Université de Nice – Sophia Antipolis

DEUG MI2, année 2001–2002, deuxième semestre

Théorie des Probabilités

Cours, Exercices, Examens (44 pages, 82 exercices)

©J.-F. Burnol, 2002.

Sont réunies ici les feuilles distribuées aux étudiants tout au long du semestre, et qui comprennent 82 exercices et un résumé du cours. Sont également inclus les sujets du partiel, de l'examen de juin, de l'examen de septembre, avec leurs corrigés.

Je remercie Michel Miniconi pour notre travail en commun sur cet enseignement.

Université de Nice, DEUG MI2 2001-2002, Théorie des Probabilités

Ceci est la première des feuilles de ce cours. L'idée est de disposer d'un bref résumé de points essentiels et aussi d'exercices pour les TDs. Attention, le résumé de cours n'est qu'un résumé: il est bref, et ne définit peut-être pas tout avec tous les détails que l'on pourrait souhaiter. Certains énoncés parmi ceux encadrés, ou en italique, auront fait l'objet en amphi d'une discussion plus détaillée.

Au premier abord calculer une probabilité, c'est faire un décompte des cas favorables parmi les cas possibles.

$$p = \frac{\#\{\textit{cas favorables}\}}{\#\{\textit{cas possibles}\}}$$

Si A est un ensemble, on note traditionnellement $\#A$ le nombre de ses éléments. Mais nous utiliserons plutôt (et surtout) la notation $|A|$. En Théorie des Probabilités, on dit que A est un **évènement**, on note Ω ("O-mé-ga") l'ensemble de tous les cas possibles et notre toute première formule est donc:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Ce point de départ simple mène très vite à des mathématiques plus complexes.

Quelle est la probabilité qu'une main de poker comporte trois coeurs et deux piques?

Soit tout d'abord S_N l'ensemble des **permutations** de N objets: l'ensemble des applications σ ('sigma') de $\{1, 2, \ldots, N\}$ vers lui-même qui soient à la fois *injectives* et *surjectives*.

Note: (difficile?; voir AH) En fait si $\sigma : \{1, 2, \ldots, N\} \to \{1, 2, \ldots, N\}$ est injective elle est aussi surjective. Et si elle est surjective elle est aussi injective. Cela est très spécial et est lié au fait qu'il n'y a qu'"un nombre fini d'éléments" dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$.

1. Le nombre de façons d'ordonner N objets est $|S_N| = N!$:

$$|S_N| = N! = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

2. Le nombre de façons de choisir k objets parmi N sans tenir compte de l'ordre est $C_N^k = \binom{N}{k}$

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \binom{N}{k}$$

Rappel: $(x+y)^N = \sum_{0 \le k \le N} C_N^k x^k y^{N-k}$. Mentionnons aussi les "coefficients du multinôme":

$$\binom{N}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{N!}{k_1! k_2! \ldots k_n!} \qquad (k_1 + \ldots + k_n = N)$$

Probabilités MI 2001-2002: feuille 1

On dispose de N objets et de n boîtes numérotées. Alors $\binom{N}{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ est le nombre de façons distinctes de répartir ces objets dans les boîtes sous la contrainte d'en disposer k_1 dans la première, k_2 dans la deuxième, ..., k_n dans la dernière.

Les Probabilités ce n'est pas uniquement dénombrer des possibilités.

Soit C le carré donné dans le plan cartésien par les équations $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. On choisit un point au hasard dans C. Quelle est la probabilité que ce point soit à une distance au plus 1 de l'origine des coordonnées?

Dans ce contexte la réponse est toujours donnée par:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

mais ici $|A|$ est **l'aire** de l'évènement A. Dans notre exemple on a donc $P(A) = \pi/4$. Il y a beaucoup en commun entre les situations discrètes (on dénombre) et les situations continues (on calcule des aires). En particulier si A et B sont deux **évènements**, on a les notations et les propriétés suivantes dans les deux cas (discret et continu):

$$\begin{aligned}
\text{Intersection } &= A \text{ et } B = AB \\
\text{Réunion } &= A \text{ ou } B \\
\text{Complémentaire de } A &= \Omega \setminus A = \overline{A} \\
0 \leq & P(A) \leq 1 \\
P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \\
P(A \text{ ou } B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\
AB = \emptyset \Rightarrow P(A \text{ ou } B) &= P(A) + P(B)
\end{aligned}$$

[1] On lance un dé. Quelle est la probabilité de sortir un as (1), ou un 2 ou un 5?

[2] On jette deux dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit paire?

[3] Quelle est la probabilité de ne pas avoir de coeur dans une main de Poker (jeu de 52, main de 5)?

[4] Soit Ω l'ensemble défini par les équations $0 \leq x$, $0 \leq y \leq \exp(-x)$. On choisit un point au hasard dans Ω. Quelle est la probabilité que $y \leq x$?

[5] On répartit 40 étudiants en deux groupes, le groupe A et le groupe B, avec 20 étudiants dans chacun des deux groupes. De combien de façons distinctes cela peut-il se faire? Et si on ne distingue plus les deux groupes et que l'on demande simplement "de combien de façons distinctes peut-on séparer 40 étudiants en deux groupes de 20?"

[6] Quelle est la probabilité d'avoir (au moins) une paire dans une main de poker? (main de 5 cartes, jeu de 52 cartes).

[7] On divise un groupe de 30 étudiants en 3 groupes de 10 étudiants. Quelle est la probabilité que les trois amis Frénégonde, Hubert et Archibald se retrouvent dans le même groupe? Quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent totalement séparés?

Comme nous l'avons vu en théorie des Probabilités il est question d'un 'univers' Ω et d'évènements A, B, C, ... qui sont en fait des sous-ensembles de Ω. Il est commode d'associer systématiquement à l'évènement A (B, C, ...) la question suivante *"l'évènement A est-il (oui ou non) réalisé?"*, question à laquelle au lieu de répondre par "oui" ou par "non" on va répondre par 1 ou par 0. Ainsi on associe à l'évènement A la **variable aléatoire $\mathbf{1}_A$** qui est une fonction sur Ω, prenant la valeur 1 sur A et la valeur 0 sur $\overline{A}$.

$$\forall \omega \in \Omega \quad \omega \in A \Rightarrow \mathbf{1}_A(\omega) = 1$$
$$\forall \omega \in \Omega \quad \omega \notin A \Rightarrow \mathbf{1}_A(\omega) = 0$$

Note: La terminologie de "variable aléatoire" est un peu déroutante: $\mathbf{1}_A$ n'est pas une variable, elle est une fonction. Et elle n'est pas 'aléatoire' au sens de 'mal définie', elle est tout-à-fait précisément définie.

Note: Il existe bien d'autres "variables aléatoires" que les $\mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_B$, ... En effet par **variable aléatoire** nous entendons n'importe quelle fonction sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ (à un niveau plus avancé on amende et rend plus précis cet énoncé initial qui nous suffira).

Les variables aléatoires $\mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_B$, ... portent un nom spécial: on les appelle **fonctions indicatrices** ou mieux encore en Théorie des Probabilités **épreuves de Bernoulli**. Toute fonction X sur Ω ne prenant que les valeurs 0 et 1 est la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ de l'évènement $A = \{X = 1\}$.

Note: Il va falloir vous habituer à des notations condensées au sens auto-évident que l'on n'explicitera pas toujours. Par exemple par $\{X = 1\}$ on veut dire $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\}$.

Il y a deux règles de calcul fondamentales:

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbf{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbf{1}_A(\omega)$$
$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbf{1}_{AB}(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_B(\omega)$$

mais que l'on écrira de manière plus simple encore:

$$\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A \qquad\qquad \mathbf{1}_{AB} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$$

Montrer $\mathbf{1}_{A \text{ ou } B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{AB}$. *Indication: comment s'écrit* $\overline{A \text{ ou } B}$ *en fonction de* $\overline{A}$ *et de* $\overline{B}$*?*

Si l'on compare à la formule $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ on constate une similarité frappante. En fait on a là la manifestation la plus simple d'un très important théorème général. Le voici dans une première formulation:

Théorème: *Soit A_1, A_2, ..., A_N et aussi B_1, B_2, ..., B_M des évènements. Soit par ailleurs α_1, ..., α_N, et aussi β_1, ..., β_M des nombres réels. On a:*

$$\left(\forall \omega \in \Omega \quad \sum_{1 \le i \le N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega) = \sum_{1 \le j \le M} \beta_j \mathbf{1}_{B_j}(\omega)\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\sum_{1 \le i \le N} \alpha_i P(A_i) = \sum_{1 \le j \le M} \beta_j P(B_j)\right)$$

Si le Professeur est courageux il démontrera ce grand Théorème en amphi (en utilisant uniquement l'une des propriétés fondamentales des probabilités: $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont disjoints).

On dit qu'une variable aléatoire est une variable **simple** si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

Si X est simple et que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ sont les valeurs distinctes qu'elle prend, rangées par exemple par ordre croissant, alors on a l'identité:

$$X = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j \cdot \mathbf{1}_{A_j}$$

où l'on a noté A_j l'évènement $\{X = x_j\}$.

On peut donc écrire d'au moins une façon X sous la forme $\sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ avec des évènements A_i et des nombres réels α_i. Par le théorème la quantité $\sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i P(A_i)$ ne dépend pas du choix d'une telle écriture, elle ne dépend que de X. On la désigne sous le nom d'**espérance de** X et on la note $\mathbf{E}(X)$ ou même seulement $\mathbf{E}X$. Si l'on utilise l'écriture canonique $X = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j \cdot \mathbf{1}_{X = x_j}$ on obtient $\mathbf{E}(X) = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j \cdot P(X = x_j)$.

Soit X une variable aléatoire simple et $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ les valeurs distinctes qu'elle prend. Pour toute écriture $X = \sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ on a

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j \cdot P(X = x_j) = \sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i P(A_i)$$

Dans le cas où Ω est un ensemble fini $\{\omega_1, \ldots, \omega_T\}$ on a aussi

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{1 \leq k \leq T} X(\omega_k) \cdot P(\{\omega_k\})$$

Note: Dans la dernière phrase $P(\{\omega_k\})$ est la probabilité de l'évènement $\{\omega_k\}$ qui est le sous-ensemble de Ω ne comportant comme unique élément que ω_k. Bien sûr, nous avons dans la **feuille 1** uniquement envisagé la situation où tous les évènements élémentaires $\{\omega_k\}$ sont considérés équiprobables, mais il n'y a pas de raison de se limiter à ces situations. Dans le cas équiprobable on a $\forall k \; P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ et donc $\mathbf{E}(X)$ est simplement la moyenne de la fonction X. Dans le cas général il s'agit d'une moyenne pondérée.

Théorème: *(***linéarité de l'espérance***) Si X et Y sont des variables aléatoires et α et β des nombres réels, on a :*

$$\mathbf{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\, \mathbf{E}(X) + \beta\, \mathbf{E}(Y)$$

[8] On note $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (différence symétrique). Montrer son associativité en utilisant les fonctions indicatrices: $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

[9] Montrer la relation générale $P(A \cdot B) = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cdot \overline{B})$.

[10] Montrer la relation générale (formule d'inclusion-exclusion):

$$P(A \text{ ou } B \text{ ou } C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

[11] Soit $X = \mathbf{1}_A$ une épreuve de Bernoulli. Que vaut $\mathbf{E}(X)$? $\mathbf{E}(X^2)$? $\mathbf{E}(X^3)$?

On définit la **covariance** de deux variables aléatoires X et Y par

$$\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

[12] Soient $X = \mathbf{1}_A$ et $Y = \mathbf{1}_B$. Exprimer $\mathbf{cov}(X, Y)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et de $P(AB)$.

[13] Montrer $\mathbf{cov}(X + Y, X + Y) = \mathbf{cov}(X, X) + 2\mathbf{cov}(X, Y) + \mathbf{cov}(Y, Y)$.

Les exercices qui suivent sont difficiles:

[14] Une regrettable erreur informatique au services des Impôts résulte en un mauvais étiquetage des envois de 5 avis d'imposition à des contribuables: les 5 adresses ont été aléatoirement échangées lors de l'impression sur les enveloppes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lettres sur les 5 qui ont été correctement expédiées à leurs bons destinataires. Quelle est l'espérance de X?

[15] Cinq personnes se retrouvent à une soirée. Soit X le nombre total de jours de la semaine qui sont des jours de naissance pour une au moins des cinq personnes. Quelle est l'espérance de X?

Appendice à la feuille 2. Nous décrivons une démonstration de:

Théorème: *Soit A_1, A_2, ..., A_N et aussi B_1, B_2, ..., B_M des évènements. Soit par ailleurs α_1, ..., α_N, et aussi β_1, ..., β_M des nombres réels. On a:*

$$\left(\forall\omega\in\Omega \quad \sum_{1\le i\le N}\alpha_i\mathbf{1}_{A_i}(\omega)=\sum_{1\le j\le M}\beta_j\mathbf{1}_{B_j}(\omega)\right) \quad\Longrightarrow\quad \left(\sum_{1\le i\le N}\alpha_i P(A_i)=\sum_{1\le j\le M}\beta_j P(B_j)\right)$$

En effet à toute suite σ de $N+M$ chiffres binaires (0 ou 1) σ_1, ..., σ_{N+M} nous associons l'évènement C_σ des $\omega\in\Omega$ avec $\mathbf{1}_{A_i}(\omega)=\sigma_i$ $(1\le i\le N)$ et $\mathbf{1}_{B_j}(\omega)=\sigma_{N+j}$ $(1\le j\le M)$. Les C_σ sont deux-à-deux disjoints et leur union est Ω. De plus pour chaque A_i (ou B_j) donné, chaque C_σ lui est soit disjoint soit inclus. Par la propriété fondamentale (axiome) que la probabilité d'une union disjointe est la somme des probabilités on a donc

$$P(A_i)=\sum_{\{\sigma|\ C_\sigma\subset A_i\}}P(C_\sigma)\qquad P(B_j)=\sum_{\{\sigma|\ C_\sigma\subset B_j\}}P(C_\sigma)$$

Il est possible que certains des C_σ soient vides. On convient dans ce qui suit de ne plus les prendre en compte: seuls les indices σ avec $C_\sigma\neq\emptyset$ sont utilisés. Cela ne change pas la validité des formules ci-dessus (puisque $P(\emptyset)=0$ ce qui d'ailleurs découle de $P(\emptyset\text{ ou }\emptyset)=P(\emptyset)+P(\emptyset)$). Question: et si A_i est vide? (voir aussi plus bas).

Notons $E=\sum_{1\le i\le N}\alpha_i P(A_i)$ et $F=\sum_{1\le j\le M}\beta_j P(B_j)$. On a:

$$E=\sum_\sigma x_\sigma P(C_\sigma)\qquad F=\sum_\sigma y_\sigma P(C_\sigma)$$

avec

$$x_\sigma=\sum_{\{i|\ A_i\supset C_\sigma\}}\alpha_i\qquad y_\sigma=\sum_{\{j|\ B_j\supset C_\sigma\}}\beta_j$$

Remarque: on utilise des règles tacites ici. Par exemple imaginons que tous les B_j soient vides. Dans ce cas $\{j|\ B_j\supset C_\sigma\}=\emptyset$ et il faut comprendre $y_\sigma=0$ pour tout σ. Et la formule pour F est bien correcte.

