intégrabilité des fonctions continues, on procède de la manière suivante, déjà expliquée en amphi, donc je serai bref. Soit f continue sur $[a, b]$ et soit $\epsilon > 0$. Si pour tout x on a $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ on pose $a_1 = b$. Sinon il existe x avec $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$ et par le théorème des valeurs intermédiaires il existe y avec $|f(y) - f(a)| = \epsilon$. On prend a_1 égal au infimum de tous ces y . En utilisant la continuité de f on constate que a_1 vérifie $|f(a_1) - f(a)| = \epsilon$. Donc $a_1 > a$ et pour tout $x \in [a, a_1]$ on a $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$. Si $a_1 < b$ on réitère à partir de a_1 , obtenant ainsi a_2, a_3, \dots

Cela peut-il continuer indéfiniment? Non, car sinon on aurait une suite croissante (a_j) donc convergente. Soit L sa limite. Comme f est continue et que $|f(a_{j+1}) - f(a_j)| = \epsilon$ on obtient en passant à la limite $|f(L) - f(L)| = \epsilon$. Contradiction.

Donc au bout d'un nombre fini d'étapes on finit par avoir $a_N = b$. Remarquons que cela permet de voir que f est bornée sur l'intervalle $[a, b]$ (ce que l'on savait déjà par le Théorème du Maximum). Les points a_j définissent une subdivision \mathcal{A} . Majorons $\Delta(\mathcal{A})$: dans chaque intervalle I_j de la subdivision on a $f(a_{j-1}) - \epsilon \leq f(x) \leq f(a_{j-1}) + \epsilon$, donc $f(a_{j-1}) - \epsilon \leq m_j \leq M_j \leq f(a_{j-1}) + \epsilon$ donc $M_j - m_j \leq 2\epsilon$. Ainsi :

$$\Delta(\mathcal{A}) \leq 2(b - a)\epsilon$$

Cela prouve $I_+(f) - I_-(f) \leq 2(b - a)\epsilon$ mais comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, c'est que $I_+(f) = I_-(f)$. La fonction continue f est bien intégrable au sens de Riemann.

En amphi, nous avons utilisé les points spéciaux a_j pour prouver que la fonction f est *uniformément continue* :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in [a, b] \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Cela dépend crucialement du fait que l'intervalle $[a, b]$ est fermé : la fonction $1/x$ sur $]0, 1]$ n'est pas uniformément continue.

Nous avons donc presque tout démontré ce qui était énoncé. Il nous reste juste deux ou trois bricoles. Supposons que f soit R-intégrable sur $[a, b]$ et soit $[c, d] \subset [a, b]$.

Certainement f est à nouveau bornée sur $[c, d]$. Soit $\epsilon > 0$ et soit \mathcal{A} une subdivision de $[a, b]$ telle que l'écart entre sa somme supérieure et sa somme inférieure est au plus ϵ . On peut ajouter les points c et d à \mathcal{A} ce qui ne peut que diminuer cet écart. Finalement soit \mathcal{B} la subdivision de $[c, d]$ obtenue en ne retenant des points de \mathcal{A} que ceux dans cet intervalle. Un moment de réflexion montre que l'écart entre la somme inférieure et la somme supérieure pour \mathcal{B} sur l'intervalle $[c, d]$ est majoré par l'écart pour \mathcal{A} sur $[a, b]$ donc par ϵ . Comme ϵ est arbitraire les intégrales inférieure et supérieure de f sur $[c, d]$ coïncident, ce qu'il fallait montrer.

Si on suppose que f est R-intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ alors d'abord elle est clairement aussi bornée sur $[a, c]$ ($a < b < c$). Puis en prenant une subdivision de $[a, c]$ contenant le point b et suffisamment fine dans chacun des sous-intervalles $[a, b]$ et $[b, c]$ on rend l'écart entre sommes inférieure et supérieure sur $[a, c]$ arbitrairement petit. Donc f est R-intégrable sur $[a, c]$ tout entier. En ce qui concerne la formule $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ pour $a < b < c$ il suffit de prendre des sommes de Riemann pour des subdivisions contenant le point intermédiaire b et de passer à la limite lorsque que le pas tend vers zéro.

4 Relation de Chasles, linéarité, positivité

Notons en préalable la formule utilisée constamment $\int_a^b 1 \cdot dx = b - a$, immédiate en prenant la limite de sommes de Riemann, car elles valent toutes $b - a$ pour la fonction constante 1.

On conviendra que $\int_a^a f(x)dx = 0$ quelque soit f (définie au point a). Et on posera $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ si $b \geq a$. On a alors pour tout a, b, c , contenus dans un intervalle où f est R-intégrable, quel que soit l'ordre :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

ce qui constitue la **Relation de Chasles**.

Si f est R-intégrable alors il est évident que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction λf est R-intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

Si f et g sont R-intégrables alors $f + g$ l'est aussi. D'abord elle est certainement bornée. Ensuite soit $\epsilon > 0$. Prenons \mathcal{A} avec $\Delta_f(\mathcal{A}) \leq \epsilon$ (notation auto-explicative) et \mathcal{B} avec $\Delta_g(\mathcal{B}) \leq \epsilon$. Combinons en une seule subdivision \mathcal{C} on aura à la fois $\Delta_f(\mathcal{C}) \leq \epsilon$ et $\Delta_g(\mathcal{C}) \leq \epsilon$. Sur le j -ième intervalle on a $m_j(f) \leq f(x) \leq M_j(f)$ et $m_j(g) \leq g(x) \leq M_j(g)$ donc $m_j(f) + m_j(g) \leq f(x) + g(x) \leq M_j(f) + M_j(g)$ donc $m_j(f + g) \geq m_j(f) + m_j(g)$ et $M_j(f + g) \leq M_j(f) + M_j(g)$ donc $M_j(f + g) - m_j(f + g) \leq (M_j(f) - m_j(f)) + (M_j(g) - m_j(g))$ donc $\Delta_{f+g}(\mathcal{C}) \leq \Delta_f(\mathcal{C}) + \Delta_g(\mathcal{C}) \leq 2\epsilon$. Comme ϵ est arbitraire c'est que $f + g$ est R-intégrable. En utilisant une somme de Riemann on obtient la formule de **linéarité** :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Si f est \mathbb{R} -intégrable et à valeurs positives ou nulles alors son intégrale est positive ou nulle (propriété de **positivité**) : immédiat en écrivant l'intégrale comme une limite de somme de Riemann. Plus généralement :

$$\forall x \ f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

On appelle cela la propriété de **monotonie** de l'intégrale de Riemann. ATTENTION : $a \leq b$ dans cette inégalité ! On utilise aussi souvent la conséquence (attention ici aussi $a \leq b$) :

$$\forall x \quad m \leq f(x) \leq M \quad \Rightarrow \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Si f est \mathbb{R} -intégrable alors $|f|$ l'est aussi. Preuve : On va utiliser pour cela l'inégalité $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Exercice : montrer pour toute fonction bornée $(\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x)) - (\inf_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x)) = \sup_{\alpha \leq x, y \leq \beta} |f(x) - f(y)|$. En déduire $\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x)| - \inf_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x)| \leq \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) - \inf_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x)$. En déduire que pour toute subdivision $\Delta_{|f|}(\mathcal{A}) \leq \Delta_f(\mathcal{A})$. Conclure.

Comme la fonction $|f| - f$ est à valeurs positives ou nulles on a $\int_a^b |f(x)|dx \geq \int_a^b f(x)dx$ et comme la fonction $|f| + f$ est à valeurs positives ou nulles on a $\int_a^b |f(x)|dx \geq -\int_a^b f(x)dx$ d'où :

$$a \leq b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

La formule à utiliser si on ne sait pas $a \leq b$ est : $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

5 Autres propriétés de l'intégrale de Riemann

Si on modifie f en un nombre fini de points elle reste \mathbb{R} -intégrable et $\int_a^b f(x)dx$ reste identique ! Je vous laisse cette affirmation comme un excellent exercice : il suffit (pourquoi ?) de traiter les fonction f nulles sauf en un nombre fini de points. . .

Si f et g sont toutes deux \mathbb{R} -intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ alors il en est de même de fg : tout d'abord ce produit est bien borné. Ensuite, nous commençons par observer qu'il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto (f(x) + C)g(x)$ est \mathbb{R} -intégrable, pour une constante C choisie arbitrairement. En effet $f(x)g(x) = (f(x) + C)g(x) - Cg(x)$ et on sait déjà que toute combinaison linéaire de fonctions \mathbb{R} -intégrables est \mathbb{R} -intégrable. On prendra C de sorte que $\forall x \ f(x) + C \geq 0$. De même il suffit de montrer que $(f(x) + C)(g(x) + D)$ est \mathbb{R} -intégrable, avec un D quelconque : on le prendra de sorte que $\forall x \ g(x) + D \geq 0$. On notera que tout cela est possible parce que par hypothèse les fonctions f et g sont bornées (ce qui fait partie des conditions pour être \mathbb{R} -intégrable). En fin de compte, quitte à remplacer f par $f + C$ et g par $g + D$, on pourra supposer $f \geq 0$ et $g \geq 0$. En utilisant les notations de la note précédente, on a sur le j ème intervalle d'une subdivision \mathcal{A} quelconque :

$$0 \leq m_j(f) \leq f(x) \leq M_j(f) \quad 0 \leq m_j(g) \leq g(x) \leq M_j(g)$$

Ainsi (notez bien que c'est grâce aux $0 \leq \dots$ que l'on a le droit) :

$$m_j(f)m_j(g) \leq f(x)g(x) \leq M_j(f)M_j(g)$$

d'où :

$$m_j(f)m_j(g) \leq m_j(fg) \leq M_j(fg) \leq M_j(f)M_j(g)$$

Or $M_j(f)M_j(g) - m_j(f)m_j(g) = (M_j(f) - m_j(f))M_j(g) + m_j(f)(M_j(g) - m_j(g))$
donc

$$0 \leq M_j(fg) - m_j(fg) \leq (M_j(f) - m_j(f)) \sup(g) + (M_j(g) - m_j(g)) \sup(f)$$

On a, bien sûr, noté $\sup(f)$ et $\sup(g)$ les bornes supérieures respectives de f et de g sur $[a, b]$. Si on prend maintenant \mathcal{A} de sorte que $\Delta_f(\mathcal{A}) \leq \epsilon$ et $\Delta_g(\mathcal{A}) \leq \epsilon$, on en déduit

$$\Delta_{fg}(\mathcal{A}) \leq (\sup(f) + \sup(g))\epsilon$$

Cela montre que l'on peut choisir \mathcal{A} de sorte à rendre $\Delta_{fg}(\mathcal{A})$ arbitrairement petit : autrement dit on a prouvé la R-intégrabilité de la fonction fg .