On va montrer $x_\sigma=y_\sigma$ et on aura terminé. Pour cela prenons $\omega\in C_\sigma$. Alors

$$x_\sigma=\sum_i\alpha_i\mathbf{1}_{A_i}(\omega)=\sum_j\beta_j\mathbf{1}_{B_j}(\omega)=y_\sigma$$

QED.

Et si tous les A_i et tous les B_j sont vides? la démonstration est-elle valable?

Récapitulons. Nous avons un univers Ω, des évènements A, B, C, ..., qui sont des sous-ensembles de Ω, des variables aléatoires X, Y, ..., qui sont des fonctions sur Ω. Parmi elles les fonctions indicatrices $\mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_B$, ...jouent un rôle spécial. Par ailleurs à chaque évènement A est associé sa probabilité $P(A)$. On a $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont disjoints, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

À toute variable aléatoire simple X (c'est-à-dire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs) on a associé son espérance $\mathbf{E}X$ qui vaut $\sum p_k \cdot x_k$ avec les x_k les valeurs distinctes prises par X et $p_k = P(X = x_k)$. Remarquez que $\sum p_k = 1$ de sorte que $\mathbf{E}X$ est une sorte de moyenne de X. En particulier lorsque X est une variable certaine (il existe une constante c avec $P(X = c) = 1$) alors $\mathbf{E}X = c$. On connaît les propriétés fondamentales:

$$\mathbf{E}(\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \ldots) = \alpha \mathbf{E}X + \beta \mathbf{E}Y + \gamma \mathbf{E}Z + \ldots$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = P(A)$$

Pour cette histoire d'espérance on n'a pas utilisé encore les propriétés (axiome) $0 \leq P(A) \leq 1$ des probabilités. Une conséquence en est:

$$X \geq 0 \implies \mathbf{E}X \geq 0 \qquad\qquad X \geq Y \implies \mathbf{E}X \geq \mathbf{E}Y$$

Démonstration: Si $X \geq 0$, ce qui veut dire $\forall \omega \; X(\omega) \geq 0$, alors les x_k sont ≥ 0 et il en est donc de même de leur moyenne pondérée $\mathbf{E}X$. Pour $X \geq Y \Rightarrow \mathbf{E}X \geq \mathbf{E}Y$ on n'a qu'à considérer $Z = X - Y$ et appliquer ce qui précède (grâce à la linéarité de l'espérance). On notera qu'il n'est pas immédiat de montrer $\mathbf{E}X \geq \mathbf{E}Y$ en partant des formules $\mathbf{E}X = \sum_k x_k \cdot P(X = x_k)$, $\mathbf{E}Y = \sum_l y_l \cdot P(Y = y_l)$ ce qui confirme que définir l'espérance uniquement comme moyenne des valeurs de X ou de Y n'est pas un bon point de départ.

Réciproquement si on sait $X \geq 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{E}(X) \geq 0$, alors $P(A) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A) \geq 0$, et comme $P(A) + P(\overline{A}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{\overline{A}}) = \mathbf{E}(1) = P(\Omega)$ on a $0 \leq P(A) \leq P(\Omega)$. Donc sous la condition de normalisation $P(\Omega) = 1$ les deux types de propriétés $\forall A \; 0 \leq P(A) \leq 1$ et $\forall X \; X \geq 0 \Rightarrow \mathbf{E}(X) \geq 0$ sont équivalents.

À partir de cette propriété $X \geq 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{E}(X) \geq 0$ on peut déduire un certain nombre de conséquences utiles (le plus simple est laissé en exercice).

$$\alpha \leq X \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq \mathbf{E}(X) \leq \beta$$
$$|\mathbf{E}(X)| \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}$$

La deuxième inégalité $|\mathbf{E}(X)| \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}$ est loin d'être une évidence! Tout d'abord remarquons que X^2 est à valeurs positives donc $\mathbf{E}(X^2) \geq 0$ et $\sqrt{\mathbf{E}(X^2)}$ a bien un sens. Ensuite pour l'établir il suffit de montrer $\mathbf{E}(X)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)$. Mais (à vérifier!):

$$\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}X)^2\right) \geq 0$$

et le ≥ 0 provient du fait que $(X - \mathbf{E}X)^2$ est une variable aléatoire à valeurs positives. On appelle **variance** de X et l'on note $\mathbf{V}(X)$ le nombre réel $\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}X)^2\right)$. Il s'agit donc de $\mathbf{cov}(X, X)$ avec les notations de la **feuille 2**. On appelle **écart-type** de X et l'on note σ_X ou $\sigma(X)$ le nombre réel positif ou nul $\sigma_X = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) \geq 0 \\
\sigma_X &= \sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)} = \sqrt{\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2} \\
\mathbf{cov}(X, Y) &= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) \\
&= \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}X)Y\right) = \mathbf{E}\left(X(Y - \mathbf{E}Y)\right) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)\right)
\end{aligned}$$

La dernière ligne est un exercice. Ce qui vient n'en est pas un, c'est un résultat important un peu moins évident, on le cite pour mémoire ici, on y reviendra:

$$-\sigma(X)\sigma(Y) \leq \mathbf{cov}(X, Y) \leq +\sigma(X)\sigma(Y)$$

Note importante: il faut absolument lire ce qui suit (en particulier pour avoir en tête les trois types de Ω que nous rencontrerons: Ω fini, Ω infini mais dénombrable, Ω une étendue continue (intervalle, surface, volume, etc...)), mais peut-être sans trop se préoccuper d'en comprendre les aspects les plus obscurs, qui ne sont éclaircis qu'à un niveau de deuxième cycle.

À partir de $X \geq 0 \Rightarrow \mathbf{E}(X) \geq 0$ on peut considérablement étendre la théorie. En effet pour X une variable aléatoire quelconque (pas nécessairement restreinte à ne prendre qu'un nombre fini de valeurs) on peut opter pour définir $\mathbf{E}X$ comme la borne supérieure de $\mathbf{E}Y$ où Y parcourt les variables simples vérifiant $Y \leq X$ (note: il faut que X soit bornée inférieurement, par exemple $X \geq 0$ pour qu'on puisse au moins trouver un Y qui vérifie $Y \leq X$.) Cela donne une définition (qui peut mener à $\mathbf{E}X = +\infty$), mais cela marche-t-il? (au sens par exemple d'avoir encore la linéarité de l'espérance et des théorèmes agréables de passage à la limite).

La découverte essentiellement due à Borel et Lebesgue (début du vingtième siècle; et plus tard Kolmogorov) c'est que la réponse est OUI, à condition d'imposer aux probabilités l'axiome dit d'**additivité dénombrable**:

$$P(A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

lorsque les A_j, $j \in \mathbb{N}$ sont deux-à-deux disjoints (la somme à droite est une somme infinie).

Avec cet axiome on peut définir $\mathbf{E}(|X|) \in [0, \infty[\cup\{\infty\}$ comme ci-dessus pour toutes les fonctions X sur Ω qui sont des limites de variables simples. Lorsque $\mathbf{E}(|X|) < \infty$ alors $\mathbf{E}(X)$ existe aussi. Et la propriété de linéarité est satisfaite. Nous venons de résumer la **Théorie de l'Intégration**

de Lebesgue. En effet la théorie de l'intégration est dorénavant développée dans le cadre des idées de Lebesgue et la notion d'espérance en Théorie des Probabilités en est une application. Nous prenons note de la notation que l'on utilise à un niveau plus avancé, et qui résume ce qui précède:

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)}$$

Revenons sur terre.

Lorsque Ω est un ensemble fini, à chacun des ses éléments ω est associé un poids $p_\omega \geq 0$, $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$ et $\mathbf{E}(X) = \sum_\omega p_\omega \cdot X(\omega)$ (attention à ne pas confondre cette dernière expression avec l'autre, tout aussi valable, $\mathbf{E}(X) = \sum_k x_k P(X = x_k)$. Comprenez-vous pourquoi les deux donnent le même résultat?).

Idem lorsque Ω n'est certes pas fini mais "équipotent" à (en bijection avec) $\mathbb{N}$ (on dit aussi "dénombrable"; attention un ensemble fini est aussi dit "dénombrable"). Dans ce cas on a toujours pour chaque ω un $p_\omega \geq 0$ et la condition $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$. Mais il s'agit ici d'une somme infinie. On a $\mathbf{E}(X) = \sum_\omega p_\omega \cdot X(\omega)$ (lorsque la somme est absolument convergente).

Nous avons vu aussi que nous pouvons parler de probabilités lorsque Ω est par exemple un disque ou un rectangle, plus généralement une région dans le plan. Dans ce cas nous avons associé à tout évènement $A \subset \Omega$ la probabilité $P(A) = |A|/|\Omega|$, avec $|A| = \int_A dxdy =$ aire de A. Au lieu d'utiliser l'élément d'aire $dxdy$ (divisé par $|\Omega|$) rien n'interdit de prendre à la place $g(x, y)dxdy$ pour une certaine **densité** $g(x, y)$ ce qui veut dire:

$$g(x, y) \geq 0 \qquad\qquad \int_\Omega g(x, y)dxdy = 1$$

Il n'est plus question alors de p_ω puisque l'aire d'un point est nulle! On est forcé de prendre $p_\omega = 0$ et du coup la formule $\mathbf{E}(X) = \sum_\omega p_\omega \cdot X(\omega)$ n'a plus aucun sens.

On a $P(A) = \int_A g(x, y)dxdy$. Mais restreindre l'intégrale à A c'est exactement la même chose que calculer l'intégrale sur Ω tout entier de $\mathbf{1}_A(x, y)$ (qui vaut 1 sur A et 0 ailleurs):

$$P(A) = \int_A g(x, y)dxdy = \int_\Omega \mathbf{1}_A(x, y)g(x, y)dxdy$$

Si l'on compare à la formule $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = P(A)$ on voit comment il faut définir $\mathbf{E}(X)$ en général: X est une fonction $\Omega \to \mathbb{R}$ et

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \int_\Omega X(x, y)g(x, y)dxdy}$$

D'ailleurs il n'y a aucune raison de se restreindre à des domaines Ω dans le plan: on peut prendre $\Omega \subset \mathbb{R}$ (une seule coordonnée), dans $\mathbb{R}^3$ (trois coordonnées), etc...

Pour résumer lorsque Ω est un ensemble dénombrable (fini ou infini) alors $\mathbf{E}(X)$ est une **moyenne pondérée** (éventuellement infinie) des valeurs de X, et lorsque Ω est un domaine continu alors $\mathbf{E}(X)$ est l'intégrale de X sur Ω par rapport à une **densité de probabilité**, autrement dit $\mathbf{E}(X)$ est à nouveau une moyenne de X mais en un sens généralisé (puisque celle-ci peut prendre une infinité de valeurs distinctes, même un continuum de valeurs distinctes). Le cadre général est abordé en deuxième cycle et s'appelle "théorie de l'intégration de Lebesgue" et l'**axiome d'additivité dénombrable** y joue un rôle essentiel. Deux étapes fondatrices ayant mené à l'approche moderne de la théorie des probabilités sur le modèle de la théorie de l'intégration de Lebesgue (1904 et après) sont un article de 1909 de Borel et un livre de 1933 de Kolmogorov.

[16] On lance N fois une pièce. On note le résultat de ces lancers sous la forme d'une suite ω de N 0 (=Face) ou 1 (=Pile). On utilise comme modèle probabiliste l'ensemble Ω de ces 2^N ω possibles que l'on considère tous équiprobables. Soit X_j le résultat du lancer numéro j (1 si Pile, 0 si Face). Que vaut $\mathbf{E}(X_j)$?

[17] (suite) Soit Y le nombre total de piles parmi les N lancers. Que vaut $P(Y = k)$, $0 \leq k \leq N$?

[18] (suite) Montrer $Y = X_1 + \ldots + X_N$ et en déduire la valeur de $\mathbf{E}(Y)$. Soit Z le nombre total de faces. Que vaut $Y + Z$? indiquer une autre approche au calcul de $\mathbf{E}(Y)$.

[19] (suite) En déduire $\sum_{k=0}^{k=N} k \, \frac{1}{2^N}\binom{N}{k} = \frac{N}{2}$. Donner une autre démonstration par un calcul direct (que se passe-t-il si $k \to N - k$?).

[20] (suite) Montrer $\mathbf{cov}(X_j, X_k) = 0$ pour $j \neq k$, et en déduire la valeur de $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{cov}(Y, Y)$ en fonction de N.

[21] (suite) Que vaut $\sum_{k=0}^{k=N} (k - \frac{N}{2})^2 \, \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}$?

[22] (suite) Que vaut $\sum_{k=0}^{k=N} k^2 \, \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}$?

[23] (**Problème**) Ce problème assez ambitieux fait suite aux exercices précédents. L'objectif est de prouver par une méthode probabiliste:

$$\sum_{k=0}^{k=N} k^3 \binom{N}{k} = \frac{N^2(N+3)}{8} \cdot 2^N$$

Voici les indications: ce qu'on veut c'est calculer $\mathbf{E}(Y^3)$. Pour cela on exprime explicitement Y^3 comme une somme de X_j^3, de $X_{j_1}^2 X_{j_2}$ et $X_{j_1} X_{j_2}^2$ $(j_1 < j_2)$, et de $X_{j_1} X_{j_2} X_{j_3}$ avec $j_1 < j_2 < j_3$. On calcule les espérances de ce petit monde (en remarquant que pour une épreuve de Bernoulli $X^k = X$, $k \geq 1$ et par ailleurs que $\mathbf{E}(X_1 X_2) = 1/4$, $\mathbf{E}(X_1 X_2 X_3) = 1/8$), on combine tout avec les bons coefficients $\binom{N}{1}$, $\binom{N}{2}$, $\binom{N}{3}$, on simplifie et, miracle, on obtient au bout de quelques semaines la formule demandée.

Résumé du cours. Le cours a porté sur la notion d'**indépendance**. Lorsqu'un premier espace probabilisé Ω_1 (que l'on supposera ne comportant qu'un nombre fini d'évènements élémentaires $\omega_1, \ldots, \omega_T$) correspond à une épreuve, et un autre Ω_2 à une autre épreuve, 'indépendante' (en un sens intuitif) de, sans rapport aucun avec, la première, il est possible de modéliser ces deux épreuves simultanément par l'**espace-produit** $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Au niveau ensembliste il s'agit du produit cartésien. Au niveau des probabilités: si $q_1, \ldots, q_T$ (resp. $r_1, \ldots r_S$) sont les poids élémentaires correspondant à Ω_1 (resp. à Ω_2) alors les poids élémentaires correspondant à Ω sont définis comme étant les $q_j \cdot r_k$.

$$\sum_{1\leq j\leq T,\, 1\leq k\leq S} q_j \cdot r_k = \left(\sum_{1\leq j\leq T} q_j\right) \cdot \left(\sum_{1\leq k\leq S} r_k\right) = 1$$

Certains espaces probabilisés (exemple d'une carte tirée parmi 52) sont en fait des espaces produits, sans qu'ils aient été définis comme tel a priori. Une discussion est donnée du fait qu'il est extrêmement important de comprendre que en aucun cas Ω ne doit être visualisé comme une extension de Ω_1 (resp. Ω_2). Par contre, à tout évènement C_1 sur Ω_1 est associé canoniquement un évènement de Ω à savoir $A_1 = C_1 \times \Omega_2$. L'association $C_1 \mapsto A_1$ est tellement naturelle que parfois on utilise la même notation pour $C_1 \subset \Omega_1$ et pour $A_1 \subset \Omega$. Cette association respecte les probabilités, les intersections, les unions, etc...: elle réalise une injection de l'"algèbre des évènements" $\mathcal{A}_1$ de Ω_1 comme sous-algèbre de l'algèbre des évènements $\mathcal{A}$ de Ω. Et de même $\mathcal{A}_2$ est plongée dans $\mathcal{A}$. Une démonstration est donnée de la formule fondamentale

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

lorsque $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Indépendamment de la notion d'espace-produit on définit l'**indépendance** de deux évènements A et B par la propriété:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Sur un espace produit, tout évènement portant sur la première coordonnée est donc indépendant de tout évènement portant sur la deuxième coordonnée. On définit l'indépendance de deux variables aléatoires X et Y comme signifiant que tout évènement $\{a \leq X \leq b\}$ est indépendant de tout évènement $\{c \leq Y \leq d\}$. Lorsque X et Y ne prennent chacune qu'un nombre fini de valeurs (variables simples), on explique que cela équivaut à vérifier un nombre fini de contraintes:

$$P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

pour les valeurs x prises par X et y prises par Y. Sur un espace produit toute fonction de la première coordonnée est indépendante de toute fonction de la deuxième coordonnée. Une démonstration (pour les variables simples) utilisant les fonctions indicatrices est donnée de la formule fondamentale

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

lorsque X et Y sont indépendantes. On insiste sur le fait que cela (que l'on appelle **non-corrélation**) est une conséquence de l'indépendance mais que l'inverse est faux. On évoque le fait que X et Y sont indépendantes si et seulement si on a

$$\mathbf{E}(ZT) = \mathbf{E}(Z)\mathbf{E}(T)$$

pour tous les Z qui peuvent s'écrire sous la forme $f(X)$ (par exemple X^5, $\cos(X)$, etc...) et tous les T de la forme $g(Y)$. Fin du cours du 11 mars 2002.

[24] On lance deux dés, et on modélise cette situation de la manière suivante: Ω est l'ensemble des 36 couples (a, b) avec $1 \leq a \leq 6$ et $1 \leq b \leq 6$ chacun se voyant attribuer le poids élémentaire $1/36$. Montrer que Ω peut se voir comme espace produit correspondant au résultat du premier lancer (a) et du deuxième lancer (b).

[25] On tire deux cartes C_1 et C_2 d'un jeu de 52, et l'ordre compte. On suppose que l'on a numéroté les 52 cartes de 1 à 52 (une fois pour toutes) de sortes que C_1 et C_2 peuvent se voir chacune comme le numéro dans $\{1, \ldots, 52\}$ attribué à la carte. On modélise la situation par l'ensemble Ω des couples (a, b), $1 \leq a \leq 52$, $1 \leq b \leq 52$, $a \neq b$ en attribuant le même poids à chaque couple. Que vaut pour (a, b) donné $P((C_1, C_2) = (a, b))$? Soit $\Omega_1 = \{1, \ldots, 52\}$ correspondant à la première carte. Quels sont les poids élémentaires sur Ω_1? De même soit Ω_2 pour la deuxième carte. L'égalité $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ est-elle valable?

[26] (suite) Soit X la variable aléatoire sur Ω définie par $X((a, b)) = a$. On rappelle que:

$$1 + 2 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

Que vaut $\mathbf{E}(X)$? De même soit Y la variable aléatoire définie par $Y((a, b)) = b$. Que vaut $\mathbf{E}(Y)$?

On admet la formule

$$1^2 + 2^2 + \ldots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

[27] (suite) Que vaut $\mathbf{E}(X^2)$? Que vaut $\mathbf{V}(X)$? $(= 53 \times 17/4)$.

[28] (suite) On rappelle la formule $\mathbf{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = P(AB) - P(A)P(B)$. Soit A_j l'évènement $\{X = j\}$ et soit B_k l'évènement $\{Y = k\}$. Montrer

$$\mathbf{cov}(\mathbf{1}_{A_j}, \mathbf{1}_{B_k}) = \frac{1}{52 \times 52 \times 51} \quad \text{si } j \neq k \quad \text{et} \qquad \mathbf{cov}(\mathbf{1}_{A_j}, \mathbf{1}_{B_j}) = \frac{-1}{52 \times 52}$$

Montrer

$$\mathbf{cov}(\mathbf{1}_{A_j}, \mathbf{1}_{A_k}) = \frac{-1}{52 \times 52} \quad \text{si } j \neq k \quad \text{et} \qquad \mathbf{cov}(\mathbf{1}_{A_j}, \mathbf{1}_{A_j}) = \frac{51}{52 \times 52}$$

[29] (suite) Montrer

$$\forall j, k \qquad \mathbf{cov}(\mathbf{1}_{A_j}, \mathbf{1}_{B_k} + \frac{1}{51}\mathbf{1}_{A_k}) = 0$$

[30] (suite) En déduire $\mathbf{cov}(X, Y + \frac{1}{51}X) = 0$ et la valeur de $\mathbf{cov}(X, Y)$ $(= -53/12)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

[31] (suite) Montrer

$$\mathbf{E}(XY) = \frac{53 \times 79}{6}$$

[32] (fin) En sommant séparément sur les couples (a, b) avec $a > b$ et avec $b > a$ montrer $\mathbf{E}(XY) = 2\sum_{1 \leq k < j \leq 52} \frac{jk}{52 \times 51}$. En déduire la valeur de $\sum_{1 \leq j \leq 52} j^3$.

Résumé du cours du 18 mars 2002. Un **arbre** T est composé de **noeuds** reliés par des **liens**. Le noeud-souche donne naissance à un certain nombre de noeuds descendants de **première génération** qui eux-mêmes donnent naissance à des noeuds de **deuxième génération**, etc... Les branches ainsi formées ne se rejoignent jamais. Le nombre de liens issus de chaque noeud peut varier d'un noeud à l'autre, et lorsque il n'y en a aucun on dit que le noeud est **terminal**. Lorsque l'on considère un noeud α il y a une unique succession de liens qui y mène (sans retour en arrière en partant de la souche), on notera $\omega(\alpha)$ ce chemin. Lorsque α est terminal on dit que ω est maximal. Par ailleurs chaque noeud α peut être considéré comme la souche d'un sous-arbre $T(\alpha)$ de T.

Un chat poursuivi par un chien monte sur l'arbre sans jamais revenir en arrière et ce jusqu'à ce qu'il ait atteint un noeud terminal. Quelle est la probabilité pour le chat de s'immobiliser en tel ou tel noeud terminal? Pour modéliser cela on associe à chaque lien L un coefficient $q(L)$ avec les contraintes suivantes: les $q(L)$ sont ≥ 0 et pour chaque noeud α la somme des $q(L)$ sur tous les liens issus de α vers ses descendants de la génération suivante vaut 1 (plus tard ces coefficients seront interprétées comme des "probabilités conditionnelles"). À tout chemin ω issu de la souche et sans retour en arrière on associe un poids $p(\omega)$ égal au produit des $q(L)$ pris sur les liens L qui constituent ω. Nous avons démontré en cours:

Théorème. Soit Ω l'ensemble des chemins maximaux affectés des poids $p(\omega)$. Alors Ω est un espace probabilisé, autrement dit

$$\sum_{\omega \text{ chemin maximal}} p(\omega) = 1$$

La démonstration proposée est une démonstration par récurrence qui consiste à vérifier que si le théorème est vrai pour un arbre T il est aussi vrai pour un arbre construit à partir de T en ajoutant des liens à l'un de ses noeuds terminaux.

À tout noeud α on peut associer l'**évènement** $A(\alpha)$: "le chemin maximal ω passe par α". On rappelle que à α est associé le chemin (partiel) $\omega(\alpha)$ partant de la souche et arrivant à α et que à ce chemin est associé un poids $p(\omega(\alpha))$. Nous avons démontré en cours:

Théorème. On a

$$P(A(\alpha)) = p(\omega(\alpha))$$

Supposons que β soit un descendant (direct) de α et soit $L = \alpha \to \beta$ le lien allant de α vers β. Soit $A = A(\alpha)$ et $B = A(\beta)$. Nous avons démontré en cours:

$$q(\alpha \to \beta) = \frac{P(B)}{P(A)}$$

Attention cela n'a pas de sens si $P(A) = 0$ ce qui n'est pas exclu par notre formalisme. Si $P(A) > 0$ et $B \subset A$ on appelle "probabilité conditionnelle de B sachant A" la quantité $P(B)/P(A)$.

Plus généralement si A et B sont deux évènements dans un espace probabilisé Ω et si $P(A) > 0$ on appelle "probabilité conditionnelle de B sachant A" et on note $P(B \mid A)$ la quantité $P(B \text{ et } A)/P(A)$.

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \text{ et } A)}{P(A)}$$

Le cours s'est achevé sur la considération d'un **arbre binaire**: chaque noeud a exactement deux descendants, et l'un des liens a un coefficient p et l'autre q avec $p + q = 1$. On suppose pour simplifier de plus que p et q sont les mêmes à chaque noeud. Alors un arbre avec N générations correspond à un jeu de N Pile ou Face. Chaque chemin maximal ω correspond à N Pile ou Face et son poids est $p^k q^{N-k}$ où k est le nombre de "Pile". La formule $\sum_{\omega \text{ chemin maximal}} p(\omega) = 1$ devient $\sum_k \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = 1$ puisqu'il y a exactement $\binom{N}{k}$ chemins comportant exactement k "Pile". Cette dernière formule est un cas particulier de la formule du binôme pour $(p+q)^N$. **Fin du résumé du cours**.

Dans les exercices qui suivent certains résultats sont faux ou n'ont pas de sens si certaines probabilités sont nulles.

[33] Montrer $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.

[34] Soit $H_1, \ldots, H_N$ et A des évènements tels que si A est réalisé alors exactement l'un des H_k est réalisé (si $\overline{A}$ est réalisé aucune hypothèse n'est faite sur les H_k). Montrer:

$$\sum_k P(H_k \text{ et } A) = P(A)$$

et en déduire $\sum_k P(H_k|A) = 1$.

[35] (suite; **formule des probabilités totales**) Montrer sous les hypothèses précédentes:

$$P(A) = \sum_k P(A|H_k)P(H_k)$$

[36] (suite; **formule de Bayes**) Montrer sous les hypothèses précédentes:

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_k P(A|H_k)P(H_k)}$$

Autrement dit si on connaît les probabilités conditionnelles de A sous chacune des hypothèses mutuellement exclusives H_k on connaît les probabilités de réalisation de chacune de ces hypothèses sachant A.

[37] On dispose de deux urnes, l'une (on ne sait pas laquelle) contient 6 boules blanches et 4 boules noires et l'autre comporte 4 boules blanches et 6 boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une première boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ? On constate qu'elle est blanche et on tire de la même urne une deuxième boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit à nouveau blanche ?

[38] On dispose de cinq urnes. Quatre d'entre elles comportent chacune 15 boules blanches et 15 boules noires. La dernière urne comportent 20 boules blanches et 10 boules noires. On choisit une urne au hasard puis une boule au hasard et on constate que la boule est blanche. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été la cinquième ?

[39] On considére N urnes contenant chacune b boules blanches et r boules rouges. On tire une boule au hasard de la première urne et on la met dans la seconde. Puis on tire une boule au hasard de la deuxième urne et on la met dans la troisième, et ainsi de suite. Quelle est la probabilité que la boule tirée de la dernière urne soit blanche ? Décrire un arbre binaire associé à cette situation.

[40] Une urne contient b_1 boules blanches et r_1 boules rouges et une deuxième urne contient b_2 boules blanches et r_2 boules rouges. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité que la boule soit blanche ? On constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été l'urne '1' ?

[41] Faire l'exercice précédent avec trois urnes.

Résumé du cours du 25 mars 2002. Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_N$ est une chaîne décroissante d'évènements alors:

$$P(A_N) = P(A_N \mid A_{N-1}) \ldots P(A_2 \mid A_1) P(A_1)$$

Cela montre que dans la construction de la feuille précédente des poids $p(\omega)$ associés aux chemins sur un arbre, la formule $p(\omega) = \prod_{\text{liens} \subset \omega} q(L)$ était imposée par l'idée de vouloir considérer les $q(L)$ comme des probabilités conditionnelles. Deux exemples sont étudiés de construction et d'utilisation d'arbres de possibilités pour résoudre des problèmes de probabilités conditionnelles:

1. On considère une population pour laquelle il y a une chance sur vingt pour un homme d'être daltonien, et une chance sur quatre-cents pour une femme d'être daltonienne. Par ailleurs il y a 49% d'hommes et 51% de femmes. Quelle est la proportion de Daltoniens dans cette population? Quelle est la probabilité conditionnelle pour une personne d'être un homme sachant qu'elle est daltonienne?

2. Des patients hospitalisés présentent tous les mêmes symptômes d'une maladie: mais on estime que seulement 60% de ces patients sont réellement atteints par cette maladie. On soumet ces patients à un test sanguin qui donne un résultat positif sur 70% des personnes malades, et aussi sur 10% des personnes non-malades. Quelle est la probabilité conditionnelle d'être malade si le test est positif? On applique un deuxième test indépendant du premier qui donne un résultat positif sur 80% des malades et 15% des non-malades. Quelle est la probabilité conditionnelle d'être malade si les deux tests sont positifs?

Pour résoudre le deuxième problème il faut supposer quelque chose de plus fort que la simple indépendance des deux tests: il faut supposer leur indépendance conditionnellement au fait d'être ou de ne pas être malade. Le problème peut alors être résolu, soit en construisant un arbre avec trois générations, soit avec seulement deux si on applique l'astuce de considérer un test virtuel qui est positif si et seulement si les deux tests réels le sont. La formule de Bayes permet si on le désire de ne pas avoir à construire explicitement l'arbre, mais il est plus simple de construire l'arbre que de mémoriser sans erreur la formule de Bayes.

Problème du randonneur. Dans nos arbres il n'y aucune boucle: pour aller de la souche à un noeud terminal il n'y a qu'un seul chemin (sans retour en arrière). Si on autorise des boucles on arrive au problème du randonneur: un randonneur pénètre en forêt par une entrée A; à l'intérieur de la forêt les chemins se croisent et à chaque carrefour le randonneur doit choisir sa direction (éventuellement faire demi-tour); la promenade est terminée lorsque le randonneur sort de la forêt, soit en A soit par d'autres issues B, C, ... Le problème est de déterminer les probabilités respectives de sortir en A, B, C, ... après être entré en A. Les données du problème sont la configuration des chemins dans la forêt et les probabilités conditionnelles à chaque carrefour de poursuivre dans telle ou telle direction. Nous avons étudié en cours la configuration suivante:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & B & & & \\
 & & & | & & & \\
 & & & \beta & & & \\
 & & / & & \backslash & & \\
A & - & \alpha & & & \gamma & - & C \\
 & & \backslash & & / & & \\
 & & & \delta & & & \\
 & & & | & & & \\
 & & & D & & &
\end{array}$$

sous deux hypothèses:

1. À chaque carrefour pas de retour en arrière et probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacune des deux directions.

2. À chaque carrefour probabilité $\frac{1}{3}$ pour chacune des trois directions possibles (y-compris le retour en arrière).