Supposons que f soit R-intégrable sur $[a, b]$ et aussi sur $[b, c]$: alors elle est R-intégrable sur $[a, c]$. Plus généralement si on peut subdiviser $[a, b]$ en intervalles et que sur chacun f est R-intégrable, alors elle est intégrable sur $[a, b]$, et son intégrale est la somme des intégrales sur les sous-intervalles.

On peut aussi ajouter (exercice !) que si f est bornée et R-intégrable sur chaque $[a + \eta, b]$ ($\eta > 0$) alors elle est R-intégrable sur $[a, b]$.

La fonction $\mathbf{1}_{[a,x]}(t)$ qui est définie comme prenant la valeur 1 pour $a \leq t \leq x$ et 0 pour $t > x$ (avec x fixé, dans l'intervalle $[a, b]$), est R-intégrable. On vérifie que pour toute fonction $f(t)$ qui est R-intégrable sur $[a, b]$, sa restriction à $[a, x]$ est aussi R-intégrable et

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^b \mathbf{1}_{[a,x]}(t)f(t)dt$$

6 Fonctions en escalier

On dit que f est en escalier si on peut trouver une subdivision \mathcal{A} telle que f soit constante sur chaque $]x_{j-1}, x_j[$, $1 \leq j \leq N$. Les valeurs de f aux x_j sont arbitraires. Par la relation de Chasles, la fonction f est intégrable au sens de Riemann et $I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_j (x_j - x_{j-1})f(\xi_j)$ où ξ_j est choisi arbitraire dans $]x_{j-1}, x_j[$. Mais les sommes de Darboux $S_-(f, \mathcal{A})$ et $S_+(f, \mathcal{A})$, telles que nous les avons définies sont affectées par les valeurs $f(x_j)$. Pour diminuer leur influence on prend $\epsilon > 0$ et on dédouble les x_j en $x_j \pm \epsilon$ (tandis que a devient a et $a + \epsilon, \dots$), ce qui donne (vérifier) des subdivisions \mathcal{A}_ϵ telles que $S_+(f, \mathcal{A}_\epsilon) - S_-(f, \mathcal{A}_\epsilon) \leq (4N \sup |f|) \epsilon$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire ceci confirme la R-intégrabilité de la fonction en escalier f .

Soit f une fonction R-intégrable, soit \mathcal{A} une subdivision quelconque. On considère la fonction en escalier U qui vaut $m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$ sur $]x_{j-1}, x_j[$ et vaut $\inf_{[a,b]} f$ aux points x_j . Cette fonction en escalier U vérifie $\forall x U(x) \leq f(x)$. De plus $\int_a^b U(x)dx$ est

exactement identique avec la somme de Darboux inférieure $S_-(\mathcal{A}, f)$. De même si on définit V comme valant $M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$ sur $]x_{j-1}, x_j[$ et $\sup_{[a, b]} f$ aux points x_j , alors $\forall x f(x) \leq V(x)$ et $S_+(\mathcal{A}, f) = \int_a^b V(x) dx$. On peut donc, si f est R-intégrable, trouver pour tout $\epsilon > 0$ donné U et V en escaliers telles que $\forall x U(x) \leq f(x) \leq V(x)$ et $\int_a^b (V(x) - U(x)) dx \leq \epsilon$.

Réciproquement, si $U \leq f$ alors certainement les sommes de Darboux inférieures pour U minorent celles pour f donc $\int_a^b U(x) dx \leq I_-(f)$, et si par ailleurs $V \geq f$ alors les sommes de Darboux supérieures pour V majorent celles pour f donc $\int_a^b V(x) dx \geq I_+(f)$. Donc $I_+(f) - I_-(f) \leq \int_a^b V(x) dx - \int_a^b U(x) dx$ à chaque fois que $U \leq f \leq V$. Si on peut rendre $\int_a^b (V(x) - U(x)) dx$ plus petit que tout $\epsilon > 0$ c'est donc que f est R-intégrable.

On a donc caractérisé les fonctions R-intégrales (réelles) comme étant les fonctions que l'on peut encadrer par deux fonctions en escalier U et V de sorte que $\int_a^b (V(x) - U(x)) dx$ soit arbitrairement petit.

Que cette condition soit suffisante n'utilise pas que U et V sont en escaliers : la même preuve montre que f est R-intégrable si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver U et V Riemann intégrables avec d'une part $\int_a^b (V(x) - U(x)) dx \leq \epsilon$ et d'autre part $U \leq f \leq V$.

En particulier si f est la limite **uniforme** d'une suite de fonctions f_n R-intégrables alors elle est R-intégrable. En effet pour tout $\epsilon > 0$ et pour $N \gg 1$ on $f_N - \epsilon \leq f \leq f_N + \epsilon$ et $2(b - a)\epsilon$ est arbitrairement petit.

7 Les théorèmes fondamentaux du Calcul

Le Théorème suivant est important :

Théorème : Si f est R-intégrable sur $[a, b]$ alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une fonction continue de x sur $[a, b]$.

Le Théorème suivant est fondamental (en a ou en b , lire continuité ou dérivabilité « à droite » ou « à gauche » suivant le cas) :

Théorème : Si f est R-intégrable sur $[a, b]$ et si x_0 est un point de continuité de f alors la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable au point x_0 et on a :

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Son corollaire (existence de primitives) est souvent appelé « Théorème fondamental du calcul » :

Théorème fondamental du Calcul : *Si f est continue sur $[a, b]$ alors la fonction*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a, b]$ et on a :

$$\forall x \in [a, b] \quad F'(x) = f(x)$$

Autrement dit, lorsque f est continue :

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

On notera soigneusement le signe moins qui apparaît lorsque l'on dérive par rapport à l'autre borne d'intégration :

$$\frac{d}{dx} \int_x^b f(t)dt = -f(x)$$

Avec les définitions à l'oeuvre dans la formule de Chasles, ces relations sont vraies que x soit inférieur ou supérieur à a ou à b , sous la contrainte bien sûr que f soit définie et continue sur tout l'intervalle allant de x à l'autre borne fixée.

Nous voyons donc que toute fonction continue admet une primitive. Cela peut être une approche justifiant l'existence de la fonction logarithme : $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \dots$ Mais comme vous l'avez vu en faisant la nuit des centaines de calculs d'intégrales, on utilise la plupart du temps ce théorème dans le sens contraire : pour calculer l'intégrale d'une fonction on en recherche une primitive, par exemple en consultant des tables de dérivées. La formule fondamentale est alors :

$$\text{si } F' = f : \quad \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Pour la preuve à partir du Théorème fondamental, on remarque que la formule est certainement vraie pour la primitive particulière $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, et donc pour toute primitive car elle ne diffère de celle là que par une constante additive.

Cet argument suppose la fonction f continue. En fait la formule est valable sous la seule hypothèse que $f = F'$ est Riemann-intégrable :

Deuxième Théorème fondamental du Calcul : *si f est R-intégrable sur $[a, b]$ et si elle admet une primitive F alors :*

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

De manière équivalente : si la fonction dérivable F a une dérivée $f = F'$ qui est R-intégrable alors la formule vaut.

Preuve : soit $N \geq 1$ et posons $x_j = a + j \frac{b-a}{N}$ pour $0 \leq j \leq N$. On écrit $F(b) - F(a) = (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \dots + (F(x_N) - F(x_{N-1}))$, et on applique le théorème des accroissements finis à chaque terme ; on voit donc apparaître une somme de Riemann pour $f = F'$. On fait tendre N vers l'infini, et on utilise l'hypothèse que f est R-intégrable pour conclure.

8 La formule d'intégration par parties

Nous l'énoncerons pour deux fonctions C^1 , $F(x)$ et $G(x)$:

$$\int_a^b F(x)G'(x) dx = [FG]_a^b - \int_a^b F'(x)G(x) dx$$

La preuve : FG est une primitive de $FG' + F'G$.

9 Les deux formules de changement de variable

Dans la première formule on remplace la variable d'intégration t par une nouvelle variable u dont t est fonction. Autrement dit on fait une substitution.