Pour **1** on distingue entre les parcours dans le sens des aiguilles d'une montre $\nearrow$ et ceux dans le sens contraire des aiguilles d'une montre $\searrow$. On aura par exemple:

$$P(B) = P(B \mid \nearrow) P(\nearrow) + P(B \mid \searrow) P(\searrow) = \frac{P(B \mid \nearrow) + P(B \mid \searrow)}{2}$$

et par un raisonnement expliqué en cours:

$$P(B|\nearrow) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}P(B|\nearrow) \qquad P(B|\searrow) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}P(B|\searrow)$$

donc $P(B|\nearrow) = \frac{8}{15}$, $P(B|\searrow) = \frac{2}{15}$ et $P(B) = \frac{5}{15}$. On montre de même $P(D) = \frac{5}{15}$, $P(C) = \frac{4}{15}$ et $P(A) = \frac{1}{15}$. On note que la somme de ces probabilité est bien 1 comme il se doit.

Le cas **2** peut être résolu en établissant certaines relations linéaires entre les probabilités recherchées.

[42] Résoudre le cas **2** du problème du randonneur: soit $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$ les probabilités recherchées. En raisonnement conditionnellement aux trois décisions initiales possibles à partir de α et en profitant des symétries du problème montrer: $P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}P(D) + \frac{1}{3}P(B)$, $P(B) = \frac{1}{3}P(A) + \frac{1}{3}P(C)$ etc... En déduire $P(A) = 7/15$, $P(B) = P(D) = 3/15$, $P(C) = 2/15$.

[43] Un chercheur en biologie étudie des souris de trois types I, II, III. Parmi les souris de type I, 80% ont le museau violet, parmi celles de type II, il y en a 30%, et parmi celles de type III, il y en a 10%. Sachant qu'une souris a un museau violet, et que il y a autant de souris de type I que de type II ou III, quelles sont les probabilités respectives que la souris au museau violet soit de type I, II, ou III?

[44] Un chercheur fou du c.n.r.s./inserm s'empare de cellules de ces souris et par tranfert d'ADN et clonage crée de nouvelles lignées qui incorporent un gène d'une espèce de poisson qui produit un antigel. Il enferme les souris pendant plusieurs heures dans un congélateur à -40^0 et récupère celles qui sont restées vivantes (les autres sont broyées en poudre et répandues comme aliment dans ses viviers de poissons mutants). Cela produit de nouvelles lignées Ia, IIa, IIIa, avec des populations en proportion 1 : 2 : 3. Les proportions 80%, 30%, 10% de museaux violets sont restées les mêmes. Par contre parmi les souris qui ont un museau violet on constate que un tiers d'entre elles (indépendamment de leurs lignées) ont subi une mutation génétique imprévue: lorsque l'on baisse la température l'antigel s'accumule dans leur museau et le rend translucide. Les répercussions commerciales sont importantes puisque en installant sur les museaux un système couplé optique-électrique avec repérage GPS cela permet de créer des détecteurs mobiles de défaut d'isolation dans un autre laboratoire du c.n.r.s./cea installé en antarctique et faisant des forages pour stocker des déchets nucléaires. Sachant qu'une souris a un museau violet potentiellement translucide quelle est la probabilité qu'elle soit du type IIIa ?

[45] Un problème d'examen consiste à déterminer la probabilité d'avoir l'As de Coeur dans une main de poker. L'étudiant répond $1/52 + 1/51 + 1/50 + 1/49 + 1/48$ avec l'argument suivant: *"lors du tirage de la main, il y a une chance sur cinquante-deux que l'As de Coeur sorte le premier, puis une chance sur cinquante-et-une en deuxième car il reste alors cinquante-et-une cartes, puis etc..."*. Cet argument est incorrect, où est l'erreur? Montrer que le résultat correct est 5/52.

[46] Soient A et B deux évènements. On suppose $0 < P(A) < 1$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $P(B|\ A) = P(B)$.

[47] Soit A l'évènement: "ma main de poker comporte un As de Coeur", et soit B l'évènement: "ma main de poker comporte un As de Pique". Quelle est la probabilité conditionnelle de B sachant A? Les évènements A et B sont-ils mutuellement indépendants?

[48] Soient A et B deux évènements. On suppose $0 < P(A) < 1$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $P(B|\ A) = P(B|\ \overline{A})$.

[49] Soient B, C, des évènements avec $P(BC) > 0$. Montrer $P(B) > 0$. On note P_B les probabilités conditionnelles à B (dans lesquelles c'est B qui joue le rôle de Ω). Montrer:

$$P_B(A|C) = P_\Omega(A|BC)$$

[50] Résoudre le cas **1** du problème du randonneur en exprimant les probabilités recherchées comme les sommes infinies des probabilités élémentaires correspondant à tous les cheminements possibles. Par exemple dans le cas **1**: $P(A) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{16}\right)^n \frac{1}{2} + \sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{16}\right)^m \frac{1}{2} = \frac{1}{15}$.

[51] (difficile) Résoudre le cas **2** du problème du randonneur en exprimant les probabilités comme des sommes infinies.

Un joueur qui à chaque mise a probabilité p de gagner une unité, probabilité q de perdre, cherche à atteindre son objectif M en partant de j. Il est ruiné si avant d'atteindre M il atteint 0. Nous avons montré que la probabilité $P(j)$ de ruine vérifie:

$$P(j) = pP(j+1) + qP(j-1)$$

et les formules exactes, pour $p = q = \frac{1}{2}$:

$$P(j) = 1 - \frac{j}{M}$$

et pour $p \neq q$:

$$P(j) = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{M-j}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{M}}$$

[52] On considère que le joueur plutôt que d'avoir une fortune initiale de j unités part de 1. Son objectif est de gagner b unités, donc d'atteindre $b+1$. Il peut emprunter à la banque au maximum jusqu'à X unités: si il perd sa mise au moment ou il a déjà emprunté X unités il est déclaré en faillite. Quelle est la probabilité qu'il réalise son objectif?

[53] On suppose que le joueur a accès à un capital illimité. Il part de 1 et joue éternellement ne s'arrêtant que si il atteint son objectif de gagner b unités. Soit $Q(b)$ la probabilité qu'il atteigne son objectif. Calculer $Q(b)$ en faisant la limite $X \to \infty$ dans la formule précédente. On distinguera les cas $p \geq q$ et $p < q$.

[54] Montrer par des raisonnements a priori $Q(b) = Q(1)^b$ et $Q(b) = pQ(b-1) + qQ(b+1)$ pour $b \geq 1$ (on posera $Q(0) = 1$). En déduire $Q(1) = p + qQ(1)^2$. En déduire $Q(1)$ lorsque $p \geq q$ en imposant $Q(1) \leq 1$. En admettant que $Q(1)$ est une fonction continue de $p \in [0,1]$ et en constatant que $Q(1)$ vaut 0 lorsque $p = 0$ (puisque le joueur est alors constamment perdant), confirmer le résultat $\frac{p}{q}$ de l'exercice précédent pour $p < q$.
Ainsi pour $p < q$ il y a une probabilité non-nulle de ne jamais s'enrichir par rapport à sa fortune initiale, même si l'on joue éternellement. On rappelle que dans tous les cas pratiques de jeux, loteries, etc..., on a $p < q$.

[55] On revient à la situation du joueur qui a une fortune initial de j et dont l'objectif est d'atteindre M. Soit T la variable aléatoire qui correspond au temps qu'il faut au joueur pour soit être ruiné, soit atteindre son objectif. On note E_j l'espérance de T lorsque que l'on part de j. La définition de E_j est $E_j = \sum_{n \geq 1} nP(T = n|\text{on est parti de } j)$. On pose $E_0 = 0$ et $E_M = 0$. Montrer:

$$E_j = 1 + pE_{j+1} + qE_{j-1}$$

[56] On suppose $p = q = \frac{1}{2}$. Trouver une solution particulière (penser "quadratique") à l'équation précédente, mais qui ne satisfait pas nécessairement les conditions aux bords, et en combinant avec la solution générale $\alpha + \beta j$ de l'équation "homogène" (où il n'y pas le 1), en déduire la valeur de E_j. Pour quelle valeur de j, E_j est-elle maximale et quelle est alors son ordre de grandeur en fonction de M.

[57] On suppose $p \neq q$. Trouver une solution particulière (linéaire) et en combinant à la solution générale de l'équation "homogène" en déduire la valeur exacte de E_j. Pour les champions: grosso

 ©J.-F. Burnol, 2002.

modo pour quelle valeur de j (en fonction de M, p, q) cette espérance est-elle maximale, et quelle est alors son ordre de grandeur en fonction de M.

©J.-F. Burnol, 2002.

Résumé succinct du cours. On appelle "loi d'une variable aléatoire" X la donnée des probabilités $P(X = x)$, $x \in \mathbb{R}$, lorsque X ne prend qu'un nombre fini (ou infini mais dénombrable) de valeurs distinctes. Si $X = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k$ avec des épreuves de Bernoulli ε_k indépendantes et de même probabilité de succès p, alors la loi de X est la loi binômiale $\mathcal{B}(N, p)$ ($q = 1 - p$):

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

On a $\mathbf{E}X = Np$ et $\mathbf{V}X = Npq$. Lorsque que l'on fait $N \to \infty$, $p \to 0$, sous la contrainte $Np \to \lambda$ avec un λ fixé dans $]0, \infty[$ alors nous avons montré:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim P\Big(\mathcal{B}(N, p) = k\Big) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

On dit qu'une variable aléatoire Y suit une "loi de Poisson" $\mathcal{P}(\lambda)$ (de paramètre λ) si Y prend pour valeurs les $k \in \mathbb{N}$ et si $P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$: il s'agit bien d'une loi possible puisque

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1$$

Nous avons montré que $\mathbf{E}Y = \lambda$ et aussi que $\sigma_Y = \sqrt{\lambda}$.

[58] En une journée et pendant les huit heures d'ouverture 600 lettres sont déposées à la poste. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lettres déposées entre 11h25mn0s et 11h29mn59s (la dernière seconde est comptée). Quelle est l'espérance et l'écart-type de X? Que vaut approximativement $P(X = 10)$?

[59] On considère un volume V occupé par N molécules d'un gaz dans la limite idéalisée où $V \to \infty$ et $N \to \infty$ de sorte que la densité $\frac{N}{V}$ admette une limite ρ finie et non nulle. En considérant que les positions des molécules sont complètement indépendantes les unes des autres, donner la loi de la variable aléatoire $X_{\mathcal{W}}$ qui donne le nombre de molécules présentes dans une région donnée $\mathcal{W}$ de volume W.

[60] On fabrique à partir d'une masse de verre en fusion une grande quantité M de bouteilles. Le verre en fusion contient des impuretés en nombre proportionnel au volume total, de sorte que leur nombre moyen dans un petit volume correspondant à une bouteille soit x (autrement dit le nombre total d'impuretés est xM). Une seule impureté suffit à faire mettre une bouteille au rebut. Montrer que l'espérance du pourcentage de bouteilles à mettre au rebut vaut approximativement $(1 - \exp(-x)) \times 100\%$. Où est l'erreur dans le raisonnement: *" il y a M bouteilles fabriquées et xM impuretés, donc $x \times 100\%$ bouteilles défectueuses"*. Vérifier numériquement la différence lorsque $x = 1$. Le fabricant constate 30% de rebut. Il décide de produire une quantité triple de bouteilles plus petites (avec la même masse de verre). Quel sera le nouveau taux de rebut?

[61] Dans une tombola un grand nombre N de billets sont distribués, dont une petite quantité n sont des billets gagnants. Un participant peu scrupuleux se procure plusieurs billets (M). Quelle

est sa probabilité d'avoir au moins un billet gagnant? Comment doit-il choisir M pour rendre cette probabilité au moins 1/5?

[62] Durant chaque intervalle de temps d'une seconde, chacun des N atomes a la faible et constante probabilité p de se désintégrer ($0 < p < 1$), indépendamment des autres, en particulier indépendamment de ce qui s'est passé avant. On supposera que N est très grand ($\sim 10^{23}$) et p très petit ($\sim 1/10^{10}$)

1 Quelle est la probabilité qu'un atome donné n'est pas désintégré au bout de t secondes? Quelle est l'espérance U du temps nécessaire à sa désintégration.

2 Soit X le nombre total de désintégrations au bout de t secondes. Quelle est la loi et l'espérance de X? Quel est le paramètre λ tel que X suive approximativement la loi $\mathcal{P}(\lambda)$?

3 Quelle est la valeur de t telle que $\mathbf{E}X = \frac{N}{2}$? On note τ cette valeur de la "demi-vie". Est-ce qu'elle dépend de N? Quelle relation approximative extrêmement simple relie τ et U?

4 On appelle T le premier instant (aléatoire) tel que le nombre total de désintégrations a atteint $N/2$. Donner une formule exacte pour $P(T > t)$, en fonction de $t \in \mathbb{N}$. Essayer de se faire une idée de $\mathbf{E}T$ et de σ_T (cette dernière question est sans doute assez voire très difficile).

©J.-F. Burnol, 2002.

Nous avons énoncé et démontré le théorème de De Moivre-Laplace:

Théorème: Soient ε_j, $j \geq 1$ des épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès p. On suppose $0 < p < 1$ et on pose $q = 1 - p$. Soit $S_N = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_N$ et

$$S_N^* = \frac{S_N - Np}{\sqrt{Npq}}$$

Alors pour tout $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{N \to \infty} P(a \leq S_N^* \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Une table de valeurs de $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}\, du$ est reproduite au verso.

Note. Lorsque l'on utilise ce théorème pour évaluer approximativement une probabilité $P(A \leq S_N \leq B)$ avec A, B des nombres entiers, on commence par remplacer A par $A' = A - \frac{1}{2}$ et B par $B' = B + \frac{1}{2}$ et ensuite on prend $a = \frac{A' - Np}{\sqrt{Npq}}$ et $b = \frac{B' - Np}{\sqrt{Npq}}$.

[63] Comment s'exprime $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2}\, du$ avec la fonction $\Phi(x)$? Comment peut-on évaluer $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^h e^{-u^2/2}\, du$ pour $h = 0.1, 0.2, \ldots$, en utilisant le tableau ? Comment procède-t-on pour des valeurs de h non présentes dans le tableau, comme $h = 0.12$ par exemple ?

[64] On procède à 99 répétitions indépendantes d'une épreuve qui a une probabilité 0.55 de succès. Soit X le nombre total de succès. Quelle est l'espérance E de X? Quel est son écart-type Σ? Que valent approximativement que $P(50 \leq X \leq 59)$ et $P(47 \leq X \leq 62)$?

[65] La probabilité qu'un évènement A se réalise est de $\frac{4}{10}$. Quelle est (approximativement) la probabilité que au bout de 100 répétitions indépendantes on constate une fréquence de réalisation de A comprise entre $\frac{3}{10}$ et $\frac{5}{10}$?

[66] Un évènement A a une probabilité de réalisation égale à 0.3. À combien de répétitions faut-il prévoir de procéder pour pouvoir affirmer a priori avec probabilité au moins 90% que la fréquence de réalisation de A ne diffèrera de 0.3 que d'au plus 0.05 ?

[67] La probabilité d'un évènement A dans une épreuve est de $\frac{7}{10}$. Quelle est (approximativement) la probabilité que A survienne dans au moins la moitié de 50 épreuves indépendantes?

 ©J.-F. Burnol, 2002.

©J.-F. Burnol, 2002.

Rappel d'une partie du cours du 13 mai: on dit qu'une variable aléatoire X a une loi de probabilité à densité $g(u)$ si

$$\forall a, b \quad -\infty \leq a \leq b \leq +\infty \Rightarrow \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b g(u)\, du$$

La fonction $g(u)$ doit être à valeurs positives, et son intégrale totale sur $\mathbb{R}$ doit valoir 1. Ce sont les **seules** contraintes, et réciproquement si elles sont satisfaites pour la fonction $g(u)$ alors il existe une variable aléatoire dont la loi possède $g(u)$ comme densité de probabilité. La fonction $g(u)$ peut avoir des sauts, et elle n'est pas en toute rigueur unique puisque l'on peut la modifier arbitrairement en un nombre fini de points par exemple (cela ne change rien à la valeur d'une intégrale de changer une fonction en un nombre fini de valeurs de u quelconques). Cependant, en "presque tout u" (il faudrait préciser ce que "presque tout" veut dire) on a:

$$g(u) = \frac{d}{dt} P(X \leq t)\Big|_{t=u}$$

donc la densité de probabilité $g(u)$ (si elle existe) est bien essentiellement unique.
Note: Si on part d'une variable aléatoire X et que l'on définit la fonction $g(u)$ comme ci-dessus partout où cela a un sens on obtient de toute façon une fonction à valeurs positives. La loi de X est une loi à densité si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} g(u)du = 1$. Si $\int_{\mathbb{R}} g(u)du < 1$ la loi de X n'est pas une loi à densité. Il est même possible que $g(u)$ défini comme ci-dessus soit partout nulle, là où la formule a un sens:

[68] Soit X une variable de Bernoulli. Que vaut $F(t) = P(X \leq t)$ en fonction de t? On définit la fonction $g(u)$ par la formule $g(u) = F'(u)$ partout où cette dérivée existe. Que vaut $g(u)$? La loi de la variable aléatoire X est-elle une loi à densité de probabilité?

[69] On considère une variable aléatoire X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs $x_1 < \ldots < x_N$. La loi de la variable aléatoire X est-elle une loi à densité de probabilité?

[70] Soit X une variable aléatoire dont la loi est une loi à densité de probabilité. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $P(X = x) = 0$, et confirmer ainsi les conclusions des deux exercices précédents.

Nous avons justifié heuristiquement que lorsque X est une variable aléatoire (dont la loi est) à densité de probabilité $g(u)$ alors on a:

$$\mathbf{E}(F(X)) = \int_{\mathbb{R}} F(u)\, g(u) du$$

pour toute fonction continue F pour laquelle l'intégrale de droite a un sens (en théorie de l'intégration, l'intégrale d'une fonction positive a **toujours** un sens, mais peut être égale à $+\infty$, et $\int_{\mathbb{R}} F(u)\, g(u)du$ aura un sens dès que $\int_{\mathbb{R}} |F(u)|\, g(u)du < \infty$). En particulier $\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} u\, g(u)du$, $\mathbf{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} u^2\, g(u)du$.

[71] On suppose que $g(u)$ est une fonction paire et que $\int_{\mathbb{R}} |u|\, g(u)du < \infty$. Montrer $\mathbf{E}(X) = 0$.

[72] On dit que la variable aléatoire X a une **loi uniforme sur** $[a, b]$ si il s'agit d'une loi à densité $g(u)$ qui vaut 0 en dehors de $[a, b]$ et qui est constante sur $[a, b]$. On note $X \sim \mathcal{U}(a, b)$. Quelle est la valeur de cette constante? On suppose $X \sim \mathcal{U}(a, b)$. Que vaut $\mathbf{E}(X)$? Que vaut $\mathbf{E}(X^2)$? Que valent $\mathbf{V}(X)$ et σ_X?

[73] Soit $0 < \lambda < \infty$. Soit $g(u)$ la fonction qui vaut 0 pour $u < 0$ et $\lambda e^{-\lambda u}$ pour $u \geq 0$. Montrer que $g(u)$ est une densité de probabilité. On dit que X a une **loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ si sa loi est de densité la fonction $g(u)$. On suppose $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Montrer $P(X > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$. Que valent $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$?

[74] Soient X_1 et X_2 indépendantes et chacune de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Y = \min(X_1, X_2)$. Que vaut $P(Y > t)$? Quelle est la loi de Y ? On pose $Z = \max(X_1, X_2)$. Que vaut $P(Z \leq t)$? Montrer que la loi de Z est une loi à densité que l'on donnera explicitement.

[75] (suite) Calculer les espérances et les variances de Y et de Z.

 ©J.-F. Burnol, 2002.

©J.-F. Burnol, 2002.

[76] Pour quelle constante k la fonction $g(u) = ke^{-u}$ pour $0 \leq u \leq 1$ et $g(u) = 0$ ailleurs est-elle une densité de probabilité ? On suppose que X est une variable aléatoire avec cette densité. Que valent $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$? Quel est l'écart-type de X ?

[77] L'instant aléatoire X de désintégration d'un atome de Plutonium 239 suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(0,0000284)$ (l'unité de temps est l'année). Quelle est la probabilité que l'atome considéré va subir la désintégration entre 100 et 500 ans à partir d'aujourd'hui?

[78] La probabilité qu'une météorite de type Nemesis frappe la Terre en relâchant au moins un milliard de Megatonnes d'équivalent TNT est de l'ordre de 10^{-8} par année. En représentant un tel évènement suivant une loi exponentielle, calculer la probabilité qu'il se réalise pendant les cent prochaines années. Quelle est la probabilité qu'un tel évènement soit survenu au moins une fois sur Terre depuis l'apparition de la vie il y a environ quatre milliard d'années ? (Source: NASA)

[79] Soit X une variable aléatoire avec une densité de probabilité. Montrer que l'ensemble des nombres réels t tels que $P(X \leq t) = \frac{1}{2}$ forme un intervalle non-vide $[a, b]$ (en règle générale on a d'ailleurs $a = b$). On appelle médiane M la valeur moyenne $(a+b)/2$. Quelle est la médiane d'une loi uniforme ? Expliquer comment l'on peut dessiner une probabilité de densité pour laquelle la médiane est strictement plus petite que l'espérance, ou le contraire. Le temps Δ en minutes qui sépare l'arrivée dans une file d'attente d'une nouvelle personne suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(2)$. Quelles sont la médiane et l'espérance de Δ ? Interpréter le résultat.

[80] Montrer que la variance d'une variable aléatoire X à densité $g(u)$ est $\int_{\mathbb{R}} (u - \mathbf{E}(X))^2 \, g(u) du$.

[81] Une série télévisée diffusée quotidiennement perd de l'audience à un rythme régulier se traduisant par un déficit de 10% d'audience chaque mois (de 30 jours). Quelle est la probabilité quotidienne pour un auditeur donné de décider de laisser tomber ce programme, en supposant que sa décision est prise indépendamment des autres, avec la même probabilité chaque jour ? En toute rigueur les données de cet exercice sont-elles mathématiquement mutuellement compatibles et quelle idéalisation implicite est faite dans l'énoncé ?

[82] À chaque croisement muni d'un stop la probabilité d'un accident est de une chance sur trois lorsque l'automobiliste franchit sans marquer le stop, et de une sur cent-mille lorsque il a marqué le stop. Un automobiliste ivre a une chance sur deux de s'arrêter à chaque stop rencontré, tandis qu'un automobiliste sobre marque tous les arrêts. On note X la variable aléatoire égale au nombre de croisements rencontrés jusqu'à et y compris l'accident final pour l'automobiliste ivre. Quelle est la loi et quelle est l'espérance de X ? On note Y la quantité analogue pour l'automobiliste sobre. Quelle est l'espérance de Y ?

 ©J.-F. Burnol, 2002.

Suite du rappel du cours du 13 mai: pour conclure sur le cours de ce semestre, nous évoquons des sujets pour lesquels nous n'avons pas été en mesure de donner toutes les clés, mais qui donnent un aperçu de ce que l'on peut aborder dans la continuation de ce cours.

Axiomes des probabilités: dès la feuille **3** nous évoquions ce sujet. Par définition un **espace probabilisé** est la donnée d'un ensemble Ω, d'une collection $\mathcal{A}$ de ses sous-ensembles (appelés **évènements**), et d'une fontion $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ satisfaisant les propriétés suivantes: Ω est non-vide et est un évènement. Le complémentaire d'un évènement est un évènement. La réunion comme sous-ensemble de Ω de toute famille dénombrable d'évènements est un évènement. On a $P(\Omega) = 1$. Si A_j, $j \in \mathbb{N}$, sont des évènements deux-à-deux disjoints et de réunion A alors $P(A) = \sum_j P(A_j)$ (axiome de **l'additivité dénombrable**).

Tout ce qui se fait (il y a des centaines de milliers de pages...) en Probabilités est une conséquence des axiomes précédents (avec des concepts "émergents" supplémentaires comme l'espérance conditionnelle et le calcul stochastique). La clé pour la richesse du développement ultérieur de la théorie est que l'on a le droit de faire une réunion d'une famille infinie d'évènements, lorsque cette famille est (finie ou) dénombrable, et bien sûr l'axiome associé d'additivité dénombrable qui va avec. Si on applique cet axiome avec $\forall j\ A_j = \emptyset$ on obtient $P(\emptyset) = 0$. Ensuite on en déduit $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$, etc... Comme on a le droit de faire des réunions et de prendre des complémentaires, on a aussi le droit de faire des intersections. Une formule comme $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ se déduit des axiomes précédents. Une variable aléatoire est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que l'image inverse de tout intervalle $[a, b]$ soit un évènement. La notion d'**espérance** $\mathbf{E}(X)$ est très importante et utilise la théorie générale de l'intégration de Lebesgue. Voir la **feuille 3** pour quelques commentaires supplémentaires. La notion d'**indépendance** est très importante et spécifiquement probabiliste, ainsi que la notion d'**espérance conditionnelle**.

Historiquement ces notions sont le fruit d'un long développement et parmi les objectifs et/ou résultats de ce développement figurent les deux théorèmes suivants:

Loi forte des grands nombres: Soient X_j, $j \geq 1$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi et avec une espérance (commune) A. Alors "avec probabilité 1" on a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{X_1 + \ldots + X_N}{N} = A$$

Théorème de la limite centrale: Soient X_j, $j \geq 1$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi et avec une espérance (commune) A et un écart-type (commun) $\sigma > 0$. Soit $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ et

$$S_N^* = \frac{S_N - NA}{\sqrt{N}\,\sigma}$$

Alors pour tout $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{N \to \infty} P(a \leq S_N^* \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

©J.-F. Burnol, 2002.

PARTIEL DU 8 AVRIL 2002

Cet examen est un questionnaire à choix multiples. Les questions et les réponses diffèrent suivant les formulaires distribués. Vous signalez votre choix de réponse en noircissant ou en cochant le cercle ◯ qui est immédiatement à gauche de la réponse proposée. Si plusieurs réponses sont proposées il ne sera attribué aucun point. En cas d'erreur vous entourez votre réponse définitive. En cas de nouvelle erreur vous inscrivez à la main votre réponse et rayez tout le reste. Attention: aucun autre formulaire ne sera distribué.

NOM:

PRÉNOM:

né(e) le:

à:

Replier et cacheter

On utilise des dés avec huit faces (octaèdres) numérotées de 1 à 8. On lance deux dés. Quelle est la probabilité qu'ils donnent tous deux le même chiffre?

◯0 ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{3}{8}$ ◯2

On considère des cartes de 5 couleurs différentes, 10 par couleur. On tire deux cartes de ce paquet de 50. Quelle est la probabilité qu'elles soient de couleurs différentes?

◯$\frac{40}{49}$ ◯$\frac{40}{50}$ ◯$\frac{41}{50}$ ◯$\frac{41}{49}$

Avec quel évènement $(A \text{ ou } B)$ et $(A \text{ ou } \overline{B})$ et $(\overline{A} \text{ ou } B)$ **est-il identique?**

◯$\emptyset$ ◯$\overline{A}$ et $\overline{B}$ ◯A et B ◯$A \setminus B$ ◯$B \setminus A$

Quelle est la fonction indicatrice (en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$) de A et $\overline{B}$?

◯$\mathbf{1}_A/\mathbf{1}_B$ ◯$\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$ ◯$\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\mathbf{1}_A$ ◯$1 - \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$

Un nombre entier N entre 1 et 1.000 est choisi au hasard. Soit $A =$ "N est divisible par 5" et $B =$ "le dernier chiffre de N n'est pas un zéro". Que vaut $P(AB)$?

◯$\frac{1}{20}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{5}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{1}{2}$

Que vaut $\mathbf{E}((\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et de $P(AB)$? ◯$P(A)^2 - P(B)^2$ ◯$P(A^2 - 2AB + B^2)$ ◯$P(A) + P(B) - 2P(AB)$ ◯$P(A)^2 + P(B)^2 - 2P(AB)$

On jette quatre dés octaédriques (faces numérotées de 1 à 8). Soit X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres. Que vaut $\mathbf{E}(X)$?

◯16 ◯18 ◯20 ◯22

On considère un paquet avec les 39 cartes de couleurs coeur, carreau, trèfle. On tire une première carte puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est coeur" et soit $B =$"la deuxième carte est coeur". Que vaut $P(B|A)$?

◯$\frac{4}{13}$ ◯$\frac{3}{14}$ ◯$\frac{1}{3}$ ◯$\frac{6}{19}$

On tire une première carte d'un paquet standard de 52 cartes puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est pique" et soit $B =$"la deuxième carte est pique". Laquelle de ces assertions est vraie?

◯$P(B|A) < P(A|B)$ ◯$P(B|A) = P(A|B)$ ◯$P(B|A) > P(A|B)$

Trois groupes d'étudiants en nombres identiques répondent à une question avec des taux respectifs de 21%, 54%, 93% de réponses correctes. Un étudiant a répondu correctement. Quelle est la probabilité qu'il appartienne au groupe le plus faible?

◯$\frac{21}{100}$ ◯$\frac{1}{12}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{9}$ ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{7}$ ◯$\frac{1}{5}$

 ©J.-F. Burnol, 2002

PARTIEL DU 8 AVRIL 2002

Cet examen est un questionnaire à choix multiples. Les questions et les réponses diffèrent suivant les formulaires distribués. Vous signalez votre choix de réponse en noircissant ou en cochant le cercle ◯ qui est immédiatement à gauche de la réponse proposée. Si plusieurs réponses sont proposées il ne sera attribué aucun point. En cas d'erreur vous entourez votre réponse définitive. En cas de nouvelle erreur vous inscrivez à la main votre réponse et rayez tout le reste. Attention: aucun autre formulaire ne sera distribué.

NOM:

PRÉNOM:

né(e) le:

à:

Replier et cacheter

Trois groupes d'étudiants en nombres identiques répondent à une question avec des taux respectifs de 18%, 54%, 90% de réponses correctes. Un étudiant a répondu correctement. Quelle est la probabilité qu'il appartienne au groupe le plus faible?

◯$\frac{18}{100}$ ◯$\frac{1}{12}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{9}$ ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{7}$ ◯$\frac{1}{5}$

On tire une première carte d'un paquet standard de 52 cartes puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est un as" et soit $B =$"la deuxième carte est un as". Laquelle de ces assertions est vraie?

◯$P(B|A) < P(A|B)$ ◯$P(B|A) = P(A|B)$ ◯$P(B|A) > P(A|B)$

On considère un paquet avec les 39 cartes de couleurs coeur, carreau, pique. On tire une première carte puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est pique" et soit $B =$"la deuxième carte est pique". Que vaut $P(B|A)$?