Théorème : Soit f une fonction continue sur un domaine de définition D et soit a et b tels que $[a, b] \subset D$ (ou $[b, a] \subset D$ si $b < a$). Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ (ou $[\beta, \alpha]$) avec

$$\phi(\alpha) = a \quad \phi(\beta) = b \quad \phi([\alpha, \beta]) \subset D$$

Alors on a (rappel : $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$) :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du$$

On notera bien que la convention usuelle est à l'oeuvre lorsque les bornes d'intégration sont « dans un ordre inversé ». Dans ce type de changement de variables les valeurs prises par $\phi(u)$ peuvent tout-à-fait sortir de $[a, b]$ et il peut y avoir plusieurs u qui correspondent au même t . Par exemple $\int_0^{1/2} dt = \int_{9\pi}^{13\pi/6} \cos(u)du$ (ici $t = \sin(u)$, $dt = \cos(u)du$).

Dans le deuxième type de changement de variable, on remplace t par une nouvelle variable v qui est fonction $\psi(t)$ de t . Mais alors on doit exiger que ψ n'expédie sur un même v que *un seul* t . Pour exprimer cela de la manière la plus simple possible, on exige que ψ soit C^1 et que $\psi'(t)$ ait un signe constant : ou bien pour tout t , $\psi'(t) > 0$ auquel cas ψ est continue, strictement croissante et établit une bijection de $[a, b]$ sur $[\psi(a), \psi(b)]$, ou bien pour tout t $\psi'(t) < 0$ auquel cas ψ est continue, strictement décroissante et établit une bijection de $[a, b]$ sur $[\psi(b), \psi(a)]$ (pour simplifier j'ai pris $a < b$ ici). Dans les deux cas on a la formule donnée par le théorème suivant :

Théorème : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$ si $b < a$). Soit ψ une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ dont la dérivée est partout non-nulle (donc ψ est soit strictement croissante, soit strictement décroissante). Alors on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\psi^{-1}(v)) \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(v))} dv$$

La formule paraît assez terrifiante mais elle est très simple dans la pratique. On écrit : $v = \psi(t)$, $dv = \psi'(t)dt = \psi'(\psi^{-1}(v))dt$, donc :

$$dt = \frac{dv}{\psi'(\psi^{-1}(v))}$$

cette écriture ayant une utilité mnémotechnique et étant interprétée rigoureusement dans les cours de Licence (calcul différentiel). Il ne reste plus qu'à mettre cela dans l'intégrale, à remplacer $f(t)$ par $f(\psi^{-1}(v))$ et bien sûr à ajuster les bornes d'intégration.

10 Intégrales « impropres »

Si f , disons continue, n'est pas bornée sur $]0, 1]$, mais l'est sur $[a, 1]$ pour tout $a > 0$ on définit $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 f(t)dt$ si cette limite existe (éventuellement $\pm\infty$). Si elle n'existe pas ou est infinie on dit que l'intégrale diverge, sinon on dit qu'elle converge. Si $\forall t f(t) \geq 0$ alors cela donne toujours un sens à $\int_0^1 f(t)dt$ dans $[0, +\infty]$. Si on a aussi un problème en 1, on examine \int_0^c et \int_c^1 ($0 < c < 1$, c quelconque). Ce n'est que si les deux existent, avec au plus une des deux infinie, ou toutes les deux $+\infty$, ou toutes les deux $-\infty$, que l'on obtient un sens pour \int_0^1 . On discute de la même manière les intégrales sur un intervalle infini : $\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t)dt$ si cette limite existe. Et pour $\int_{-\infty}^{+\infty}$ il faut séparément $\int_{-\infty}^0$ et $\int_0^{+\infty}$.

11 Rectangles, Trapèzes, Simpson

Soit $f(x)$ une fonction R-intégrable sur $[a, b]$. Considérons :

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{b-a}{N} \left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{N}\right) + \dots + f\left(a + (N-1)\frac{b-a}{N}\right) \right) \\ T_N &= \frac{b-a}{N} \left(\frac{1}{2}f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{N}\right) + \dots + f\left(a + (N-1)\frac{b-a}{N}\right) + \frac{1}{2}f(b) \right) \\ S_N &= \frac{b-a}{6N} \left(f(a) + 4f\left(a + \frac{b-a}{2N}\right) + 2f\left(a + \frac{b-a}{N}\right) \right. \\ &\quad \left. + 4f\left(a + 3\frac{b-a}{2N}\right) + 2f\left(a + 2\frac{b-a}{N}\right) + \dots + 4f\left(a + (2N-1)\frac{b-a}{2N}\right) + f(b) \right) \end{aligned}$$

La somme définissant R_N est une somme de Riemann, les deux autres sont des

généralisations⁶. On utilise N points pour R_N , $N + 1$ points pour T_N et $2N + 1$ points pour S_N . Lorsque N tend vers l'infini, ce sont des suites qui convergent toutes vers $\int_a^b f(t)dt$. Cependant si f est suffisamment 'lisse', alors en général R_N converge moins vite que T_N qui converge moins vite que S_N , comme on le voit grâce aux théorèmes suivants :

Théorème : *Si f est dérivable :*

$$\forall N \geq 1 \quad \left| \int_a^b f(t) dt - R_N \right| \leq \frac{(b-a)^2 \sup_{a \leq x \leq b} |f'(x)|}{2N}$$

*Si de plus f' est R-intégrable alors $\lim_{N \rightarrow \infty} N \left(\int_a^b f(t) dt - R_N \right) = \frac{b-a}{2} (f(b) - f(a))$.
Si f est deux fois dérivable :*

$$\forall N \geq 1 \quad \left| \int_a^b f(t) dt - T_N \right| \leq \frac{(b-a)^3 \sup |f''|}{12N^2}$$

et si de plus f'' est R-intégrable, alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \left(\int_a^b f(t) dt - T_N \right) = \frac{(b-a)^2}{12} (f'(a) - f'(b))$$

Si f est quatre fois dérivable :

$$\forall N \geq 1 \quad \left| \int_a^b f(t) dt - S_N \right| \leq \frac{(b-a)^5 \sup |f^{(4)}|}{2880N^4}$$

et si de plus $f^{(4)}$ est R-intégrable, alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^4 \left(\int_a^b f(t) dt - S_N \right) = \frac{(b-a)^4}{2880} (f^{(4)}(a) - f^{(4)}(b))$$

L'impressionnant $2880N^4$ doit plutôt se lire $180(2N)^4$ car on évalue en à peu près $2N$ points dans la méthode Simpson. On passe de la somme Rectangle à la somme Trapèze en tenant compte de la correction liée à la valeur donnée pour $\lim_{N \rightarrow \infty} N \left(\int_a^b f(t) dt - R_N \right)$. En corrigeant la somme trapèze par la valeur donnée pour l'écart limite, on crée une nouvelle approximation qui n'est pas une somme de Simpson, mais dont on peut montrer (lorsque $f^{(4)}$ existe et est R-intégrable, par exemple lorsque $f^{(4)}$ existe et est continue) qu'elle est comme la somme de Simpson majorée par un $1/N^4$. En fait, on peut montrer que cette approximation est un peu meilleure, en un certain sens, que Simpson (mais elle utilise explicitement les dérivées $f'(a)$ et $f'(b)$). Il est très important de bien comprendre que si l'on a une fonction qui n'est pas dérivable, ne serait-ce qu'en un seul point de l'intervalle $[a, b]$ alors il n'y a (a priori) aucun avantage particulier à utiliser Simpson, ou Trapèze, de préférence à Rectangle : un seul point de non-dérivabilité peut faire en sorte que l'erreur ne tende pas vers zéro plus vite qu'un $1/N$.

Nous avons démontré en cours plusieurs des résultats ci-dessus, et en particulier le très difficile résultat de majoration pour Simpson. Je rappelle ici, non pas toutes les démonstrations, mais surtout certains résultats qui nous ont été utiles :

6. La somme R_N est associée à la subdivision à pas constant $(b-a)/N$, avec le choix du point gauche de chaque sous-intervalle. Notons R'_N la somme de Riemann pour la même subdivision, mais avec le choix du point à droite. Alors $T_N = (R_N + R'_N)/2$. Notons R_N^* la somme associée au choix des points au milieu de chaque sous-intervalle. Alors $S_N = (R_N + 4R_N^* + R'_N)/6$. Ainsi si f est R-intégrable on a $\lim R_N = \lim T_N = \lim S_N = \int_a^b f(t)dt$.

12 Théorèmes de la Moyenne

On a, en utilisant les notations $\sup(f) = \sup\{f(x) | a \leq x \leq b\}$, $\inf(f) = \inf\{f(x) | a \leq x \leq b\}$, et en faisant l'hypothèse $a \leq b$:

$$(b - a) \inf(f) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b - a) \sup(f)$$

Si de plus f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ alors :

$$\exists c \in]a, b[\quad \int_a^b f(t) dt = (b - a) f(c)$$

Plus généralement, si $g(x)$ est une fonction à valeurs positives ou nulles, on a

$$\inf(f) \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t) g(t) dt \leq \sup(f) \int_a^b g(t) dt$$

Si de plus f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ alors :

$$\exists c \in]a, b[\quad \int_a^b f(t) g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$$

À propos il est utile de savoir : si $f(t)$ est continue, positive ou nulle, alors $\int_a^b f(t) dt > 0$ sauf si $a = b$ ou si f est identiquement nulle entre a et b . Bien sûr si f n'est pas supposée positive ou nulle, la nullité de l'intégrale ne permet aucunement d'en déduire que la fonction est nulle ! Mais si la fonction f est continue et que son intégrale est nulle alors (sauf si $a = b$) la fonction f sera certainement nulle en au moins un point, par le théorème de la moyenne.