◯$\frac{1}{3}$ ◯$\frac{6}{19}$ ◯$\frac{4}{13}$ ◯$\frac{3}{14}$

On jette six dés octaédriques (faces numérotées de 1 à 8). Soit X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres. Que vaut $\mathbf{E}(X)$?

◯27 ◯29 ◯31 ◯33

Que vaut $\mathbf{E}((\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B)^2)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et de $P(AB)$? ◯$P(A)^2 + P(B)^2$ ◯$P(A^2 + 2AB + B^2)$ ◯$P(A) + P(B) + 2P(AB)$ ◯$P(A)^2 + P(B)^2 + 2P(AB)$

Un nombre entier N entre 1 et 500 est choisi au hasard. Soit $A =$ "N est divisible par 5" et $B =$ "le dernier chiffre de N n'est pas un zéro". Que vaut $P(AB)$?

◯$\frac{1}{2}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{1}{5}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{20}$

Quelle est la fonction indicatrice (en fonction de $\mathbf{1}_F$ et $\mathbf{1}_E$) de F et $\overline{E}$?

◯$\mathbf{1}_F/\mathbf{1}_E$ ◯$\mathbf{1}_F - \mathbf{1}_E$ ◯$\mathbf{1}_F - \mathbf{1}_E\mathbf{1}_F$ ◯$1 - \mathbf{1}_F + \mathbf{1}_E$

Avec quel évènement ($\overline{E}$ ou D) et (E ou D) et (E ou $\overline{D}$) est-il identique?

◯$\emptyset$ ◯$\overline{E}$ et $\overline{D}$ ◯E et D ◯$E \setminus D$ ◯$D \setminus E$

On considère des cartes de 5 couleurs différentes, 10 par couleur. On tire deux cartes de ce paquet de 50. Quelle est la probabilité qu'elles soient de la même couleur?

◯$\frac{9}{49}$ ◯$\frac{10}{50}$ ◯$\frac{9}{50}$ ◯$\frac{8}{49}$

On utilise des dés avec huit faces (octaèdres) numérotées de 1 à 8. On lance deux dés. Quelle est la probabilité que la somme des deux chiffres soit 9?

◯0 ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{3}{8}$ ◯2

 ©J.-F. Burnol, 2002

PARTIEL DU 8 AVRIL 2002

Cet examen est un questionnaire à choix multiples. Les questions et les réponses diffèrent suivant les formulaires distribués. Vous signalez votre choix de réponse en noircissant ou en cochant le cercle ◯ qui est immédiatement à gauche de la réponse proposée. Si plusieurs réponses sont proposées il ne sera attribué aucun point. En cas d'erreur vous entourez votre réponse définitive. En cas de nouvelle erreur vous inscrivez à la main votre réponse et rayez tout le reste. Attention: aucun autre formulaire ne sera distribué.

NOM:

PRÉNOM:

né(e) le:

à:

Replier et cacheter

Que vaut $\mathbf{E}((\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B)^2)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et de $P(AB)$? ◯$P(A)^2 + P(B)^2$ ◯$P(A^2 + 2AB + B^2)$ ◯$P(A) + P(B) + 2P(AB)$ ◯$P(A)^2 + P(B)^2 + 2P(AB)$

On jette six dés octaédriques (faces numérotées de 1 à 8). Soit X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres. Que vaut $\mathbf{E}(X)$?

◯27 ◯29 ◯31 ◯33

On considère un paquet avec les 39 cartes de couleurs coeur, carreau, pique. On tire une première carte puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est pique" et soit $B =$"la deuxième carte est pique". Que vaut $P(B|A)$?

◯$\frac{1}{3}$ ◯$\frac{6}{19}$ ◯$\frac{4}{13}$ ◯$\frac{3}{14}$

On tire une première carte d'un paquet standard de 52 cartes puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est un as" et soit $B =$"la deuxième carte est un as". Laquelle de ces assertions est vraie?

◯$P(B|A) < P(A|B)$ ◯$P(B|A) = P(A|B)$ ◯$P(B|A) > P(A|B)$

Trois groupes d'étudiants en nombres identiques répondent à une question avec des taux respectifs de 18%, 54%, 90% de réponses correctes. Un étudiant a répondu correctement. Quelle est la probabilité qu'il appartienne au groupe le plus faible?

◯$\frac{18}{100}$ ◯$\frac{1}{12}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{9}$ ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{7}$ ◯$\frac{1}{5}$

On utilise des dés avec huit faces (octaèdres) numérotées de 1 à 8. On lance deux dés. Quelle est la probabilité qu'ils donnent tous deux le même chiffre?

◯0 ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{3}{8}$ ◯2

On considère des cartes de 5 couleurs différentes, 10 par couleur. On tire deux cartes de ce paquet de 50. Quelle est la probabilité qu'elles soient de couleurs différentes?

◯$\frac{40}{49}$ ◯$\frac{40}{50}$ ◯$\frac{41}{50}$ ◯$\frac{41}{49}$

Avec quel évènement $(A \text{ ou } B)$ et $(A \text{ ou } \overline{B})$ et $(\overline{A} \text{ ou } B)$ **est-il identique?**

◯$\emptyset$ ◯$\overline{A}$ et $\overline{B}$ ◯A et B ◯$A \setminus B$ ◯$B \setminus A$

Quelle est la fonction indicatrice (en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$) de A et $\overline{B}$?

◯$\mathbf{1}_A/\mathbf{1}_B$ ◯$\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$ ◯$\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\mathbf{1}_A$ ◯$1 - \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$

Un nombre entier N entre 1 et 1.000 est choisi au hasard. Soit $A =$ "N est divisible par 5" et $B =$ "le dernier chiffre de N n'est pas un zéro". Que vaut $P(AB)$?

◯$\frac{1}{20}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{5}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{1}{2}$

 ©J.-F. Burnol, 2002

PARTIEL DU 8 AVRIL 2002

Cet examen est un questionnaire à choix multiples. Les questions et les réponses diffèrent suivant les formulaires distribués. Vous signalez votre choix de réponse en noircissant ou en cochant le cercle ◯ qui est immédiatement à gauche de la réponse proposée. Si plusieurs réponses sont proposées il ne sera attribué aucun point. En cas d'erreur vous entourez votre réponse définitive. En cas de nouvelle erreur vous inscrivez à la main votre réponse et rayez tout le reste. Attention: aucun autre formulaire ne sera distribué.

NOM:

PRÉNOM:

né(e) le:

à:

Replier et cacheter

On utilise des dés avec huit faces (octaèdres) numérotées de 1 à 8. On lance deux dés. Quelle est la probabilité que la somme des deux chiffres soit 9?

◯0 ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{3}{8}$ ◯2

On considère des cartes de 5 couleurs différentes, 10 par couleur. On tire deux cartes de ce paquet de 50. Quelle est la probabilité qu'elles soient de la même couleur?

◯$\frac{9}{49}$ ◯$\frac{10}{50}$ ◯$\frac{9}{50}$ ◯$\frac{8}{49}$

Avec quel évènement $(\overline{E}$ ou $D)$ et $(E$ ou $D)$ et $(E$ ou $\overline{D})$ **est-il identique?**

◯$\emptyset$ ◯$\overline{E}$ et $\overline{D}$ ◯E et D ◯$E \setminus D$ ◯$D \setminus E$

Quelle est la fonction indicatrice (en fonction de $\mathbf{1}_F$ et $\mathbf{1}_E$) de F et $\overline{E}$?

◯$\mathbf{1}_F/\mathbf{1}_E$ ◯$\mathbf{1}_F - \mathbf{1}_E$ ◯$\mathbf{1}_F - \mathbf{1}_E\mathbf{1}_F$ ◯$1 - \mathbf{1}_F + \mathbf{1}_E$

Un nombre entier N entre 1 et 500 est choisi au hasard. Soit $A =$ "N est divisible par 5" et $B =$ "le dernier chiffre de N n'est pas un zéro". Que vaut $P(AB)$?

◯$\frac{1}{2}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{1}{5}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{20}$

Que vaut $\mathbf{E}((\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et de $P(AB)$? ◯$P(A)^2 - P(B)^2$ ◯$P(A^2 - 2AB + B^2)$ ◯$P(A) + P(B) - 2P(AB)$ ◯$P(A)^2 + P(B)^2 - 2P(AB)$

On jette quatre dés octaédriques (faces numérotées de 1 à 8). Soit X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres. Que vaut $\mathbf{E}(X)$?

◯16 ◯18 ◯20 ◯22

On considère un paquet avec les 39 cartes de couleurs coeur, carreau, trèfle. On tire une première carte puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est coeur" et soit $B =$"la deuxième carte est coeur". Que vaut $P(B|A)$?

◯$\frac{4}{13}$ ◯$\frac{3}{14}$ ◯$\frac{1}{3}$ ◯$\frac{6}{19}$

On tire une première carte d'un paquet standard de 52 cartes puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est pique" et soit $B =$"la deuxième carte est pique". Laquelle de ces assertions est vraie?

◯$P(B|A) < P(A|B)$ ◯$P(B|A) = P(A|B)$ ◯$P(B|A) > P(A|B)$

Trois groupes d'étudiants en nombres identiques répondent à une question avec des taux respectifs de 21%, 54%, 93% de réponses correctes. Un étudiant a répondu correctement. Quelle est la probabilité qu'il appartienne au groupe le plus faible?

◯$\frac{21}{100}$ ◯$\frac{1}{12}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{9}$ ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{7}$ ◯$\frac{1}{5}$

 ©J.-F. Burnol, 2002

PARTIEL DU 8 AVRIL 2002

Cet examen est un questionnaire à choix multiples. Les questions et les réponses diffèrent suivant les formulaires distribués. Vous signalez votre choix de réponse en noircissant ou en cochant le cercle ◯ qui est immédiatement à gauche de la réponse proposée. Si plusieurs réponses sont proposées il ne sera attribué aucun point. En cas d'erreur vous entourez votre réponse définitive. En cas de nouvelle erreur vous inscrivez à la main votre réponse et rayez tout le reste. Attention: aucun autre formulaire ne sera distribué.

NOM:

PRÉNOM:

né(e) le:

à:

Replier et cacheter

Que vaut $\mathbf{E}((\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et de $P(AB)$? ◯$P(A)^2 - P(B)^2$ ◯$P(A^2 - 2AB + B^2)$ ◯$P(A) + P(B) - 2P(AB)$ ◯$P(A)^2 + P(B)^2 - 2P(AB)$

On jette six dés octaédriques (faces numérotées de 1 à 8). Soit X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres. Que vaut $\mathbf{E}(X)$?

◯27 ◯29 ◯31 ◯33

On considère un paquet avec les 39 cartes de couleurs coeur, carreau, pique. On tire une première carte puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est pique" et soit $B =$"la deuxième carte est pique". Que vaut $P(B|A)$?

◯$\frac{1}{3}$ ◯$\frac{6}{19}$ ◯$\frac{4}{13}$ ◯$\frac{3}{14}$

On tire une première carte d'un paquet standard de 52 cartes puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est pique" et soit $B =$"la deuxième carte est pique". Laquelle de ces assertions est vraie?

◯$P(B|A) < P(A|B)$ ◯$P(B|A) = P(A|B)$ ◯$P(B|A) > P(A|B)$

Trois groupes d'étudiants en nombres identiques répondent à une question avec des taux respectifs de 21%, 54%, 93% de réponses correctes. Un étudiant a répondu correctement. Quelle est la probabilité qu'il appartienne au groupe le plus faible?

◯$\frac{21}{100}$ ◯$\frac{1}{12}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{9}$ ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{7}$ ◯$\frac{1}{5}$

On utilise des dés avec huit faces (octaèdres) numérotées de 1 à 8. On lance deux dés. Quelle est la probabilité qu'ils donnent tous deux le même chiffre?

◯0 ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{3}{8}$ ◯2

On considère des cartes de 5 couleurs différentes, 10 par couleur. On tire deux cartes de ce paquet de 50. Quelle est la probabilité qu'elles soient de couleurs différentes?

◯$\frac{40}{49}$ ◯$\frac{40}{50}$ ◯$\frac{41}{50}$ ◯$\frac{41}{49}$

Avec quel évènement $(\overline{E}$ ou $D)$ et $(E$ ou $D)$ et $(E$ ou $\overline{D})$ est-il identique?

◯$\emptyset$ ◯$\overline{E}$ et $\overline{D}$ ◯E et D ◯$E \setminus D$ ◯$D \setminus E$

Quelle est la fonction indicatrice (en fonction de $\mathbf{1}_F$ et $\mathbf{1}_E$) de F et $\overline{E}$?

◯$\mathbf{1}_F/\mathbf{1}_E$ ◯$\mathbf{1}_F - \mathbf{1}_E$ ◯$\mathbf{1}_F - \mathbf{1}_E\mathbf{1}_F$ ◯$1 - \mathbf{1}_F + \mathbf{1}_E$

Un nombre entier N entre 1 et 1.000 est choisi au hasard. Soit $A =$ "N est divisible par 5" et $B =$ "le dernier chiffre de N n'est pas un zéro". Que vaut $P(AB)$?

◯$\frac{1}{20}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{5}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{1}{2}$

 ©J.-F. Burnol, 2002

PARTIEL DU 8 AVRIL 2002

Cet examen est un questionnaire à choix multiples. Les questions et les réponses diffèrent suivant les formulaires distribués. Vous signalez votre choix de réponse en noircissant ou en cochant le cercle ◯ qui est immédiatement à gauche de la réponse proposée. Si plusieurs réponses sont proposées il ne sera attribué aucun point. En cas d'erreur vous entourez votre réponse définitive. En cas de nouvelle erreur vous inscrivez à la main votre réponse et rayez tout le reste. Attention: aucun autre formulaire ne sera distribué.

NOM:

PRÉNOM:

né(e) le:

à:

Replier et cacheter

Trois groupes d'étudiants en nombres identiques répondent à une question avec des taux respectifs de 18%, 54%, 90% de réponses correctes. Un étudiant a répondu correctement. Quelle est la probabilité qu'il appartienne au groupe le plus faible?

◯$\frac{18}{100}$ ◯$\frac{1}{12}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{9}$ ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{7}$ ◯$\frac{1}{5}$

On tire une première carte d'un paquet standard de 52 cartes puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est un as" et soit $B =$"la deuxième carte est un as". Laquelle de ces assertions est vraie?

◯$P(B|A) < P(A|B)$ ◯$P(B|A) = P(A|B)$ ◯$P(B|A) > P(A|B)$

On considère un paquet avec les 39 cartes de couleurs coeur, carreau, trèfle. On tire une première carte puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est coeur" et soit $B =$"la deuxième carte est coeur". Que vaut $P(B|A)$?

◯$\frac{4}{13}$ ◯$\frac{3}{14}$ ◯$\frac{1}{3}$ ◯$\frac{6}{19}$

On jette quatre dés octaédriques (faces numérotées de 1 à 8). Soit X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres. Que vaut $\mathbf{E}(X)$?

◯16 ◯18 ◯20 ◯22

Que vaut $\mathbf{E}((\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B)^2)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et de $P(AB)$? ◯$P(A)^2 + P(B)^2$ ◯$P(A^2 + 2AB + B^2)$ ◯$P(A) + P(B) + 2P(AB)$ ◯$P(A)^2 + P(B)^2 + 2P(AB)$

Un nombre entier N entre 1 et 500 est choisi au hasard. Soit $A =$ "N est divisible par 5" et $B =$ "le dernier chiffre de N n'est pas un zéro". Que vaut $P(AB)$?