Démonstrations relatives à l'approximation de $\int_a^b f(t) dt$ par R_N :

Nota Bene : Les hypothèses du Théorème s'appliquent en particulier si f est de classe C^1 , c'est-à-dire si f' existe et est continue sur tout l'intervalle $[a, b]$. Mais si l'on suppose seulement que $f'(x)$ existe en tout x alors il n'est pas garanti que $\sup |f'| < \infty$ (on désigne par $\sup |f'|$ la borne supérieure des valeurs prises par $|f'(x)|$ sur $[a, b]$). Dans le cas pathologique $\sup |f'| = +\infty$ les inégalités données dans le théorème sont vraies mais sans aucun intérêt. Cependant si f' existe en tout x et est de plus R-intégrable, alors par cette hypothèse on sait $\sup |f'| < \infty$. Donc dans ce cas, on a à la fois les inégalités données par la première équation du Théorème, et la limite donnée par la deuxième équation du Théorème. Lorsque $f(b) \neq f(a)$ la deuxième équation montre que les inégalités donnent une idée correcte du comportement exact de $\int_a^b f(t) dt - R_N$. Lorsque $f(b) = f(a)$ il est possible que la convergence vers 0 de $\int_a^b f(t) dt - R_N$ soit plus « rapide » que ce qui est suggéré par les inégalités.

Pour $N = 1$, il s'agit de majorer en valeur absolue $J = \int_a^b f(t) dt - (b-a)f(a)$. On écrit $J = \int_a^b (f(t) - f(a)) dt$. Par le théorème des accroissements finis on a $|f(t) - f(a)| \leq (t - a) \sup |f'|$. Donc $|J| \leq \sup |f'| \int_a^b (t - a) dt$ et ainsi

$$\left| \int_a^b f(t) dt - (b - a) f(a) \right| \leq \frac{(b - a)^2 \sup |f'|}{2}$$

Supposons maintenant $N > 1$. On a $\int_a^b f(t)dt - R_N = \sum_{1 \leq k \leq N} J_k$ avec, pour $1 \leq k \leq N$:

$$J_k = \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{N}}^{a+k\frac{b-a}{N}} f(t)dt - \frac{b-a}{N} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{N}\right)$$

On a donc, pour chaque k , $|J_k| \leq \frac{(b-a)^2 \sup |f'|}{2N^2}$, puisque le k ième sous-intervalle est de longueur $(b-a)/N$: ici on peut prendre le sup de $|f'|$ sur $[a, b]$ tout entier car c'est au moins égal au sup sur le k ième sous-intervalle. En sommant ces N inégalités on obtient finalement

$$\left| \int_a^b f(t)dt - R_N \right| \leq \frac{(b-a)^2 \sup |f'|}{2N}$$

et c'est ce qu'il fallait montrer. La seule hypothèse employée est que f est dérivable et que $\sup |f'| < \infty$.

Réexaminons cela, avec en plus l'hypothèse que f' est R-intégrable. On regarde à nouveau $J = \int_a^b f(t)dt - (b-a)f(a) = \int_a^b (f(t) - f(a))dt$. Posons $k(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ pour $t > a$, $k(a) = f'(a)$. La fonction k est continue. On applique la version générale du théorème de la moyenne à $J = \int_a^b (f(t) - f(a))dt = \int_a^b k(t)(t-a)dt$ d'où $J = k(c) \int_a^b (t-a)dt = k(c) \frac{(b-a)^2}{2}$ pour un certain c dans $]a, b[$. Puis, par le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[a, c]$ on voit que $k(c) = f'(d)$ pour un certain d dans $]a, c[\subset]a, b[$. Appliquant cela non pas à a et b mais à $a_{k-1} = a + (k-1)\frac{b-a}{N}$ et $a_k = a + k\frac{b-a}{N}$, on obtient :

$$J_k = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)dt - \frac{b-a}{N} f(a_{k-1}) = f'(d_k) \frac{(b-a)^2}{2N^2} \quad (d_k \in [a_{k-1}, a_k])$$

Alors $\sum_k J_k = \left(\sum_k f'(d_k) \frac{b-a}{N} \right) \frac{b-a}{2N}$. La somme entre parenthèses est une somme de Riemann qui converge vers $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ lorsque N tend vers l'infini. Donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \left(\int_a^b f(t)dt - R_N \right) = \frac{b-a}{2} (f(b) - f(a))$$

Pour les preuves relatives à T_N et S_N nous avons aussi utilisé :

Lemme de Rolle généralisé : Soit f telle que $f^{(N-1)}$ existe et soit $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_N) = 0$: il existe alors $y \in]x_1, x_N[$ tel que $f^{(N-1)}(y) = 0$. Plus généralement on peut admettre que des x_j coïncident, mais alors si par exemple l'un d'entre eux est compté 3 fois, c'est que l'on suppose que $f, f',$ et f'' sont toutes nulles en ce point. Alors on a à nouveau $y \in]x_1, x_N[$ tel que $f^{(N-1)}(y) = 0$ (si $x_1 = x_N$ et que donc on a simplement un seul point x avec $f(x) = \dots = f^{(N-1)}(x) = 0$, évidemment on prend $y = x$, et on ne peut pas écrire $y \in]x, x[$ puisque ce dernier intervalle dans ce cas dégénéré est vide. Pardon d'être tatillon, c'est important en mathématiques.).

13 Polynômes d'interpolation

La démonstration du terme d'erreur dans la formule de Simpson utilise aussi la notion de polynôme d'interpolation. Supposons donnés N points x_1, x_2, \dots, x_N . Supposons

les distincts (mais on peut généraliser). Alors il existe exactement un unique polynôme $P(x)$ de degré au plus $N-1$ qui prenne en ces points des valeurs données a_1, \dots, a_N . Je fais la démonstration en utilisant ce que nous avons appris depuis en algèbre linéaire. L'ensemble V des polynômes de degré au plus $N-1$ est un espace vectoriel de dimension N . L'application qui à P associe $[P(x_1) P(x_2) \dots P(x_N)]^t \in \mathbb{R}^n$ est une application linéaire de V vers \mathbb{R}^n , lui aussi de dimension n . On veut montrer que cette application est bijective, et comme les espaces ont la même dimension on sait qu'il suffit de montrer que le noyau de f est réduit au vecteur nul. Or effectivement si P est dans le noyau alors P s'annule en les N points donc se factorise $P(T) = (T - x_1) \dots (T - x_N)Q(T)$, et ne peut être de degré au plus $N-1$ que si il est identiquement nul. QED.

Méthode de Newton-Gregory : c'est une méthode récursive qui construit le polynôme en prenant en compte les contraintes l'une après l'autre : on cherche $P(T)$ comme combinaison

$$c_1 + c_2(T - x_1) + c_3(T - x_1)(T - x_2) + \dots + c_N \prod_{1 \leq j < N} (T - x_j)$$

La contrainte $P(x_1) = a_1$ détermine c_1 , puis la contrainte $P(x_2) = a_2$ détermine c_2 , etc. ... D'ailleurs par cette méthode on démontre également l'existence du polynôme : la démonstration d'algèbre linéaire ci-dessus, c'était juste pour s'amuser. Le grand avantage de cette méthode, c'est que l'on peut ajouter des contraintes supplémentaires, sans avoir à tout recommencer à zéro. De plus elle s'adapte facilement si il y a des contraintes du type : $f(x_1) = a_1, f'(x_1) = a_{1,1}, f''(x_1) = a_{1,2}$, etc. ...

Polynômes de Lagrange : dans le cas où tout les points sont distincts on a la formule exacte pour le polynôme d'interpolation :

$$P(T) = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{a_i \prod_{1 \leq j \leq N, j \neq i} (T - x_j)}{\prod_{1 \leq j \leq N, j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Mais si on rajoute un $(N+1)$ -ième point, il faut tout recalculer.

XI Primitives et Fractions Rationnelles

1 La notation intégrale pour les primitives

Compte tenu des « théorèmes fondamentaux du Calcul », on utilise parfois la notation $\int f(t) dt + C$ pour désigner une primitive quelconque de $f(t)$, la constante additive inconnue C étant là pour rappeler que toutes les primitives d'une même fonction diffèrent entre elles uniquement par une constante additive (qui peut varier d'un intervalle à l'autre, si le domaine de définition de f est composé d'intervalles disjoints). La notation $F(x) = \int^x f(t) dt + C$ est peut-être un peu meilleure, puisqu'elle permet d'écrire explicitement la variable x . Le C est un peu optionnel, et souvent on ne l'écrit que dans la dernière ligne des calculs, et plusieurs lettres « C » sur des lignes différentes ne font pas forcément référence aux mêmes constantes réelles.

On parle aussi d'intégrales « indéfinies » (ne pas confondre avec les « intégrales impropres », qui sont des intégrales sur des intervalles infinis, ou encore pour des fonctions non-bornées).

2 Décomposition en éléments simples et Primitives de fractions rationnelles

On sait, en principe, que l'on peut calculer la primitive $F(x) = \int^x \frac{P(t)}{Q(t)} dt$ de n'importe quelle fraction rationnelle (en conservant à l'esprit le fait que les constantes d'intégration sont susceptibles de changer lorsque l'on franchit un nombre réel où la fraction n'est pas définie). Cela repose sur l'existence de la décomposition en éléments simples (attention : parfois le résultat final peut s'obtenir bien plus directement ; par exemple on a $\int^x \frac{Q'(t)}{Q(t)} dt = \log |Q(x)| + C$).