◯$\frac{1}{2}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{1}{5}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{20}$

Quelle est la fonction indicatrice (en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$) de A et $\overline{B}$?

◯$\mathbf{1}_A/\mathbf{1}_B$ ◯$\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$ ◯$\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\mathbf{1}_A$ ◯$1 - \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$

Avec quel évènement $(A$ ou $B)$ et $(A$ ou $\overline{B})$ et $(\overline{A}$ ou $B)$ **est-il identique?**

◯$\emptyset$ ◯$\overline{A}$ et $\overline{B}$ ◯A et B ◯$A \setminus B$ ◯$B \setminus A$

On considère des cartes de 5 couleurs différentes, 10 par couleur. On tire deux cartes de ce paquet de 50. Quelle est la probabilité qu'elles soient de la même couleur?

◯$\frac{9}{49}$ ◯$\frac{10}{50}$ ◯$\frac{9}{50}$ ◯$\frac{8}{49}$

On utilise des dés avec huit faces (octaèdres) numérotées de 1 à 8. On lance deux dés. Quelle est la probabilité que la somme des deux chiffres soit 9?

◯0 ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{3}{8}$ ◯2

 ©J.-F. Burnol, 2002

Partiel du 8 avril 2002: les réponses

On utilise des dés avec huit faces (octaèdres) numérotées de 1 à 8. On lance deux dés. Quelle est la probabilité qu'ils donnent tous deux le même chiffre?

○ 0 ⊗ $\frac{1}{8}$ ○ $\frac{1}{4}$ ○ $\frac{3}{8}$ ○ 2

On utilise des dés avec huit faces (octaèdres) numérotées de 1 à 8. On lance deux dés. Quelle est la probabilité que la somme des deux chiffres soit 9?

○ 0 ⊗ $\frac{1}{8}$ ○ $\frac{1}{4}$ ○ $\frac{3}{8}$ ○ 2

On considère des cartes de 5 couleurs différentes, 10 par couleur. On tire deux cartes de ce paquet de 50. Quelle est la probabilité qu'elles soient de couleurs différentes?

⊗ $\frac{40}{49}$ ○ $\frac{40}{50}$ ○ $\frac{41}{50}$ ○ $\frac{41}{49}$

On considère des cartes de 5 couleurs différentes, 10 par couleur. On tire deux cartes de ce paquet de 50. Quelle est la probabilité qu'elles soient de la même couleur?

⊗ $\frac{9}{49}$ ○ $\frac{10}{50}$ ○ $\frac{9}{50}$ ○ $\frac{8}{49}$

Avec quel évènement $(A \text{ ou } B)$ et $(A \text{ ou } \overline{B})$ et $(\overline{A} \text{ ou } B)$ **est-il identique?**

○ $\emptyset$ ○ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ ⊗ A et B ○ $A \setminus B$ ○ $B \setminus A$

Avec quel évènement $(\overline{E} \text{ ou } D)$ et $(E \text{ ou } D)$ et $(E \text{ ou } \overline{D})$ **est-il identique?**

○ $\emptyset$ ○ $\overline{E}$ et $\overline{D}$ ⊗ E et D ○ $E \setminus D$ ○ $D \setminus E$

Quelle est la fonction indicatrice (en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$) de A et $\overline{B}$?

○ $\mathbf{1}_A/\mathbf{1}_B$ ○ $\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$ ⊗ $\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\mathbf{1}_A$ ○ $1 - \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$

Quelle est la fonction indicatrice (en fonction de $\mathbf{1}_F$ et $\mathbf{1}_E$) de F et $\overline{E}$?

○ $\mathbf{1}_F/\mathbf{1}_E$ ○ $\mathbf{1}_F - \mathbf{1}_E$ ⊗ $\mathbf{1}_F - \mathbf{1}_E\mathbf{1}_F$ ○ $1 - \mathbf{1}_F + \mathbf{1}_E$

Un nombre entier N entre 1 et 1.000 est choisi au hasard. Soit $A =$ "N est divisible par 5" et $B =$ "le dernier chiffre de N n'est pas un zéro". Que vaut $P(AB)$?

○ $\frac{1}{20}$ ⊗ $\frac{1}{10}$ ○ $\frac{1}{5}$ ○ $\frac{1}{4}$ ○ $\frac{1}{2}$

Un nombre entier N entre 1 et 500 est choisi au hasard. Soit $A =$ "N est divisible par 5" et $B =$ "le dernier chiffre de N n'est pas un zéro". Que vaut $P(AB)$?

○ $\frac{1}{2}$ ○ $\frac{1}{4}$ ○ $\frac{1}{5}$ ⊗ $\frac{1}{10}$ ○ $\frac{1}{20}$

Que vaut $\mathbf{E}((\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et de $P(AB)$? ○ $P(A)^2 - P(B)^2$ ○ $P(A^2 - 2AB + B^2)$ ⊗ $P(A) + P(B) - 2P(AB)$ ○ $P(A)^2 + P(B)^2 - 2P(AB)$

Que vaut $\mathbf{E}((\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B)^2)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et de $P(AB)$? ○ $P(A)^2 + P(B)^2$ ○ $P(A^2 + 2AB + B^2)$ ⊗ $P(A) + P(B) + 2P(AB)$ ○ $P(A)^2 + P(B)^2 + 2P(AB)$

On jette quatre dés octaédriques (faces numérotées de 1 à 8). Soit X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres. Que vaut $\mathbf{E}(X)$?

○ 16 ⊗ 18 ○ 20 ○ 22

On jette six dés octaédriques (faces numérotées de 1 à 8). Soit X la variable aléatoire

 ©J.-F. Burnol, 2002

égale à la somme des chiffres. Que vaut $\mathbf{E}(X)$?

⊗ 27 ◯29 ◯31 ◯33

On considère un paquet avec les 39 cartes de couleurs coeur, carreau, trèfle. On tire une première carte puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est coeur" et soit $B =$"la deuxième carte est coeur". Que vaut $P(B|A)$?

◯$\frac{4}{13}$ ◯$\frac{3}{14}$ ◯$\frac{1}{3}$ ⊗ $\frac{6}{19}$

On considère un paquet avec les 39 cartes de couleurs coeur, carreau, pique. On tire une première carte puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est pique" et soit $B =$"la deuxième carte est pique". Que vaut $P(B|A)$?

◯$\frac{1}{3}$ ⊗ $\frac{6}{19}$ ◯$\frac{4}{13}$ ◯$\frac{3}{14}$

On tire une première carte d'un paquet standard de 52 cartes puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est pique" et soit $B =$"la deuxième carte est pique". Laquelle de ces assertions est vraie?

◯$P(B|A) < P(A|B)$ ⊗ $P(B|A) = P(A|B)$ ◯$P(B|A) > P(A|B)$

On tire une première carte d'un paquet standard de 52 cartes puis une seconde. Soit $A =$"la première carte est un as" et soit $B =$"la deuxième carte est un as". Laquelle de ces assertions est vraie?

◯$P(B|A) < P(A|B)$ ⊗ $P(B|A) = P(A|B)$ ◯$P(B|A) > P(A|B)$

Trois groupes d'étudiants en nombres identiques répondent à une question avec des taux respectifs de 21%, 54%, 93% de réponses correctes. Un étudiant a répondu correctement. Quelle est la probabilité qu'il appartienne au groupe le plus faible?

◯$\frac{21}{100}$ ◯$\frac{1}{12}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{9}$ ⊗ $\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{7}$ ◯$\frac{1}{5}$

Trois groupes d'étudiants en nombres identiques répondent à une question avec des taux respectifs de 18%, 54%, 90% de réponses correctes. Un étudiant a répondu correctement. Quelle est la probabilité qu'il appartienne au groupe le plus faible?

◯$\frac{18}{100}$ ◯$\frac{1}{12}$ ◯$\frac{1}{10}$ ⊗ $\frac{1}{9}$ ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{7}$ ◯$\frac{1}{5}$

 ©J.-F. Burnol, 2002

EXAMEN DU 13 JUIN 2002

Cet examen est un questionnaire à choix multiples. Il comporte 8 questions à 1 point suivies de 8 questions à 1,5 points. Si vous souhaitez modifier une première réponse, signalez clairement (par exemple, en l'entourant) quel est votre choix définitif (qui doit être unique). Attention: aucun autre formulaire ne sera distribué. N'oubliez pas les questions au VERSO de cette feuille.

CALCULATRICES AUTORISÉES
TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS
durée: deux heures

NOM:

PRÉNOM:

né(e) le:

à:

Replier et cacheter

(chaque question sur cette page vaut 1 point)

On tire successivement deux cartes d'un jeu de 52. Sachant que la première est Coeur, quelle est la probabilité conditionnelle que la deuxième le soit aussi?

◯ $\frac{12}{50}$ ◯ $\frac{12}{51}$ ◯ $\frac{12}{52}$ ◯ $\frac{13}{52}$

On lance trois fois de suite le même dé, les lancers sont supposés indépendants. Sachant que l'on a obtenu 2 au deuxième lancer, quelle est la probabilité que l'on obtienne 3 au troisième lancer?

◯ $\frac{1}{2}$ ◯ $\frac{1}{6}$ ◯ $\frac{1}{3}$ ◯ $\frac{1}{4}$ ◯ $\frac{4}{6}$

On lance un premier dé puis un deuxième. Quelle est la probabilité que le résultat du deuxième lancer soit strictement supérieur à celui du premier?

◯ $\frac{12}{36}$ ◯ $\frac{13}{36}$ ◯ $\frac{14}{36}$ ◯ $\frac{15}{36}$ ◯ $\frac{16}{36}$ ◯ $\frac{17}{36}$

Dans une main de poker (jeu de cinquante-deux cartes, main de cinq cartes) quelle est la probabilité d'avoir cinq hauteurs de cartes différentes?

◯ $\frac{5}{13}$ ◯ $\frac{13.12.11.10.9}{52.51.50.49.48}$ ◯ $\frac{52.48.44.40.36}{52.51.50.49.48}$ ◯ $\frac{\binom{13}{5}}{52.51.50.49.48}$ ◯ $\frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

On répartit neuf étudiants en trois groupes a, b, c, comprenant respectivement deux, trois, et quatre personnes. De combien de façons distinctes cela peut-il se faire?

◯1260 ◯1440 ◯1620 ◯1800 ◯1980

Une urne A comporte 10 boules blanches et 20 boules noires et une urne B comporte 20 boules blanches et 10 boules noires. On choisit une urne au hasard, on tire une boule au hasard et on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été A?

◯ $\frac{1}{3}$ ◯ $\frac{2}{5}$ ◯ $\frac{1}{4}$ ◯ $\frac{1}{2}$ ◯ $\frac{3}{10}$

On se donne une variable aléatoire X de densité de probabilité u sur $[0, \sqrt{2}]$. Que vaut $\mathbf{E}(X)$?

◯$0,9428\ldots$ ◯$0,9636\ldots$ ◯1 ◯$1,172\ldots$ ◯$1,2828\ldots$

On dispose de cinq cartes numérotées 2, 3, 5, 7, et 11. On tire une première carte, on note son numéro puis, après avoir replacé la première carte on en tire une seconde. Quelle est l'espérance de la somme des deux numéros?

◯$9,4$ ◯10 ◯$10,6$ ◯$11,2$ ◯$11,8$ ◯$12,4$

(chaque question sur cette page vaut 1,5 points)

On dispose de cinq cartes numérotées 2, 3, 5, 7, et 11. On tire une première, puis, sans remise, une deuxième carte. Quelle est l'espérance de la somme des deux numéros?

◯$9,4$ ◯10 ◯$10,6$ ◯$11,2$ ◯$11,8$ ◯$12,4$

On se donne une variable aléatoire X qui vaut $\frac{1}{2^N}$ avec probabilité $\frac{1}{2^N}$, pour $N = 1, 2, \ldots$. Quelle est l'espérance de X?

◯$0,333\ldots$ ◯$0,5$ ◯$0,666\ldots$ ◯$0,25$ ◯$0,29166\ldots$ ◯$\frac{3}{8}$

On fait la somme X de 4 variables aléatoires indépendantes prenant chacune les valeurs ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité que $X = 0$?

◯$0,333\ldots$ ◯$0,375$ ◯$0,25$ ◯$0,4$ ◯$0,125$ ◯$0,175$

Soient Y_1, Y_2, Y_3, et Y_4 des variables aléatoires indépendantes prenant chacune les valeurs -1, 0 et 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$. Soit X leur somme. Quel est l'écart-type de X?

◯$1,51\ldots$ ◯$1,63\ldots$ ◯$1,39\ldots$ ◯$1,87\ldots$ ◯$1,75\ldots$

On répartit dix étudiants sur deux groupes avec quatre dans le premier et six dans le second. Quelle est la probabilité que les deux amis A et B se retrouvent séparés?

◯$\frac{8}{17}$ ◯$\frac{7}{16}$ ◯$\frac{9}{17}$ ◯$\frac{9}{15}$ ◯$\frac{8}{15}$ ◯$\frac{1}{2}$

On dispose de cinq urnes A, B, C, D, E, comportant respectivement 0, 1, 2, 3, et 4 boules noires. On rajoute à chacune 1 boule blanche. On choisit une urne au hasard, on tire une boule au hasard et on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été A?

◯$0,437\ldots$ ◯$0,4$ ◯$0,383\ldots$ ◯$0,375$ ◯$0,512\ldots$ ◯$0,566\ldots$

Dans une main de poker (jeu de cinquante-deux cartes, main de cinq cartes) quelle est la probabilité d'avoir les quatre couleurs toutes présentes?

◯$0,212\ldots$ ◯$0,167\ldots$ ◯$0,312\ldots$ ◯$0,129\ldots$ ◯$0,263\ldots$ ◯$0,088\ldots$

On se donne une variable aléatoire X de densité de probabilité $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ sur $[0,1]$. Quel est l'écart-type de X?

◯$0,275\ldots$ ◯$0,312\ldots$ ◯$0,376\ldots$ ◯$0,256\ldots$ ◯$0,423\ldots$ ◯$0,298\ldots$

EXAMEN DU 13 JUIN 2002

Cet examen est un questionnaire à choix multiples. Il comporte 8 questions à 1 point suivies de 8 questions à 1,5 points. Si vous souhaitez modifier une première réponse, signalez clairement (par exemple, en l'entourant) quel est votre choix définitif (qui doit être unique). Attention: aucun autre formulaire ne sera distribué. N'oubliez pas les questions au VERSO de cette feuille.

CALCULATRICES AUTORISÉES
TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS
durée: deux heures

NOM:

PRÉNOM:

né(e) le:

à:

Replier et cacheter

(chaque question sur cette page vaut 1 point)

RÉPONSES

On tire successivement deux cartes d'un jeu de 52. Sachant que la première est Coeur, quelle est la probabilité conditionnelle que la deuxième le soit aussi?

○ $\frac{12}{50}$ ⊗ $\frac{12}{51}$ ○ $\frac{12}{52}$ ○ $\frac{13}{52}$

On lance trois fois de suite le même dé, les lancers sont supposés indépendants. Sachant que l'on a obtenu 2 au deuxième lancer, quelle est la probabilité que l'on obtienne 3 au troisième lancer?