On appelle élément simple toute fraction du type $\frac{\alpha}{(x-c)^n}$ ($\alpha, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$) ainsi que toute fraction du type $\frac{\beta x + \alpha}{(x^2 + bx + c)^n}$, avec $b^2 - 4c < 0$ (autrement dit $x^2 + bx + c$ est irréductible sur \mathbb{R}). Si l'on s'autorise à travailler avec les nombres complexes, alors seul le premier type est qualifié d'élément simple.

Le **Théorème de décomposition en éléments simples**, démontré en cours, affirme que toute fraction rationnelle $\frac{P(t)}{Q(t)}$ se décompose (de manière unique) comme la somme d'un polynôme et d'une somme (finie) d'éléments simples. Le problème du calcul d'une primitive est donc ramené à celui des primitives des éléments simples.

Nous avons vu différentes techniques pour obtenir les parties simples de la fraction donnée. La partie « polynôme » est simplement le quotient euclidien de P par Q , et donc quitte à remplacer P par son reste dans la division par Q , on peut se ramener à $\deg P < \deg Q$. Il faut ensuite principalement connaître le cas où Q est entièrement scindé sur \mathbb{R} , avec des racines sans multiplicité :

$$Q(t) = \prod_{1 \leq j \leq N} (t - a_j)$$

avec a_1, \dots, a_N , dans \mathbb{R} et tous distincts. Alors :

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \sum_{1 \leq j \leq N} \frac{\alpha_j}{t - a_j}$$

et l'on obtient α_j en multipliant par $Q(t)$ puis en substituant $t = a_j$. Cela donne $\alpha_j = P(a_j) / \prod_{1 \leq k \leq N, k \neq j} (a_j - a_k)$, ou encore, de manière équivalente :

$$\alpha_j = \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}$$

Si il y a des racines complexes, mais toutes sans multiplicité, on applique la même méthode, ce qui donne les éléments simples sur \mathbb{C} , et ensuite on réduit au même dénominateur la contribution d'une racine complexe et celle de la racine conjuguée pour obtenir les éléments simples sur \mathbb{R} . La situation est plus compliquée si il y a des

racines multiples, ou, pire encore, des racines complexes et multiples. On s'en sort alors en général en trouvant des équations linéaires entre les inconnues entrant dans la décomposition en éléments simples (en évaluant en des t particulier).

Il existe cependant une méthode systématique qui permet d'écrire toute fraction $\frac{P}{UV}$ sous la forme $\frac{A}{U} + \frac{B}{V}$ lorsque U et V n'ont aucune racine complexe commune. Car alors ils sont « premiers entre eux » et on peut donc trouver via l'algorithme d'Euclide du calcul du PGCD (de polynômes) une identité de Bezout $A_0 \cdot V + B_0 \cdot U = 1$, d'où

$$\frac{P}{UV} = \frac{PA_0}{U} + \frac{PB_0}{V}$$

On remplace alors PA_0 par son reste dans la division euclidienne par U , idem pour PB_0 que l'on remplace par son reste dans la division euclidienne par V , et on répète jusqu'à avoir réduit à des éléments simples.

Le problème du calcul d'une primitive est donc ramené à celui des primitives des éléments simples. Les formules sont :

$$\int \frac{1}{t-c} dt = \log|x-c| + C$$

$$\int \frac{1}{(t-c)^n} dt = \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x-c)^{n-1}} + C \quad (n \geq 2)$$

$$\int \frac{1}{t^2+1} dt = \text{Arctg}(x) + C$$

$$\int \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$$

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^n} dt = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}} dt + C \quad (n \geq 2)$$

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^n} dt = \frac{1}{2} \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C \quad (n \geq 2)$$

Les éléments simples faisant intervenir t^2+bt+c se ramènent à ceux faisant intervenir u^2+1 par le changement de variable $t = -\frac{b}{2} + \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \cdot u$.

3 Quelques intégrales indéfinies que l'on sait exprimer avec l'aide des « fonctions élémentaires », sin, cos, exp, sh, ch, log, de leurs fonctions réciproques et des fractions rationnelles

Si l'on doit évaluer $\int^x R(e^{\lambda t}) dt$, avec $R(T)$ une fraction rationnelle (et $\lambda \neq 0$), on fait le changement de variables $u = e^{\lambda t}$, $dt = du/(\lambda u)$ cela ramène à la primitive d'une fraction rationnelle en u .

Si l'on doit évaluer $\int^x R(\sqrt[n]{at+b}, t) dt$, avec $R(T, V)$ une fraction rationnelle en deux variables (et $a \neq 0$), on commence par le changement de variables $u = \sqrt[n]{at+b}$, cela ramène à la primitive d'une fraction rationnelle en u .

Si l'on doit évaluer $\int^x R(\sqrt{at^2+bt+c}, t) dt$, avec $R(T, V)$ une fraction rationnelle en deux variables (et $a \neq 0$, et b ou c non nul), on fait un changement de variable linéaire

de manière à ramener la racine carrée, suivant le signe de a et de $b^2 - 4ac$, à l'une des trois formes $\sqrt{u^2 + 1}$, $\sqrt{u^2 - 1}$, $\sqrt{1 - u^2}$. On fait ensuite suivant le cas le changement de variable $u = \operatorname{sh} v$ ou $u = \operatorname{ch} v$ (ou $u = -\operatorname{ch} v$ si l'on travaille avec $u \in]-\infty, -1[$) ou $u = \sin v$, et on est alors ramené soit à une fraction rationnelle en $\exp v$ soit à une fraction rationnelle en $\cos v$ et $\sin v$. Dans le premier cas, le changement de variable $w = \exp v$ ramène au calcul de la primitive d'une fraction rationnelle en w . Dans le deuxième cas, on est ramené à la situation suivante :

Pour le calcul des primitives des fractions rationnelles en $\cos v$ et $\sin v$, il y a un changement de variable qui marche toujours, mais qui n'est pas toujours le choix le plus simple : on pose $u = \operatorname{tg}(v/2)$. On a alors :

$$\cos v = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad \sin(v) = \frac{2u}{1 + u^2} \quad dv = \frac{2}{1 + u^2} du$$

et on est ramené au calcul de la primitive d'une fraction rationnelle en u . Cependant ne perdez pas de vue que souvent il existe des raccourcis par rapport à la méthode générale :

$$\begin{aligned} \int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} &= \operatorname{argch}(x) + C \quad (x > 1) & \int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} &= \operatorname{argsh}(x) + C \\ \int^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} &= \operatorname{arcsin}(x) + C & \int^x \frac{t dt}{\sqrt{1 - t^2}} &= -\sqrt{1 - x^2} + C \\ \int^x \operatorname{tg}(t) dt &= -\log |\cos x| + C \end{aligned}$$

Pour des intégrales du type $\int^x f(t) \cos(t) dt$ on a parfois intérêt à intégrer deux fois par parties le $\cos(t)$. Par exemple, cela marche pour $\int^x \exp(at) \cos(t) dt$ car on obtient une relation qui détermine l'intégrale. D'ailleurs on aurait aussi pu intégrer deux fois par parties le $\exp(at)$. Similairement on établit des relations de récurrence pour des intégrales telles que $\int^x t^n e^t dt$, en intégrant (une fois) par parties.

Le passage par les complexes est parfois utile : par exemple on peut écrire

$$\int^x \exp(at) \cos(t) dt = \operatorname{Re} \int^x \exp(at) e^{it} dt = \operatorname{Re} \int^x e^{(a+i)t} dt = \operatorname{Re} \frac{e^{(a+i)x}}{a+i} + C$$

d'où :

$$\int^x \exp(at) \cos(t) dt = \operatorname{Re} \frac{(a-i)e^{(a+i)x}}{a^2+1} + C = (a \cos x + \sin x) \frac{e^{ax}}{1+a^2} + C$$

Plus audacieux est l'emploi du « logarithme complexe », j'en ai parlé un peu en cours, inutile d'aggraver la situation ici.

XII Algèbre linéaire

1 Méthode de réduction de Gauss-Jordan

Dite aussi « méthode des pivots », ou « élimination de Gauss-Jordan », il s'agit d'une méthode pour résoudre les systèmes d'équations linéaires en des inconnues x_1, \dots, x_n

(n inconnues), et les données y_1, \dots, y_p (p équations). Par un procédé systématique on combine les équations (lignes) entre elles pour aboutir à un **système échelonné** qui est équivalent au système initial. La première variable de chacune des lignes finales contenant encore des x_i est appelée **variable pivot**. Il y a exactement autant de variables pivots que de lignes (contenant des x_i) finales. Les autres inconnues, si il y a moins de pivots que d'inconnues, sont appelées **variables libres**. On dit que le système est complètement réduit lorsque l'on a poursuivi les combinaisons de lignes de manière à annuler tous les coefficients d'une variable pivot « au-dessus » de la ligne où elle apparaît en première position, et si l'on a normalisé à 1 le premier coefficient de chaque ligne non identiquement nulle. Si le nombre de variables pivots est strictement inférieur au nombre p d'équations alors il y a au moins une ligne du bas de la forme $0 = C_k$ avec C_k une combinaison linéaire des données y_j , $1 \leq j \leq p$. On appelle **contraintes** ces équations en les y_j : pour que le système admette des solutions il faut et il suffit que toutes les contraintes soient satisfaites. Les contraintes sont elles-mêmes automatiquement échelonnées en les y_j de sorte que aucune ne peut se déduire des autres : elles apparaissent automatiquement en nombre minimal. Lorsque les contraintes sont satisfaites, toutes les solutions s'obtiennent en donnant aux variables libres des valeurs quelconques, puis en calculant les uniques valeurs des variables pivots en fonction des données y_j et des variables libres, de façon à ce que les équations du système (complètement réduit) soient vérifiées.

Variables pivots, variables libres, contraintes : voir « Méthode de Gauss-Jordan ».

Système homogène : Le système est dit homogène si les données sont nulles. Dans ce cas il n'est plus question de contraintes, et l'ensemble des vecteurs $u = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t$ solution est automatiquement non-vide car il contient toujours le vecteur nul. Cet ensemble est un **sous-espace vectoriel** de \mathbb{R}^n , qui s'appelle le **noyau** du système, ou de la **matrice** (p lignes, n colonnes) des coefficients.

THÉORÈME : *tout système homogène qui comporte strictement plus d'inconnues que d'équations possède une solution non-triviale.*

En effet le nombre de variable pivots est au maximum égal au nombre d'équations, donc est ici strictement inférieur au nombre total d'inconnues, et ainsi il existe des variables libres, et donc des solutions autres que le vecteur nul.

$\mathbb{R}^{m,n}$: l'espace des **matrices** avec m lignes et n colonnes. C'est un espace vectoriel. Lorsqu'il y a une seule colonne on note \mathbb{R}^m au lieu de $\mathbb{R}^{m,1}$. Lorsque A est une matrice on note a_{ij} ou A_{ij} ou $A_{i,j}$ son coefficient à l'intersection de la i ème ligne et de la j ème colonne, et on note (m lignes, n colonnes) :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

2 Espaces vectoriels et indépendance linéaire

Espaces vectoriels : il s'agit d'un ensemble non-vide dont les éléments sont appelés « vecteurs » que l'on peut additionner entre eux, et aussi que l'on peut multiplier

par des « scalaires ». Pour les axiomes précis, cf vos notes de cours. Tout espace vectoriel E contient un élément particulier, le vecteur nul $\vec{0}_E$. Très souvent on écrit $\vec{0}$ ou même 0 et non pas $\vec{0}_E$. On note parfois les vecteurs avec une flèche, mais c'est optionnel, et même, au bout d'un moment, un peu lassant.

Sous-espace vectoriel : un sous-ensemble d'un espace vectoriel qui est stable par combinaison linéaire. Il est alors automatiquement en lui-même aussi un espace vectoriel.

Combinaison linéaire : se dit d'une expression $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} \dots$ (avec un nombre fini de termes) impliquant des scalaires λ, μ, ν, \dots et des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$. Par exemple on peut faire des combinaisons linéaires de matrices, à condition qu'elles aient toutes le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Lorsque l'on multiplie par λ une matrice, c'est que l'on a multiplié par λ tous ses coefficients. On peut aussi faire des combinaisons linéaires d'applications linéaires d'un espace V vers un espace W . En effet l'ensemble $\text{Lin}(V, W)$ des applications linéaires de V vers W est lui-même naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel : $\lambda f + \mu g$ est défini par $\forall \vec{u} \in V \quad (\lambda f + \mu g)(\vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu g(\vec{u})$.

Scalars : les nombres réels (il y a aussi une notion d'espaces vectoriels sur \mathbb{C} , c'est-à-dire, avec \mathbb{C} comme corps des scalaires ; plus généralement pour tout corps commutatif K il y a une notion d'espace vectoriel sur K).

Indépendance linéaire : on dit que des vecteurs d'un même espace vectoriel sont **linéairement indépendants**, si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, ou de manière équivalente si la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est la combinaison avec tous les coefficients nuls.

Système libre : notion équivalente à l'indépendance linéaire ; on dit que des vecteurs en nombre fini forment un système libre si ils sont linéairement indépendants. À noter que si des vecteurs sont libres dans un sous-espace W de V ils sont libres aussi vus comme vecteurs de V . À noter aussi que si des vecteurs sont libres, toute sous-sélection est libre aussi. Si l'on a un seul vecteur, il forme un système libre si et seulement si il est non nul.

Système générateur : Des vecteurs u_1, u_2, \dots, u_k d'un espace vectoriel W forment un système générateur si tout vecteur de W est, d'au moins une façon, combinaison linéaire de u_1, u_2, \dots , et u_k . On dit aussi que u_1, u_2, \dots, u_k engendrent W .

Vect(u_1, u_2, \dots, u_k) : Soit u_1, u_2, \dots, u_k des vecteurs d'un même espace vectoriel V . Il existe exactement un sous-espace vectoriel W de V qui contienne u_1, u_2, \dots, u_k et pour lequel u_1, u_2, \dots, u_k forment un système générateur. On dit que W est le sous-espace engendré par u_1, u_2, \dots, u_k et on le note $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$. On peut le décrire concrètement comme étant le sous-ensemble de tous les vecteurs de V qui sont des combinaisons linéaires de u_1, u_2, \dots, u_k , ou abstraitement comme étant l'intersection de tous les sous-espaces de V contenant u_1, u_2, \dots, u_k , autrement dit le « plus petit » d'entre eux.

Base : On dit que $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k)$ est une base de W si les vecteurs u_1, \dots, u_k forment un système libre qui engendre W . L'espace vectoriel \mathbb{R}^n possède une base

canonique \mathcal{B} et il est de dimension n .

3 Théorème de la dimension

THÉORÈME DE LA DIMENSION : *Si W possède une base de cardinalité finie, alors toute autre base possède la même cardinalité. Cette cardinalité finie s'appelle la dimension de W et est notée $\dim(W)$.*

Dimension : la cardinalité d'une base de W , si il en existe. Lorsque W est réduit à $\{\vec{0}\}$ on définit sa dimension comme valant 0. Si W n'est pas $\{\vec{0}\}$ et que aucun système fini de vecteurs n'est générateur on pose $\dim(W) = +\infty$. Tout sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie est aussi de dimension finie (on le montre dans la suite).

Démonstration du théorème de la dimension, notions annexes :

Soit W un espace vectoriel. Montrons : **si k vecteurs engendrent W alors l autres vecteurs quelconques de W sont nécessairement liés dès que $l > k$.** Soient u_1, \dots, u_k qui engendrent W . Prenons d'autres vecteurs v_1, \dots, v_l dans W . Cherchons une combinaison qui donne zéro. On a donc l inconnues. En exprimant les v_j en fonction des u_i on voit qu'il suffit que ces l inconnues satisfassent k équations homogènes. Il y a strictement plus d'inconnues que d'équations : il y a donc au moins une solution non-triviale, ce qu'il fallait prouver.

Montrons maintenant : **si k vecteurs de W forment un système libre alors $l < k$ vecteurs de W ne peuvent jamais engendrer W .** Supposons que k vecteurs u_1, \dots, u_k forment un système libre. Soit v_1, \dots, v_l d'autres vecteurs dans W . Si ils engendrent W alors, en appliquant la discussion précédente en ayant interverti le rôle des u et des v on obtient $k \leq l$, car si l'on avait $k > l$ les vecteurs u_i ne pourraient pas être linéairement indépendants.

Supposons connus dans W des vecteurs u_1, \dots, u_k linéairement indépendants et qui engendrent W . Alors par ce qui précède : si $l > k$ tout système de l vecteurs est lié, et si $l < k$ aucun système de l vecteurs ne peut engendrer W . Donc tout autre choix de vecteurs à la fois linéairement indépendants et engendrant W nécessite exactement aussi k vecteurs. Le théorème de la dimension est démontré.

Dans un espace de dimension n tout système de $n + 1$ vecteurs ou plus est lié, et aucun système de $n - 1$ vecteurs ou moins ne peut être générateur.

Dans un espace de dimension n un système de n vecteurs est une base dès que soit il est libre soit il est générateur : l'un implique l'autre.

Par exemple il existe dans \mathbb{R}^n , espace vectoriel des vecteurs colonnes à n composantes, une **base canonique**. Sa cardinalité est n donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Théorème de la base extraite : *Soit $V = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$. Il existe un choix des vecteurs v_j qui donne une base de V . En particulier $\dim(V) \leq p$.*

Pour le prouver on donne un algorithme (abstrait) qui sélectionne la base extraite. On commence par examiner v_1 . Si il est nul, on le laisse de côté, sinon on le retient. Peut-être $V = \text{Vect}(v_1)$: alors v_1 engendre V , et en est à lui tout seul une base (un système d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul). Sinon, c'est que v_2 , ou v_3 , etc.. n'est pas dans $\text{Vect}(v_1)$. Par exemple v_2 . On vérifie que cela équivaut à dire que v_2 et v_1 sont indépendants. On répète et au bout d'un nombre fini d'étapes on aura sélectionné parmi les v_j un sous-système libre qui engendre V .

4 Théorème de la base incomplète

Si W est un sous-espace vectoriel d'un espace V de dimension finie : **alors W est aussi de dimension finie et $\dim(W) \leq \dim(V)$.**

Preuve : si $W = \{\vec{0}\}$, il n'y a rien à prouver. Sinon soit u_1 non nul dans W . Si $W = \text{Vect}(u_1)$ on a terminé. Sinon il existe u_2 dans W qui n'est pas dans $\text{Vect}(u_1)$: autrement dit (u_1, u_2) est un système libre. Si $W = \text{Vect}(u_1, u_2)$ on a terminé, sinon etc. . . Cela peut-il durer éternellement ? Non car on ne peut trouver strictement plus que $\dim(V)$ vecteurs linéairement indépendants. Donc il arrive un moment où les vecteurs u_1, \dots, u_l engendrent tout W . Comme ils sont linéairement indépendants, ils forment une base de W . Il y en a au plus $\dim(V)$: donc $\dim(W) \leq \dim(V)$ (montrer : si $\dim(W) = \dim(V)$ alors $W = V$).