○ $\frac{1}{2}$ ⊗ $\frac{1}{6}$ ○ $\frac{1}{3}$ ○ $\frac{1}{4}$ ○ $\frac{4}{6}$

On lance un premier dé puis un deuxième. Quelle est la probabilité que le résultat du deuxième lancer soit strictement supérieur à celui du premier?

○ $\frac{12}{36}$ ○ $\frac{13}{36}$ ○ $\frac{14}{36}$ ⊗ $\frac{15}{36}$ ○ $\frac{16}{36}$ ○ $\frac{17}{36}$

Dans une main de poker (jeu de cinquante-deux cartes, main de cinq cartes) quelle est la probabilité d'avoir cinq hauteurs de cartes différentes?

○ $\frac{5}{13}$ ○ $\frac{13.12.11.10.9}{52.51.50.49.48}$ ⊗ $\frac{52.48.44.40.36}{52.51.50.49.48}$ ○ $\frac{\binom{13}{5}}{52.51.50.49.48}$ ○ $\frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

On répartit neuf étudiants en trois groupes a, b, c, comprenant respectivement deux, trois, et quatre personnes. De combien de façons distinctes cela peut-il se faire?

⊗ 1260 ○1440 ○1620 ○1800 ○1980

Une urne A comporte 10 boules blanches et 20 boules noires et une urne B comporte 20 boules blanches et 10 boules noires. On choisit une urne au hasard, on tire une boule au hasard et on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été A?

⊗ $\frac{1}{3}$ ○ $\frac{2}{5}$ ○ $\frac{1}{4}$ ○ $\frac{1}{2}$ ○ $\frac{3}{10}$

On se donne une variable aléatoire X de densité de probabilité u sur $[0, \sqrt{2}]$. Que vaut $\mathbf{E}(X)$?

⊗ $0,9428\ldots$ ○$0,9636\ldots$ ○1 ○$1,172\ldots$ ○$1,2828\ldots$

On dispose de cinq cartes numérotées 2, 3, 5, 7, et 11. On tire une première carte, on note son numéro puis, après avoir replacé la première carte on en tire une seconde. Quelle est l'espérance de la somme des deux numéros?

○$9,4$ ○10 ○$10,6$ ⊗ $11,2$ ○$11,8$ ○$12,4$

(chaque question sur cette page vaut 1,5 points)

RÉPONSES

On dispose de cinq cartes numérotées 2, 3, 5, 7, et 11. On tire une première, puis, sans remise, une deuxième carte. Quelle est l'espérance de la somme des deux numéros?

○ $9,4$ ○ 10 ○ $10,6$ ⊗ $11,2$ ○ $11,8$ ○ $12,4$

On se donne une variable aléatoire X qui vaut $\frac{1}{2^N}$ avec probabilité $\frac{1}{2^N}$, pour $N = 1, 2, \ldots$. Quelle est l'espérance de X?

⊗ $0,333\ldots$ ○ $0,5$ ○ $0,666\ldots$ ○ $0,25$ ○ $0,29166\ldots$ ○ $\frac{3}{8}$

On fait la somme X de 4 variables aléatoires indépendantes prenant chacune les valeurs ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité que $X = 0$?

○ $0,333\ldots$ ⊗ $0,375$ ○ $0,25$ ○ $0,4$ ○ $0,125$ ○ $0,175$

Soient Y_1, Y_2, Y_3, et Y_4 des variables aléatoires indépendantes prenant chacune les valeurs -1, 0 et 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$. Soit X leur somme. Quel est l'écart-type de X?

○ $1,51\ldots$ ⊗ $1,63\ldots$ ○ $1,39\ldots$ ○ $1,87\ldots$ ○ $1,75\ldots$

On répartit dix étudiants sur deux groupes avec quatre dans le premier et six dans le second. Quelle est la probabilité que les deux amis A et B se retrouvent séparés?

○ $\frac{8}{17}$ ○ $\frac{7}{16}$ ○ $\frac{9}{17}$ ○ $\frac{9}{15}$ ⊗ $\frac{8}{15}$ ○ $\frac{1}{2}$

On dispose de cinq urnes A, B, C, D, E, comportant respectivement 0, 1, 2, 3, et 4 boules noires. On rajoute à chacune 1 boule blanche. On choisit une urne au hasard, on tire une boule au hasard et on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été A?

⊗ $0,437\ldots$ ○ $0,4$ ○ $0,383\ldots$ ○ $0,375$ ○ $0,512\ldots$ ○ $0,566\ldots$

Dans une main de poker (jeu de cinquante-deux cartes, main de cinq cartes) quelle est la probabilité d'avoir les quatre couleurs toutes présentes?

○ $0,212\ldots$ ○ $0,167\ldots$ ○ $0,312\ldots$ ○ $0,129\ldots$ ⊗ $0,263\ldots$ ○ $0,088\ldots$

On se donne une variable aléatoire X de densité de probabilité $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ sur $[0,1]$. Quel est l'écart-type de X?

○ $0,275\ldots$ ○ $0,312\ldots$ ○ $0,376\ldots$ ○ $0,256\ldots$ ○ $0,423\ldots$ ⊗ $0,298\ldots$

EXAMEN DU 12 SEPTEMBRE 2002

Cet examen est un questionnaire à choix multiples. Il comporte 8 questions à 1 point suivies de 6 questions à 2 points. Si vous souhaitez modifier une première réponse, signalez clairement (par exemple, en l'entourant) quel est votre choix définitif (qui doit être unique). Attention: aucun autre formulaire ne sera distribué. N'oubliez pas les questions au VERSO de cette feuille.

CALCULATRICES AUTORISÉES
TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS
durée: deux heures

NOM:

PRÉNOM:

né(e) le:

à:

Replier et cacheter

(chaque question sur cette page vaut 1 point)

On dispose de cinq cartes numérotées portant toutes le même numéro 5. On tire trois cartes. Quelle est l'espérance de la somme des trois numéros?

◯10 ◯11 ◯12 ◯13 ◯14 ◯15

On tire successivement deux cartes d'un jeu de 32. Sachant que la première est un As, quelle est la probabilité conditionnelle que la deuxième le soit aussi?

◯$\frac{3}{31}$ ◯$\frac{3}{32}$ ◯$\frac{3}{33}$ ◯$\frac{4}{32}$

On lance quatre fois de suite le même dé, les lancers sont supposés indépendants. Sachant que l'on a obtenu 2 à chacun des trois premiers lancers, quelle est la probabilité que l'on obtienne 2 au quatrième lancer?

◯$\frac{1}{2}$ ◯$\frac{1}{6}$ ◯$\frac{1}{3}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{4}{6}$

On lance un premier dé (numéroté de 1 à 6) puis un deuxième. Quelle est la probabilité que le résultat du deuxième lancer soit inférieur ou égal à celui du premier?

◯$\frac{20}{36}$ ◯$\frac{21}{36}$ ◯$\frac{22}{36}$ ◯$\frac{23}{36}$ ◯$\frac{24}{36}$ ◯$\frac{25}{36}$

On répartit dix étudiants en trois groupes a, b, c, comprenant respectivement trois, trois, et quatre personnes. De combien de façons distinctes cela peut-il se faire?

◯4200 ◯4600 ◯5000 ◯5400 ◯1980

On se donne une densité de probabilité $g(u) = c \cdot u^2$ sur $[-1, 1]$ et $g(u) = 0$ ailleurs. Que vaut c?

◯$0,5$ ◯$1,5$ ◯$2,5$ ◯$3,5$ ◯$4,5$ ◯$5,5$

On dispose de cinq cartes numérotées 10, 11, 12, 13, et 14. On tire une première, puis, sans remise, une deuxième carte. Quelle est l'espérance de la somme des deux numéros?

◯24 ◯25 ◯26 ◯27

On joue à pile ou face jusqu'à obtenir pile. Quelle est la probabilité d'avoir fait en tout au plus 5 lancers?

◯$0,5$ ◯$0,75$ ◯$0,96875$ ◯$0,97125$ ◯$0,99125$

(chaque question sur cette page vaut 2 points)

Une urne A comporte 10 boules blanches et 10 boules noires et une urne B comporte 20 boules blanches et 30 boules noires. On choisit une urne au hasard, on tire une boule au hasard et on constate qu'elle est noire. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été B?

◯$\frac{5}{10}$ ◯$\frac{5}{11}$ ◯$\frac{5}{12}$ ◯$\frac{6}{12}$ ◯$\frac{6}{11}$

On fait la somme X de 3 variables aléatoires indépendantes prenant chacune les valeurs 0 ou 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité que $X = 0$?

◯$0,125$ ◯$0,175$ ◯$0,225$ ◯$0,275$ ◯$0,325$ ◯$0,375$

Soient Y_1, Y_2, Y_3 trois variables aléatoires indépendantes prenant chacune la valeur 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et la valeur 1 avec probabilité $\frac{2}{3}$. Soit $X = Y_1 + Y_2 + Y_3$. Quelle est la variance de X?

◯$\frac{1}{2}$ ◯$\frac{1}{3}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{2}{5}$ ◯$\frac{3}{4}$

Combien y-a-t'il de mains de poker (jeu de cinquante-deux cartes, main de cinq cartes) qui ont les quatres couleurs Coeur, Carreau, Tréfle, Pique présentes?

◯685464 ◯52728 ◯632736 ◯2530944 ◯421824

On dispose de six urnes A, B, C, D, E, F. Les urnes A, B, C comportent chacune 5 boules blanches et 15 boules noires. Les urnes D, E, F comportent chacune 10 blanches et 5 noires. On choisit une urne au hasard, on tire une boule au hasard et on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été A?

◯$\frac{1}{12}$ ◯$\frac{1}{10}$ ◯$\frac{1}{9}$ ◯$\frac{1}{8}$ ◯$\frac{1}{6}$ ◯$\frac{1}{4}$ ◯$\frac{1}{3}$

On répartit douze étudiants sur trois groupes de quatre. Quelle est la probabilité que les trois amis A, B et C se retrouvent totalement séparés?

◯$\frac{1}{5}$ ◯$\frac{16}{55}$ ◯$\frac{6}{75}$ ◯$\frac{8}{25}$ ◯$\frac{12}{65}$ ◯$\frac{25}{96}$

EXAMEN DU 12 SEPTEMBRE 2002

Cet examen est un questionnaire à choix multiples. Il comporte 8 questions à 1 point suivies de 6 questions à 2 points. Si vous souhaitez modifier une première réponse, signalez clairement (par exemple, en l'entourant) quel est votre choix définitif (qui doit être unique). Attention: aucun autre formulaire ne sera distribué. N'oubliez pas les questions au VERSO de cette feuille.

CALCULATRICES AUTORISÉES
TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS
durée: deux heures

CORRIGÉ

CORRIGÉ

CORRIGÉ

CORRIGÉ

CORRIGÉ

(chaque question sur cette page vaut 1 point)

On dispose de cinq cartes numérotées portant toutes le même numéro 5. On tire trois cartes. Quelle est l'espérance de la somme des trois numéros?

○10 ○11 ○12 ○13 ○14 ⊗ 15

On tire successivement deux cartes d'un jeu de 32. Sachant que la première est un As, quelle est la probabilité conditionnelle que la deuxième le soit aussi?

⊗ $\frac{3}{31}$ ○$\frac{3}{32}$ ○$\frac{3}{33}$ ○$\frac{4}{32}$

On lance quatre fois de suite le même dé, les lancers sont supposés indépendants. Sachant que l'on a obtenu 2 à chacun des trois premiers lancers, quelle est la probabilité que l'on obtienne 2 au quatrième lancer?

○$\frac{1}{2}$ ⊗ $\frac{1}{6}$ ○$\frac{1}{3}$ ○$\frac{1}{4}$ ○$\frac{4}{6}$

On lance un premier dé (numéroté de 1 à 6) puis un deuxième. Quelle est la probabilité que le résultat du deuxième lancer soit inférieur ou égal à celui du premier?

○$\frac{20}{36}$ ⊗ $\frac{21}{36}$ ○$\frac{22}{36}$ ○$\frac{23}{36}$ ○$\frac{24}{36}$ ○$\frac{25}{36}$

On répartit dix étudiants en trois groupes a, b, c, comprenant respectivement trois, trois, et quatre personnes. De combien de façons distinctes cela peut-il se faire?

⊗ 4200 ○4600 ○5000 ○5400 ○1980

On se donne une densité de probabilité $g(u) = c \cdot u^2$ sur $[-1, 1]$ et $g(u) = 0$ ailleurs. Que vaut c?

○$0,5$ ⊗ $1,5$ ○$2,5$ ○$3,5$ ○$4,5$ ○$5,5$

On dispose de cinq cartes numérotées 10, 11, 12, 13, et 14. On tire une première, puis, sans remise, une deuxième carte. Quelle est l'espérance de la somme des deux numéros?

⊗ 24 ○25 ○26 ○27

On joue à pile ou face jusqu'à obtenir pile. Quelle est la probabilité d'avoir fait en tout au plus 5 lancers?

○$0,5$ ○$0,75$ ⊗ $0,96875$ ○$0,97125$ ○$0,99125$

(chaque question sur cette page vaut 2 points)

Une urne A comporte 10 boules blanches et 10 boules noires et une urne B comporte 20 boules blanches et 30 boules noires. On choisit une urne au hasard, on tire une boule au hasard et on constate qu'elle est noire. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été B?

○ $\frac{5}{10}$ ○ $\frac{5}{11}$ ○ $\frac{5}{12}$ ○ $\frac{6}{12}$ ⊗ $\frac{6}{11}$

On fait la somme X de 3 variables aléatoires indépendantes prenant chacune les valeurs 0 ou 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité que $X = 0$?

⊗ $0,125$ ⊗ $0,175$ ○ $0,225$ ○ $0,275$ ○ $0,325$ ○ $0,375$

Soient Y_1, Y_2, Y_3 trois variables aléatoires indépendantes prenant chacune la valeur 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et la valeur 1 avec probabilité $\frac{2}{3}$. Soit $X = Y_1 + Y_2 + Y_3$. Quelle est la variance de X?

○ $\frac{1}{2}$ ⊗ $\frac{1}{3}$ ○ $\frac{1}{4}$ ○ $\frac{2}{5}$ ○ $\frac{3}{4}$

Combien y-a-t'il de mains de poker (jeu de cinquante-deux cartes, main de cinq cartes) qui ont les quatres couleurs Coeur, Carreau, Tréfle, Pique présentes?

⊗ 685464 ○ 52728 ○ 632736 ○ 2530944 ○ 421824

On dispose de six urnes A, B, C, D, E, F. Les urnes A, B, C comportent chacune 5 boules blanches et 15 boules noires. Les urnes D, E, F comportent chacune 10 blanches et 5 noires. On choisit une urne au hasard, on tire une boule au hasard et on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été A?

○ $\frac{1}{12}$ ○ $\frac{1}{10}$ ⊗ $\frac{1}{9}$ ○ $\frac{1}{8}$ ○ $\frac{1}{6}$ ○ $\frac{1}{4}$ ○ $\frac{1}{3}$

On répartit douze étudiants sur trois groupes de quatre. Quelle est la probabilité que les trois amis A, B et C se retrouvent totalement séparés?

○ $\frac{1}{5}$ ⊗ $\frac{16}{55}$ ○ $\frac{6}{75}$ ○ $\frac{8}{25}$ ○ $\frac{12}{65}$ ○ $\frac{25}{96}$