THÉORÈME DE LA BASE INCOMPLÈTE : Soit (u_1, \dots, u_d) une base de V , et soit v_1, \dots, v_k d'autres vecteurs linéairement indépendants. Alors on peut choisir $d-k$ vecteurs parmi les u_i de manière à ce que réunis avec les v_j ils forment ensemble une base de V .

Preuve : Les vecteurs $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_d$, pris dans cet ordre, forment un système générateur de V auquel on peut appliquer l'algorithme (abstrait) de la base extraite. Il est clair que au début, cela revient simplement à conserver les v_j puisque ceux-ci sont linéairement indépendants. Ensuite l'algorithme sélectionne parmi les u_i certains d'entre eux et on obtient ainsi la base recherchée.

5 Intersections, sommes de sous-espaces

Intersection : Lorsque l'on a des sous-espaces vectoriels W_1, W_2, \dots en nombre fini ou infini d'un même espace vectoriel V , le sous-ensemble de V des vecteurs qui sont simultanément dans tous les W_j est un sous-espace vectoriel de V que l'on appelle l'intersection des W_j et que l'on note $\cap_j W_j = W_1 \cap W_2 \cap \dots$.

Réunion : cela ne donne **PAS** en général des sous-espaces vectoriels.

Somme : Lorsque l'on a des sous-espaces vectoriels W_1, W_2, \dots en nombre fini ou infini d'un même espace vectoriel V , le sous-ensemble de V des vecteurs qui sont d'au moins une façon combinaison linéaire de vecteurs contenus chacun dans l'un des W_j , est un sous-espace vectoriel de V que l'on appelle la somme des W_j et que l'on note $+_j W_j = W_1 + W_2 + \dots$. Il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de V qui

contienne chacun des W_j comme sous-ensemble.

Somme directe : Deux sous-espaces W_1 et W_2 sont dits être en somme directe si leur intersection est réduite à l'espace nul. Dans ce cas on note $W_1 \oplus W_2$ leur somme. Tout vecteur w de la somme s'écrit alors de manière unique sous la forme $w_1 + w_2$ avec $w_1 \in W_1$ et $w_2 \in W_2$, et c'est équivalent avec le fait que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Plus généralement des espaces W_j sont dits être en somme directe si tout vecteur de la somme $+\sum_j W_j$ s'écrit de manière unique sous la forme d'une somme (finie) $w_1 + w_2 + \dots$, $w_j \in W_j$. Cela équivaut à exiger que pour tout j l'intersection de W_j avec la somme des W_k , $k \neq j$ est l'espace nul. Revenons au cas de W_1 et W_2 . Si ils sont de dimension finies alors ils sont en somme directe si et seulement si $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$. On a la formule générale en effet :

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$$

Lorsque $W_1 + W_2$ est une somme directe l'application (linéaire) qui associe à $w \in W_1 \oplus W_2$ l'unique vecteur w_1 avec $w - w_1 \in W_2$ est appelée « projection sur W_1 parallèlement à W_2 ».

6 Théorème du Rang

Revenons à un système d'équations linéaires, et à la matrice A associée, avec p lignes et n colonnes.

Espace-Colonne, Espace-Ligne : On appelle **espace-colonne** le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^p engendré par les colonnes de A , et **espace-ligne** le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{1,n}$ engendré par les lignes de A .

Base du noyau : On note $\text{Ker}(A)$ le noyau du système homogène, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n des solutions du système homogène associé à A . Soit k le nombre de variables libres : en posant successivement égale à 1 une variable libre donnée, à 0 toutes les autres, et en calculant la valeur des variables pivots de manière à ce que les équations (du système complètement réduit) soient satisfaites on obtient des vecteurs u_1, u_2, \dots, u_k en nombre égal au nombre de variables libres. On montre que ces vecteurs forment une *base* $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k)$ du noyau $\text{Ker}(A)$.

Base de l'espace-colonne : on prouve (cela a été fait en cours) que les colonnes dont les numéros sont ceux des variables pivots sont une base de l'espace-colonne. Sa dimension est donc égal au nombre de variables pivots.

Base de l'espace-ligne : on a le fait important qu'il *ne change pas* lors de la réduction de Gauss-Jordan. Sa dimension est donc celle associée aux lignes du système échelonné, et on peut oublier les lignes du bas, identiquement nulles, si il y en a. Celles qui ne sont pas identiquement nulles forment un système libre, comme on le vérifie facilement, et dont la cardinalité est le nombre de variables pivots.

En combinant ces résultats on obtient :

THÉORÈME DU RANG : *Pour toute matrice A ses espaces-colonne et espace-ligne ont la même dimension, qui est aussi le nombre de variables pivots lorsque l'on*

applique la méthode de réduction de Gauss-Jordan. Cette dimension commune s'appelle le **rang** de la matrice A (et du système d'équations linéaires qui lui correspond). De plus on a

$$\dim \text{Ker}(A) + \text{rang}(A) = n$$

La dernière égalité vient simplement du fait qu'il y a en tout n variables inconnues, qui sont chacune soit une variable pivot soit une variable libre. Or le rang est le nombre de pivots et la dimension du noyau est le nombre de variables libres. Parfois on appelle $\dim \text{Ker} A$ la « nullité » de A .

7 Applications linéaires

Application linéaire : une application d'un espace vectoriel vers un autre est dite linéaire si elle transforme toute combinaison linéaire de vecteurs en la combinaison linéaire de leurs images formée avec les mêmes coefficients scalaires.

Matrice associée : soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire. On appelle matrice associée à f (dans les bases canoniques) la matrice A avec p lignes et n colonnes, où l'on a positionné en colonnes les vecteurs images par f des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n (dans l'ordre). Réciproquement toute matrice $A \in \mathbb{R}^{p,n}$ correspond ainsi à une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Le coefficient A_{ij} est égal à la i ème coordonnée dans la base canonique de \mathbb{R}^p de l'image par f du j ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Produit de matrices : soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ deux applications linéaires de matrices associées B (pour g) et A (pour f). Alors la composition $f \circ g$ est une application linéaire de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^q et il lui correspond donc une matrice $C \in \mathbb{R}^{q,n}$. On dit que C est la matrice-produit de A et de B , et on la note

$$C \in \mathbb{R}^{q,n} \quad C = AB \quad A \in \mathbb{R}^{q,p}, B \in \mathbb{R}^{p,n}$$

On a la formule

$$C_{ik} = \sum_{1 \leq j \leq p} A_{ij} B_{jk}$$

Matrice associée (suite) : soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire et A sa matrice associée. Alors l'action de f peut s'exprimer simplement par le produit matriciel par A :

$$f \left(\left. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\} (n \text{ coordonnées}) \right) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left. \begin{pmatrix} \sum_{1 \leq j \leq n} A_{1j} x_j \\ \sum_{1 \leq j \leq n} A_{2j} x_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{1 \leq j \leq n} A_{pj} x_j \end{pmatrix} \right\} (p \text{ coordonnées})$$

8 Changement de base

Coordonnées dans une base : si V est un espace vectoriel, si \mathcal{B} une base de V et \vec{u} un vecteur de V , alors on note $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$ la colonne avec $\dim(V)$ éléments des coordonnées de \vec{u} dans la base \mathcal{B} , c'est-à-dire les coefficients de l'unique façon d'exprimer \vec{u} comme combinaison linéaire des vecteurs de la base \mathcal{B} (évidemment l'ordre compte dans une base : si l'on intervertit deux vecteurs d'une base, on a une *autre* base). L'application $\phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(V)}$ qui envoie \vec{u} sur $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$ est une application linéaire, qui est bijective.

Matrice de passage : Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases d'un même espace, on définit la matrice de passage $S(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de la base \mathcal{B}' vers la base \mathcal{B} comme étant la matrice qui exprime les vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} , autrement dit la matrice dont la j ème colonne est $[v_j]_{\mathcal{B}}$ avec v_j le j ème vecteur de la base \mathcal{B}' . La matrice de passage fait passer des coordonnées dans la base \mathcal{B}' aux coordonnées dans la base \mathcal{B} :

$$\forall \vec{u} \quad [\vec{u}]_{\mathcal{B}} = S(\mathcal{B}, \mathcal{B}') [\vec{u}]_{\mathcal{B}'}$$

On notera que si $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ alors la matrice de passage est la matrice identité I . Et aussi :

$$S(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = S(\mathcal{B}, \mathcal{B}') S(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$$

En particulier :

$$S(\mathcal{B}, \mathcal{B}') S(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = I = S(\mathcal{B}', \mathcal{B}) S(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

Matrices inversibles : On dit qu'une matrice S est inversible si elle est carrée et si il existe une matrice U avec $SU = I = US$. La matrice U est alors unique et est notée S^{-1} .

Matrice associée (suite) : Si $f : V \rightarrow W$ est une application linéaire, si \mathcal{B} est une base de V et si \mathcal{C} est une base de W alors il existe une unique matrice rectangulaire $A \in \mathbb{R}^{\dim(W), \dim(V)}$ associée à f , c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall \vec{u} \in V \quad [f(\vec{u})]_{\mathcal{C}} = A \cdot [\vec{u}]_{\mathcal{B}}$$

On construit A en mettant dans sa j ème colonne les coordonnées dans \mathcal{C} de l'image par f du j ème vecteur de la base \mathcal{B} .

Changements de base : Soit $f : V \rightarrow W$ est une application linéaire de matrice A pour les bases \mathcal{B} de V et \mathcal{C} de W . Soient \mathcal{B}' et \mathcal{C}' deux nouvelles bases, et A' la matrice de f pour ces nouvelles bases. Alors :

$$A' = S(\mathcal{C}', \mathcal{C}) \cdot A \cdot S(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

Supposons en particulier $V = W$, $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$. Alors :

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S \quad \text{avec } S = S(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

9 Morphismes

Une application linéaire d'un espace V vers un espace W est aussi appelée « morphisme ». Dans le cas où $W = V$ on parle d'« endomorphisme ».

Injectif, surjectif, bijectif : une application linéaire est dite injective si elle est injective au sens général de la théorie des ensembles : $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$. Il se trouve que pour une application linéaire cela équivaut à $f(u) = 0 \Rightarrow u = 0$. Pour surjectif et bijectif, rien de spécial à dire. Ah, si, pour que f soit bijective entre deux espaces de dimensions finies il faut et il suffit que sa matrice représentative dans des bases quelconques soit une matrice inversible. La matrice inverse pour les mêmes bases est alors associée à l'application $f^{(-1)}$ réciproque de f . Le mot isomorphisme est synonyme de « application linéaire bijective » (un « isomorphisme » n'est donc pas forcément un « endomorphisme » et un « endomorphisme » n'est pas forcément un « isomorphisme »...)

Invariance de la dimension : si $f : V \rightarrow W$ est un isomorphisme et si l'un est de dimension finie alors l'autre aussi et ils ont la même dimension.

Noyau, Image : Soit $f : V \rightarrow W$. Son noyau $\text{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel de V des vecteurs u avec $f(u) = 0$. Son image $\text{Im}(f)$ est le sous-espace vectoriel de W des vecteurs v pour lesquels il existe au moins un u avec $f(u) = v$. Supposons que V et W soient de dimensions finies et soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux bases respectives. Alors $\phi_{\mathcal{B}}(\text{Ker}(f)) \subset \mathbb{R}^{\dim(V)}$ est le noyau de la matrice A associée à f et $\phi_{\mathcal{C}}(\text{Im}(f)) \subset \mathbb{R}^{\dim(W)}$ est l'espace colonne de la matrice A . On appelle « rang » de f le rang de A , qui est indépendant du choix des bases car il s'agit simplement de la dimension de $\text{Im}(f)$. On a la formule importante

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim(V)$$

Injectif, surjectif : si $f : V \rightarrow W$ et $\dim(V) = \dim(W) < \infty$ alors pour voir si f est bijective il suffit d'établir soit l'injectivité, soit la surjectivité.

10 Équations et espaces associés à une matrice

Soit A une matrice avec p lignes et n colonnes. Le système d'équations avec A comme matrice et y_1, \dots, y_p comme données équivaut à l'équation :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{pn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

Noyau, Image : Si A est une matrice avec p lignes et n colonnes, son noyau $\text{Ker} A$ est l'espace des solutions du système homogène associé. Son image $\text{Im} A$ est par définition

l'espace-colonne. L'image est aussi caractérisée comme étant l'ensemble des colonnes

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$ pour lesquelles les contraintes de résolubilité sont satisfaites.

Co-Noyau, co-Image : ce sont le noyau et l'image de la matrice **transposée**. Ainsi :

$$\text{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{coIm}(A) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^p \quad \text{coKer}(A) \subset \mathbb{R}^p$$

On peut aussi interpréter la co-Image comme étant le transposé de l'espace-ligne de la matrice A . En ce qui concerne le co-Noyau, c'est essentiellement l'espace des « relations linéaires » entre les lignes de A . Toute combinaison linéaire des lignes de A qui donne la ligne nulle correspond à un élément du co-Noyau. Le co-Noyau peut aussi se voir comme étant lié aux contraintes qui apparaissent lorsque l'on fait la résolution de Gauss-Jordan du système : les coefficients de ces contraintes, transposées sous la forme de colonnes, donnent une base du co-Noyau. La dimension du co-Noyau est égale au nombre de contraintes apparaissant par réduction de Gauss-Jordan.

Théorème : Les espaces $\text{Ker}A$ et $\text{coIm}A$ sont en somme directe, ainsi que les espaces $\text{Im}A$ et $\text{coKer}A$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \text{Ker}A \oplus \text{coIm}A & \mathbb{R}^p &= \text{Im}A \oplus \text{coKer}A \\ n &= \dim \text{Ker}A + \text{rang}(A) & p &= \text{rang}(A) + \dim \text{coKer}A \end{aligned}$$

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est l'application linéaire associée à A alors la restriction de f à $\text{coIm}A$ établit un isomorphisme de $\text{coIm}A$ vers $\text{Im}A$. On peut utiliser cela pour montrer que A et la matrice carrée $A \cdot A^t$ ont le même rang (ainsi que l'autre matrice carrée $A^t \cdot A$), ce qui est important pour les algorithmes d'analyse numérique.

À noter avec attention : supposons que l'on travaille avec une application linéaire $f : V_1 \rightarrow V_2$ abstraite. Alors $\text{Ker}f = \{u \mid f(u) = 0\} \subset V_1$ et $\text{Im}f = \{v \mid \exists u f(u) = v\} \subset V_2$ sont intrinsèquement définis. Si de plus on choisit une base \mathcal{B}_1 de V_1 et \mathcal{B}_2 de V_2 on a des isomorphismes de V_1 avec $\mathbb{R}^{\dim V_1}$ et de V_2 avec $\mathbb{R}^{\dim V_2}$ d'où par les définitions ci-dessus un moyen de définir un $\text{coKer}f$ dans V_2 et un $\text{coIm}f$ dans V_1 . Mais cela dépend du choix des bases. On dit que ce n'est pas canonique. Cependant il y a bien un $\text{coKer}f$ qui existe canoniquement. La situation est d'ailleurs embrouillée par deux conventions possibles : on peut le voir soit comme un *quotient* de V_2 (c'est le choix de la plupart des livres), soit comme un sous-espace du *dual* de V_2 (c'est mon choix préféré et il y a de bonnes raisons pour cela), mais ces deux réalisations ne sont pas canoniquement isomorphes, elles sont en fait canoniquement duales l'une de l'autre. . . Même topo pour $\text{coIm}f$. . . Inutile de dire qu'il faudrait ici donner plus de détails sur ces questions de « dualité », mais je me retiens car cela fera le délice de vos cours d'algèbre dans la poursuite de vos études.

11 Inverses, Déterminants, Cramer. . .

Calcul de l'inverse d'une matrice : On rappelle que seules les matrices carrées

ont des inverses, et encore pas toujours. Pour déterminer si la matrice A est inversible (ce qui équivaut à ce qu'elle soit de rang maximal) on met la matrice A à côté de la matrice I et on fait la réduction de Gauss-Jordan sur A . Si la matrice est inversible, et seulement dans ce cas, sa forme complètement réduite (avec les coefficients des pivots normalisés à 1), est la matrice identité. La matrice qui apparaît alors à la place de I est la matrice A^{-1} . On utilise ce procédé lorsque l'on cherche la matrice de passage de la base canonique vers une nouvelle base : car elle est l'inverse de la matrice de passage de la nouvelle base vers la base canonique (en général on donne les vecteurs de la nouvelle base par leurs coordonnées dans la base canonique, donc cette matrice de passage est connue).

Déterminants : à toute matrice carrée A (à coefficients réels) est associée un nombre réel appelé « déterminant de A ». Je récapitule brièvement ce qui a été dit en cours à ce sujet. Il est non-nul si et seulement si la matrice est inversible. Le déterminant d'un produit est le produit des déterminants. On a des formules pour développer suivant une ligne ou suivant une colonne. Si on interchange deux lignes, ou deux colonnes, le déterminant change de signe. Le déterminant de la matrice transposée est identique au déterminant de A . Si la matrice se présente avec autour de la diagonale des blocs carrés successifs A_1, \dots, A_k et que des zéros en-dessous, et quoi que ce soit au-dessus, ou l'inverse, alors $\det A$ est le produit $\det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \dots \cdot \det A_k$. Par exemple si la matrice est triangulaire supérieure, ou triangulaire inférieure, son déterminant est le produit des éléments de la diagonale principale. Pour une matrice 3×3 on a vu la règle ad-hoc.

Co-matrice, formules de Cramer : la co-matrice B de A est telle que B_{ij} est $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice obtenue en supprimant de A la i ème ligne et la j ème colonne. On a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{coMat}(A)^t$$

et cela correspond à des formules exactes pour résoudre un système inversible avec n inconnues, et n équations, les formules de Cramer que je ne reproduis pas ici. Ce n'est pas au programme du partiel du 5 avril 2003.

Trace : la trace $\text{Tr}(A)$ d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux. On a $\text{Tr}(A \cdot B \cdot \dots \cdot W \cdot Z) = \text{Tr}(Z \cdot A \cdot B \cdot \dots \cdot W)$, dès que les matrices rectangulaires A, B, \dots, Z sont telles que les produits de matrices écrits plus haut existent et sont des matrices carrées (remarque : si l'un des produits existe et est carré alors l'autre existe aussi et est carré, mais ils ne sont pas forcément de la même taille).

Si A est une matrice carrée et S une matrice inversible de la même taille alors A et $S^{-1}AS$ ont la même trace et le même déterminant. On peut donc associer de manière canonique à tout endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie deux nombres réels, sa trace et son déterminant, puisque ces quantités pour une matrice associée dans une base donnée, ne dépendront pas du choix de la base.

Les cours portant sur la théorie des groupes, et ceux sur les équations différentielles, n'ont pas donné lieu à distribution de fiches aux étudiants.

Se reporter au site de l'auteur sur la toile pour les sujets d'examens et leurs corrigés.